# Agrégation de mathématiques - Leçons d'algèbre et géométrie

Adrien Le Boudec

Ce document regroupe par thèmes les leçons d'algèbre et géométrie au programme de la session 2011 de l'agrégation externe de mathématiques. Pour chaque leçon, je donne une liste de remarques extraites des rapports du jury des années précédentes, et j'indique quelques développements possibles. Certaines leçons apparaissent naturellement dans plusieurs thèmes.

Préparer les leçons par paquet permet d'une part d'acquérir une vision assez large de la thématique, et d'autre part d'assimiler rapidement les développements, dans la mesure où certains apparaissent de nombreuses fois au sein d'un même paquet.

Ce document étant isssu de ma préparation au concours, les choix indiqués sont personnels et donc subjectifs, et le lecteur intéressé prendra soin de sélectionner les suggestions de développements qui lui paraissent les plus adéquats.

## Table des matières

# 1 Algèbre linéaire

118. **Exemples d'utilisation de la notion de dimension d'un espace vectoriel.**
   – C'est une leçon transversale nouvelle (ancien commentaire, en 2010 le titre a changé).

   ⟶ Théorème du minimax.

   ⟶ Invariants de similitude.

   ⟶ Dimension d'un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ consitué de matrices de rang inférieur à $p$.

120. **Dimension d'un espace vectoriel, rang. Exemples et applications.**
   – C'est une leçon qui contrairement aux apparences est devenue difficile pour les candidats.
   – Être capable de donner des réponses satisfaisantes à des questions élémentaires comme : un sev d'un espace vectoriel de dimension finie est-il de dimension finie ?
   – Les exemples doivent mettre en évidence la notion de rang ou dimension, par exemple en dualité, dans les formes quadratiques et les matrices.

   ⟶ Théorème du minimax.

   ⟶ Invariants de similitude.

   ⟶ Dimension d'un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ consitué de matrices de rang inférieur à $p$.

123. **Déterminant. Exemples et applications.**
   – Il faut que le plan soit cohérent : si le déterminant n'est défini que sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ il est délicat de définir $\det(A - XI_n)$ où $A$ est une matrice carrée.
   – Le jury ne peut se contenter d'un Vandermonde ou d'un circulant.
   – Le résultant et les applications simples à l'intersection ensembliste de deux courbes algébriques planes peuvent trouver leur place dans cette leçon.
   – Les interprétations géométriques du déterminant sont fondamentales : volume, orientation.
   – Discussion du rang grâce aux bordantes.
   – On attend dans le développement l'illustration d'un calcul ou la manipulation de déterminants non triviaux (on ne peut pas présenter le théorème de Muntz sans présenter le calcul du déterminant de Cauchy).

   ⟶ Dimension d'un sous-espace de $M_n(\mathbb{R})$ consitué de matrices de rang inférieur à $p$.

   ⟶ Trois exemples de calculs de déterminants : Cauchy, Smith et Hurwitz.

124. **Polynômes d'endomorphisme en dimension finie. Réduction d'un endomorphisme. Applications.**
   – Différente de la leçon 129.
   – Consacrer une courte partie à l'algèbre $k[u]$, connaître sa dimension. Les propriétés globales pourront être étudiées par les meilleurs.
   – Les candidats peuvent s'interroger sur les idempotents et le lien avec la décomposition en somme de sous-espaces caractéristiques.
   – Présenter le lien entre réduction et propriétés de l'algèbre $k[u]$.
   – Les polynômes d'un endomorphisme permettent de calculer les puissances de cet endomorphisme.
   – Faire le lien avec les suites récurrentes ou les équations différentielles linéaires d'ordre $n$ (applications).

   ⟶ Endomorphismes cycliques et sous-espaces stables.

   ⟶ Endomorphismes semi-simples.

   ⟶ Image de l'exponentielle.

