Agrégation de mathématiques - Leçons d'analyse

Adrien Le Boudec

Ce document regroupe par thèmes les leçons d'analyse au programme de la session 2011 de l'agrégation externe de mathématiques. Pour chaque leçon, je donne une liste de remarques extraites des rapports du jury des années précédentes, et j'indique quelques développements possibles. Certaines leçons apparaissent naturellement dans plusieurs thèmes.

Préparer les leçons par paquet permet d'une part d'acquérir une vision assez large de la thématique, et d'autre part d'assimiler rapidement les développements, dans la mesure où certains apparaissent de nombreuses fois au sein d'un même paquet.

Ce document étant isssu de ma préparation au concours, les choix indiqués sont personnels et donc subjectifs, et le lecteur intéressé prendra soin de sélectionner les suggestions de développements qui lui paraissent les plus adéquats.

Table des matières

1 Suites et séries

223. **Convergence des suites numériques. Exemples et applications.**
   - On peut évoquer la construction de $\mathbb{R}$ à partir des suites de Cauchy.
   - Il est important de préciser les vitesses de convergence des exemples proposés.
   - Le jury attend d'autres exemples que $u_{n+1} = \sin(u_n)$.

   $\longrightarrow$ Formule de Stirling et intégrales de Wallis.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de la série harmonique.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + \circ(x^3)$.

224. **Comportement asymptotique de suites numériques. Rapidité de convergence. Exemples.**
   - Ne pas oublier les suites divergentes.

   $\longrightarrow$ Formule de Stirling et intégrales de Wallis.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + \circ(x^3)$.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de la série harmonique.

226. **Comportement d'une suite réelle ou vectorielle définie par une itération $u_{n+1} = f(u_n)$. Exemples.**
   - L'étude des suites homographiques pose problème si on se restreint à $\mathbb{R}$ ou à $\mathbb{C}$. Il est préférable de passer sur la droite projective.
   - Il ne faut pas négliger la recherche préalable de sous-ensembles (intervalles) stables par f.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + \circ(x^3)$.

   $\longrightarrow$ Décomposition de Dunford par la méthode de Newton.

230. **Séries de nombres réels ou complexes. Comportement des restes ou des sommes partielles des séries numériques. Exemples.**
   - L'étude de la convergence d'une série élémentaire par une hiérarchisation des méthodes et par la vérification des hypothèses correspondantes est appréciée par le jury.
   - Ne pas oublier les valeurs absolues quand on énonce un théorème de convergence absolue (même remarque pour l'intégration).
   - Ne pas confondre équivalents et développements asymptotiques.
   - Les meilleurs pourront évoquer les méthodes classiques de renormalisation des séries divergentes.

   $\longrightarrow$ Inégalité de Carleman.

   $\longrightarrow$ Développement asymptotique de la série harmonique.

2 Suites et séries de fonctions

235. **Suites et séries de fonctions intégrables. Exemples et applications.**
   - Savoir illustrer sur des exemples l'utilité de l'hypothèse de domination pour la convergence dominée et les théorèmes de permutations séries-intégrales.
   - Proposer des suites de fonctions qui convergent au sens L^1 sans converger presque partout.
   - Beaucoup trop de candidats pensent que l'étude des séries se limite à l'études des suites, oubliant la structure vectorielle sous-jacente.

   $\longrightarrow$ Calcul de $\Gamma'(1)$.

   $\longrightarrow$ Théorème de Féjer.

   $\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.

241. **Suites et séries de fonctions. Exemples et contre-exemples.**
   - Se limiter à des fonctions à valeurs dans un espace de dimension finie.

   $\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

   $\longrightarrow$ Calcul de $\Gamma'(1)$.

   $\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.

243. **Convergence des séries entières, propriétés de la somme. Exemples et applications.**
   - Cette leçon est trop souvent limitée à la variables complexe (voire réelle), excluant de ce fait les séries matricielles, ou sur une algèbre de Banach.
   - Il est dommage de ne parler que de la dérivabilité par rapport à une variable réelle quand on énonce ou utilise ensuite ces résultats sur les fonctions holomorphes.

   $\longrightarrow$ Nombre de partitions d'un ensemble à n éléments.

   $\longrightarrow$ Image de l'exponentielle.

246. **Séries de Fourier. Exemples et applications.**
   - Les différents types de convergence (L^2, Féjer, Dirichlet ...) doivent être connus.
   - Une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux n'est pas nécessairement continue.
   - Dans le cas d'une fonction continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on peut conclure la convergence normale de la série de Fourier sans invoquer le théorème de Dirichlet.
   - Cette leçon ne doit pas se réduire à un cours abstrait sur les coefficients de Fourier.

   $\longrightarrow$ Théorème de Féjer.