125. **Sous-espaces stables d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie. Applications.**
   - Cette leçon ne peut se réduire à la réduction.
   - On peut traiter de théorie des représentations.
   - Description de tous les sous-espaces stables dans le cas cyclique (on peut faire une analogie avec les sous-groupes de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) ?
   - Les candidats doivent s'interroger sur les propriétés de l'ensemble des sous-espaces stables par un endomorphisme.
   - Des études de cas détaillés sont les bienvenues.
   - Les candidats doivent savoir déterminer tous les sous-espaces stables d'une matrice $3 \times 3$, d'une matrice constituée d'un seul bloc de Jordan ou d'une matrice diagonalisable.

   $\longrightarrow$ Endomorphismes cycliques et sous-espaces stables.

   $\longrightarrow$ Invariants de similitude.

   $\longrightarrow$ Endomorphismes semi-simples.

126. **Endomorphismes diagonalisables en dimension finie.**
   - Donner des exemples naturels, des critères.
   - Le calcul de l'exponentielle d'un endomorphisme diagonalisable est immédiat dés que l'on connaît les valeurs propres, et ceci sans diagonaliser.

   $\longrightarrow$ Théorème de Burnside.

   $\longrightarrow$ Décomposition de Dunford par la méthode de Newton.

   $\longrightarrow$ Codiagonalisation. Application à la résolution de $\exp(A) = \exp(B)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

127. **Exponentielle de matrices. Applications.**
   - Les notions d'injectivité et de surjectivité doivent être abordées. La matrice
   $$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   est-elle l'exponentielle d'une matrice réelle ? Qu'en est-il de la matrice $B = \mathrm{diag}(A, A)$ ?
   - La décomposition de Dunford multiplicative de $\exp A$ (décomposition de Jordan) doit être connue.
   - Dans le cas diagonalisable, les projecteurs sont utiles pour calculer l'exponentielle. On pourra par exemple calculer l'exponentielle de la matrice
   $$\begin{pmatrix} 1 & * & * & * \\ 0 & 2 & * & * \\ 0 & 0 & 3 & * \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$
   - Les groupes à un paramètre trouvent leur place dans cette leçon, on peut se demander si ces sous-groupes constituent des sous-variétés fermées de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
   - Le logarithme, quand il est défini, trouve toute sa place dans cette leçon. Si on traite du cas des matrices nilpotentes, on pourra invoquer le calcul sur les développements limités.
   - Les applications aux équations différentielles doivent figurer, sans pour autant occuper toute la leçon. On pourra par exemple faire le lien entre réduction et comportement asymptotique.
   - On pourra par exemple étudier, pour $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{C})$, l'application exponentielle de $\mathbb{C}[A]$ dans $\mathbb{C}[A]$, et montrer comment les notions topologiques peuvent intervenir utilement pour montrer la surjectivité de l'exponentielle.

– Les notions d'algèbre de Lie ne sont pas au programme de l'agrégation, on conseille de n'aborder ces notions que si l'on a une certaine solidité.

$\longrightarrow$ Codiagonalisation. Application à la résolution de $\exp(A) = \exp(B)$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{R})$.

$\longrightarrow$ Image de l'exponentielle.

$\longrightarrow$ Théorème de Von Neumann.

128. **Endomorphismes trigonalisables, endomorphismes nilpotents.**
   – Il est possible de mener une leçon de bon niveau, même sans la décomposition de Jordan, à l'aide des noyaux itérés.
   – Il n'y a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de matrices nilpotentes.
   – On peut avantageusement étudier l'application exponentielle sur le cône des matrices nilpotentes. L'utilisation des séries formelles ou des développements limités sont bien utiles.
   – Les matrices nilpotentes de rang $r$ ne sont pas toutes conjuguées entre elles.

   $\longrightarrow$ Théorème de Burnside.

   $\longrightarrow$ Décomposition de Dunford par la méthode de Newton.

130. **Matrices symétriques réelles, matrices hermitiennes.**
   – C'est une leçon transversale.
   – La notion de signature doit y figurer, on doit faire le lien avec les formes quadratiques et les formes hermitiennes.
   – La partie réelle et la partie imaginaire d'un produit hermitien définissent des structures sur l'espace vectoriel réel sous-jacent.

   $\longrightarrow$ La décomposition polaire est un homéomorphisme.

   $\longrightarrow$ Théorème du minimax.

   $\longrightarrow$ Lemme de Morse.

132. **Formes linéaires et hyperplans en dimension finie. Exemples et applications.**
   – Savoir calculer la dimension d'une intersection d'hyperplans est au coeur de la leçon.
   – L'utilisation des opérations élémentaires sur les lignes et les colonnes permet facilement d'obtenir les équations d'un sous-espace vectoriel ou d'exhiber une base d'une intersection d'hyperplans.
   – Cette leçon peut être traitée sous différents aspects : géométrie, algèbre, topologie, analyse...
   – Rappeler que la différentielle d'une fonction réelle est une forme linéaire semble incontournable.

   $\longrightarrow$ Théorème de Hahn-Banach en dimension finie.

   $\longrightarrow$ Invariants de similitude.

   $\longrightarrow$ Théorème des extrema liés.

133. **Endomorphismes remarquables d'un espace vectoriel euclidien.**
   – Il faut savoir caractériser les symétries orthogonales et les projections orthogonales en utilisant l'adjoint.
   – Si on présente en développement la réduction des endomorphismes normaux, il convient d'avoir réfléchi à l'unicité de la forme réduite proposée et de savoir en déduire la réduction des endomorphismes autoadjoints et orthogonaux.

$\longrightarrow$ Théorème du minimax.

$\longrightarrow$ La décomposition polaire est un homéomorphisme.

140. **Systèmes d'équations linéaires. Systèmes échelonnés. Résolution. Exemples et applications.**
   - Impérativement présenter la notion de système échelonné, avec une définition précise et correcte, et situer l'ensemble dans le contexte de l'algèbre linéaire (sans oublier la dualité !). Par exemple les relations de dépendance linéaire sur les colonnes d'une matrice échelonnée sont claires et permettent de décrire simplement les orbites de l'action par multiplication de $\mathrm{GL}_n(K)$ sur $\mathrm{M}_n(K)$. Le candidat doit pouvoir écrire un système d'équations de l'espace engendré par les colonnes.
   - Un point de vue opératoire doit accompagner l'étude théorique.
   - L'intérêt pratique des méthodes présentées doit être expliqué.
   - Le jury n'attend pas une présentation à l'ancienne articulée autour du théorème de Rouché, qui n'est pas d'un grand intérêt dans sa version traditionnellement exposée (il est important de le replacer dans le contexte des opérations).
   - Les candidats sont invités à réfléchir non seulement à la résolution pratiques de systèmes linéaires (à coefficients sur $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{F}_p$), mais aussi à l'écriture d'un système d'équations linéaires (par exemples équations d'un sous-espace).

   $\longrightarrow$ Méthode du gradient.

   $\longrightarrow$ Décomposition LU et de Choleski.

## 2 Arithmétique

109. **Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Applications.**
   - Bien maitriser le lemme chinois et sa réciproque.
   - Connaître les automorphismes, les nilpotents, les idempotents.
   - Comprendre les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$ est un bon exercice.
   - Présenter quelques applications arithmétiques, telle l'étude de quelques équations diophantiennes bien choisies.
   - La structure des groupes abéliens finis doit être connue (il y a deux présentations distinctes : diviseurs élémentaires ou via les $p$-Sylow), il faut savoir passer de l'une à l'autre.

   $\longrightarrow$ Loi de réciprocité quadratique via le résultant.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

   $\longrightarrow$ Entiers somme de deux carrés.

110. **Nombres premiers. Applications.**
   - La répartition des nombres premiers est un résultat historique important, mais sa démonstration n'est bien-sûr pas exigible au niveau de l'agrégation.
   - Il peut être intéressant de consacrer une section à certains nombres premiers, à la recherche de nombres premiers, aux applications en algèbre, en géométrie.
   - La réduction modulo $p$ n'est pas hors-sujet et constitue un outil puissant pour résoudre des problèmes arithmétiques simples.

   $\longrightarrow$ Loi de réciprocité quadratique via la notion de résultant.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

111. **Anneaux principaux. Applications.**
   - Il est possible de présenter des exemples d'anneaux principaux classiques autres que $\mathbb{Z}$ et $K[X]$, accompagnés d'une description de leurs irréductibles.
   - Les applications en algèbre linéaire ne manquent pas, il serait bon que les candidats les illustrent.
   - Savoir pourquoi $A[X]$ est principal si et seulement si $A$ est un corps.
   - Savoir que $\mathbb{Z}[X]$ est factoriel et non principal, exhiber un idéal non principal.

   $\longrightarrow$ Algorithme de Berlekamp.

   $\longrightarrow$ Entiers somme de deux carrés.

112. **Corps finis. Applications.**
   - Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement.
   - Il convient de montrer comment l'utilisation des corps de rupture permet de prouver l'irréductibilité d'un polynôme.
   - Comprendre les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$ est un bon exercice.
   - (Dans $\mathbb{F}_{16} = k$ il y a des générateurs de $k$ en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre qui ne sont pas des générateurs du groupe multiplicatif de $k$).
   - Les applications des corps finis ne doivent pas êtres négligées.
   - Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.
   - Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir résoudre les équations de degré 2.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

   $\longrightarrow$ Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

   $\longrightarrow$ Algorithme de Berlekamp.

## 3 Formes quadratiques

131. **Formes quadratiques sur un espace vectoriel de dimension finie. Orthogonalité, Isotropie. Applications.**
   - Le candidat ne doit pas se contenter de travailler sur $\mathbb{R}$ et ne doit pas négliger l'interprétation géométrique des notions introduites (lien entre coniques, formes quadratiques, cônes isotropes) ou les aspects élémentaires (par exemple le discriminant de l'équation $ax^2+bx+c=0$ et la signature de la forme quadratique $ax^2+bxy+cy^2$).
   - On ne peut se limiter à des considérations élémentaires d'algèbre linéaire.
   - Les formes quadratiques ne sont pas toutes non dégénérées (la notion de quotient est utile pour s'y ramener).
   - La notion d'isotropie est mal maitrisée, y compris par les meilleurs. Le cône isotrope est un aspect important de cette leçon, qu'il faut rattacher à la géométrie différentielle.
   - Il faut savoir reconnaître une forme quadratique lorsque l'on dispose d'un polynôme homogène du second degré en plusieurs variables.
   - La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue.
   - L'algorithme de Gauss doit être énoncé et pouvoir être pratiqué sur une forme quadratique de $\mathbb{R}^3$. Le lien avec la signature doit être clairement énoncé.
   - Il est important d'illustrer cette leçon d'exemples naturels.
   - Il existe des formes quadratiques sur $\mathbb{C}$, mais c'est une notion différente de celle des formes hermitiennes.
   - Le théorème de Chevalley-Warning ne constitue pas un bon développement dans les leçons sur les formes quadratiques (preuve triviale en dimension 2).

   $\longrightarrow$ Théorème de Liapunov.

   $\longrightarrow$ Lemme de Morse.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

136. **Coniques. Applications.**
   - La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue.
   - Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées.
   - Bien distinguer les notions affines, métriques et projectives.
   - Les applications aux trajectoires des planètes doivent être connues et les candidats doivent s'interroger sur la présence d'objets quadratiques dans le monde réel.

148. **Formes quadratiques réelles. Exemples et applications.**
   - La preuve de la loi d'inertie de Silvester doit être connue et le candidat doit avoir compris la signification géométrique de ces deux entiers composant la signature d'une forme quadratique réelle.
   - La différentielle seconde d'une fonction de plusieurs variables est une forme quadratique importante.

   $\longrightarrow$ Théorème de Liapunov.

   $\longrightarrow$ Lemme de Morse.

## 4 Dénombrement

114. **Anneau des séries formelles. Applications.**
   - C'est un leçon qui doit être illustrée de nombreux exemples et applications : combinatoire, calcul des sommes de Newton, relations de récurrence etc.

   $\longrightarrow$ Théorème de Molien.

   $\longrightarrow$ Nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments.

145. **Méthodes combinatoires, problèmes de dénombrement.**
   - Il faut dans un premier temps dégager clairement les méthodes et les illustrer d'exemples significatifs.
   - Principe de récurrence, principe d'inclusion-exclusion, principe des bergers, le tout est la somme des parties.
   - L'utilisation de séries génératrices est un outil puissant pour le calcul de certains cardinaux.
   - Classes de similitudes d'endomorphismes nilpotents, nombre de sous-espaces stables d'un endomorphisme cyclique, sous-groupes d'un groupe abélien, l'ensemble des matrices nilpotentes de rang $n-1$ dans $\mathrm{M}_n(\mathbb{F}_p)$.
   - Le jury s'attend à ce que le candidat sache calculer des cardinaux classiques et certaines probabilités.

   $\longrightarrow$ Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

   $\longrightarrow$ Nombre de partitions d'un ensemble à $n$ éléments.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

## 5 Géométrie

135. **Isométries d'un espace affine euclidien de dimension finie. Forme réduite. Applications en dimension 2 et 3.**
   - La classification des isométries en dimension 2 et 3 est exigible.
   - Théorème de décomposition commutative.
   - En dimension 3 : déplacements (translations, rotations, vissage) et antidéplacements (Symétries planes, symétries glissées, isométries négatives à point fixe unique).

136. **Coniques. Applications.**
   - La définition des coniques affines non dégénérées doit être connue.
   - Les propriétés classiques des coniques doivent être présentées.
   - Bien distinguer les notions affines, métriques et projectives.
   - Les applications aux trajectoires des planètes doivent être connues et les candidats doivent s'interroger sur la présence d'objets quadratiques dans le monde réel.

137. **Barycentres dans un espace affine réel de dimension finie, convexité. Applications.**
   - De nombreux candidats sont pénalisés par des notations assez lourdes et un cadre théorique peu commode. Ne pas déséquilibrer la leçon.
   - On attend des candidats qu'ils parlent de coordonnées barycentriques et les utilisent par exemple dans le triangle (coordonnées barycentriques de certains points remarquables).

139. **Applications des nombres complexes à la géométrie.**
   - C'est le moment de mettre à plat la notion d'angle !
   - Une étude de l'exponentielle complexe et des homographies de la sphère de Riemann est tout à fait appropriée.
   - Le théorème des zéros de Hilbert et le théorème de Bézout ne sont pas des théorèmes de nature complexe.

144. **Problèmes d'angles et de distance en dimension 2 et 3.**

## 6 Groupes

101. **Groupe opérant sur un ensemble. Exemples et applications.**
   – Action sur un ensemble fini, sur un espace vectoriel, sur un ensemble de matrices, sur des polynômes.
   – Exemples issus de la géométrie.
   – Les actions naturelles de $\mathrm{PGL}(2, \mathbb{F}_q)$ sur les droites du plan donnent des injections intéressantes pour $q = 2, 3$.

   $\longrightarrow$ Fonctions polynomiales sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constantes sur les classes de similitude.

   $\longrightarrow$ Théorèmes de Sylow.

   $\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{S}_4$.

   $\longrightarrow$ Groupes d'ordre 18.

103. **Exemples et applications des notions de sous-groupe distingué et de groupe quotient.**
   – Dans un groupe simple, toute réunion non triviale de classes de conjugaison engendre le groupe (par exemple les éléments de la forme $x^2yx$).
   – Produit semi-direct plus au programme, le définir proprement lorsqu'on l'utilise.
   – Des exemples et applications en géométrie élémentaire sont nécessaires.

   $\longrightarrow$ Groupes d'ordre 18.

   $\longrightarrow$ Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$.

104. **Groupes finis. Exemples et applications.**
   – Les exemples doivent figurer en bonne place dans cette leçon.
   – On peut par exemple étudier les groupes de symétrie $\mathrm{A}_4, \mathrm{S}_4, \mathrm{A}_5$ et relier sur ces exemples géométrie et algèbre.

   $\longrightarrow$ Théorèmes de Sylow.

   $\longrightarrow$ Automorphismes du groupe symétrique.

   $\longrightarrow$ Théorème de Burnside.

105. **Groupe des permutations d'un ensemble fini. Applications.**
   – Les applications ne concernent pas seulement les polyèdres réguliers.
   – Le lien entre signature et déterminant doit être connu.
   – Un candidat qui propose de montrer que tout groupe simple d'ordre 60 est isomorphe à $\mathrm{A}_5$ doit également montrer que $\mathrm{A}_5$ est simple.
   – L'existence du morphisme signature est non triviale mais ne peut constituer un développement.
   – Comme pour toute structure algébrique il est souhaitable de s'intéresser aux automorphismes du groupe symétrique.

   $\longrightarrow$ Automorphismes du groupe symétrique.

   $\longrightarrow$ Théorème de Brauer.

   $\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{A}_5$.

106. **Groupe linéaire d'un espace vectoriel de dimension finie E, sous-groupes de GL($E$). Applications.**
   – Savoir réaliser $\mathrm{S}_n$ dans $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et faire le lien entre signature et déterminant.

– Les applications topologiques sont acceptables.
– Savoir faire correspondre sous-groupes ou noyaux, et stabilisateurs de certaines actions (sur des formes quadratiques, symplectiques, sur des drapeaux, sur une décomposition en somme directe etc).
– A quoi servent les générateurs ?
– Qu'apportent les résultats topologiques ?

$\longrightarrow$ Théorème de Burnside.

$\longrightarrow$ La décomposition polaire est un homéomorphisme.

$\longrightarrow$ Théorème de von Neumann.

107. **Représentations et caractères d'un groupe fini sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.**

$\longrightarrow$ Le degré d'une représentation irréductible divise le cardinal du groupe.

$\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{S}_4$.

$\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{A}_5$.

108. **Exemples de parties génératrices d'un groupe. Applications.**
– Peu de candidats voient l'utilité des parties génératrices dans l'analyse des morphismes de groupes (automorphismes du groupe diédral par exemple).
– La leçon ne se limite pas aux groupes finis.

$\longrightarrow$ Automorphismes du groupe symétrique.

$\longrightarrow$ Simplicité de SO(3).

113. **Groupe des nombres complexes de module 1. Sous-groupes des racines de l'unité. Applications.**
– Les propriétés des polynômes cyclotomiques doivent être énoncées. Leur irréductibilité sur $\mathbb{Z}$ doit être maitrisée.
– Il est possible de parler d'exponentielle complexe, de théorème de relèvement, de séries de Fourier.

$\longrightarrow$ Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

$\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

119. **Exemples d'actions de groupes sur les espaces de matrices.**
– Nouvelle leçon, qui préfigure de futures leçons sur les actions linéaires de groupes finis sur des espaces vectoriels.
– Cette leçon n'a pas souvent été prise, elle nécessite un certain recul.

$\longrightarrow$ Théorème de Brauer.

$\longrightarrow$ Fonctions polynomiales sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constantes sur les classes de similitude.

$\longrightarrow$ $A$ et $B$ sont semblables si et seulement si $XI_n - A$ et $XI_n - B$ sont équivalentes.

141. **Utilisation des groupes en géométrie.**
– Leçon transversale et difficile.
– On ne peut prétendre à une bonne note si elle n'est pas préparée.

149. **Représentations de groupes finis de petit cardinal.**

$\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{S}_4$.

$\longrightarrow$ Table des caractères de $\mathrm{A}_5$.

## 7 Polynômes

112. **Corps finis. Applications.**
   - Le théorème de Wedderburn ne doit pas constituer le seul développement.
   - Il convient de montrer comment l'utilisation des corps de rupture permet de prouver l'irréductibilité d'un polynôme.
   - Comprendre les sous-corps de $\mathbb{F}_{64}$ est un bon exercice.
   - (Dans $\mathbb{F}_{16} = k$ il y a des générateurs de $k$ en tant que $\mathbb{F}_2$-algèbre qui ne sont pas des générateurs du groupe multiplicatif de $k$).
   - Les applications des corps finis ne doivent pas êtres négligées.
   - Le théorème de l'élément primitif, s'il est énoncé, doit pouvoir être utilisé.
   - Un candidat qui étudie les carrés dans un corps fini doit savoir résoudre les équations de degré 2.

   $\longrightarrow$ Nombre de zéros d'une forme quadratique non dégénérée sur $\mathbb{F}_p$.

   $\longrightarrow$ Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

   $\longrightarrow$ Algorithme de Berlekamp.

116. **Polynômes irréductibles à une indéterminée. Corps de rupture. Exemples et applications.**
   - Les applications ne concernent pas que les corps finis.
   - Il existe des corps algébriquement clos de caractéristique nulle autre que $\mathbb{C}$.
   - Il est instructif de chercher les polynômes irréductibles de degré 2,3,4 sur $\mathbb{F}_2$.
   - Les candidats peuvent réfléchir à l'exercice suivant : exhiber un isomorphisme entre $\mathbb{R}[X]/(X^2+X+1)$ et $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$.

   $\longrightarrow$ Nombre de polynômes irréductibles sur $\mathbb{F}_q$.

   $\longrightarrow$ Algorithme de Berlekamp.

   $\longrightarrow$ Irréductibilité des polynômes cyclotomiques.

117. **Algèbre des polynômes à $n$ indéterminées. Polynômes symétriques. Applications.**
   - La leçon ne peut se concentrer uniquement sur les aspects formels ni sur les polynômes symétriques.
   - Les aspects arithmétiques ne doivent pas être négligés.
   - Le théorème fondamental sur la structure des polynômes symétriques et vrai sur $\mathbb{Z}$. L'algorithme peut être présenté sur un exemple.
   - Il est indispensable de savoir montrer que le lieu des zéros d'un polynôme non nul de $\mathbb{R}[X_1, \ldots, X_n]$ est d'intérieur vide dans $\mathbb{R}^n$.
   - Les applications aux quadriques, aux relations racines coefficients ne doivent pas être négligées. On peut faire agir le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ sur les polynômes de degré inférieur à 2.
   - Il faut connaître la structure de l'anneau des polynômes symétriques et quelques critères de divisibilité dans les anneaux pour répondre à l'irréductibilité du déterminant.
   - Connaître la propriété universelle des anneaux de polynômes, savoir l'utiliser pour construire des morphismes d'anneaux ($\mathbb{C}[X,Y]/(Y^2-X) \cong \mathbb{C}[T]$ ou la construction des $k$-morphismes $K \to \bar{k}$ pour une extension algébrique $K$ de $k$).

   $\longrightarrow$ Fonctions polynomiales sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constantes sur les classes de similitude.

   $\longrightarrow$ Théorème de Chevalley-Warning.

   $\longrightarrow$ Théorème de Molien.

146. **Résultant. Applications.**
- Il faut soigner la présentation et ne pas perdre de vue l'application linéaire sous-jacente $(U, V) \mapsto AU + BV$ qui lie le résultant et le PGCD de A et B.
- Le jury ne souhaite pas voir une leçon théorique, ni un cours de géométrie algébrique.

$\longrightarrow$ Théorème fondamental du résultant.

$\longrightarrow$ Loi de réciprocité quadratique via le résultant.