   $\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.

3 Leçons topologiques

202. **Exemples de parties denses et applications.**

$\longrightarrow$ Fonctions polynomiales sur $\mathrm{M}_n(\mathbb{C})$ constantes sur les classes de similitude.
$\longrightarrow$ Théorème de Stone-Weierstrass via les polynômes de Bernstein.
$\longrightarrow$ Prolongement des applications uniformément continues et théorème de Plancherel.

203. **Utilisation de la notion de compacité.**

- Confusion entre la notion de compacité et l'utilisation de la compacité.
- Il est important de ne pas concentrer la leçon sur la compacité générale, sans présenter des exemples significatifs d'utilisation (Stone-Weierstrass, point fixe, voire étude qualitative d'équations différentielles, etc).
- On ne peut pas proposer en développement des théorèmes de caractérisation de la compacité. A contrario, le théorème de Stone-Weierstrass par exemple trouve largement sa place dans cette leçon.
- Dans cette leçon, il est souhaitable de présenter un théorème utilisant la méthode diagonale. Les candidats n'ont que l'embarras du choix : théorème d'Ascoli, de Montel, compacité faible séquentielle de la boule unité d'un espace de Hilbert, etc.

$\longrightarrow$ Sous-groupes compacts de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
$\longrightarrow$ Théorème de Stone-Weierstrass via les polynômes de Bernstein.
$\longrightarrow$ Équivalence des normes en dimension finie.

204. **Connexité. Exemples et applications.**

- Il est important de présenter des résultats naturels dont la démonstration utilise la connexité.
- Bien distinguer sur des exemples, connexité et connexité par arcs.

$\longrightarrow$ Simplicité de $\mathrm{SO}(3)$.
$\longrightarrow$ Image de l'exponentielle.
$\longrightarrow$ Théorème de Brouwer en dimension 2.

4 Calcul différentiel

214. **Théorème d'inversion locale, théorème des fonctions implicites. Exemples et applications.**
   - On attend des applications en géométrie différentielle (notamment dans la formulation des multiplicateurs de Lagrange). Rappelons que les sous-variétés sont au programme.

   $\longrightarrow$ Image de l'exponentielle.

   $\longrightarrow$ Théorème des extrema liés.

   $\longrightarrow$ Théorème de von Neumann.

215. **Applications différentiables définies sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Exemples et applications.**
   - Il faudrait que les candidats à l'Agrégation sachent que les différentielles d'ordre supérieur $d^k f(a)$ définissent des applications $k-$linéaires (sur quel espace ?)
   - Il est judicieux que les candidats aient une vision à peu près claire de ce qu'est la différentielle d'une fonction et soient capables de définir le notion de fonctions de classe $\mathcal{C}^k$. Il faut savoir si une fonction dont les dérivées partielles sont continues est différentiable, et il faut surtout savoir calculer sur des exemples simples la différentielle d'une fonction.
   - Les exemples annoncés par le candidat doivent non seulement illustrer les notions présentées, mais aussi pouvoir être expliqués par le candidat. Par exemple certains donnent une formule pour la différentielle de l'inversion d'une matrice sans pouvoir la retrouver.
   - Il est surprenant de voir un candidat incapable de déterminer l'espace tangent à une courbe paramétrée.

   $\longrightarrow$ Image de l'exponentielle.

   $\longrightarrow$ Théorème des extrema liés.

   $\longrightarrow$ Théorème de von Neumann.

217. **Sous-variétés de $\mathbb{R}^n$. Exemples.**
   - Le jury attend une leçon concrète, montrant une compréhension géométrique locale. Aucune notion globale n'est exigible, ni de notion de variété abstraite.
   - Le candidat doit pouvoir être capable de donner plusieurs représentations locales (paramétriques, équations...) et d'illustrer la notion d'espace tangent sur des exemples classiques.
   - Le jury invite les candidats à réfléchir à la pertinence de l'introduction de la notion de sous-variété.
   - En ce qui concerne les surfaces de $\mathbb{R}^3$, les candidats sont invités à réfléchir aux notions de formes quadratiques fondamentales et à leurs interprétations géométriques.
   - Le théorème des extrema liés peut être évoqué dans cette leçon.
   - Les groupes classiques donnent des exemples utiles de sous-variétés.

   $\longrightarrow$ Théorème de von Neumann.

   $\longrightarrow$ Théorème des extrema liés.

218. **Applications des formules de Taylor.**
   - Au hit parade des formules de Taylor, c'est Taylor-Young qui vient en tête dans l'esprit des candidats, alors que cela devrait être Taylor avec reste intégral !
   - Il faut connaître sans hésitation les formules de Taylor des polynômes et certains développements très classiques. Il y a des applications en probabilités (théorème central limite) et géométrie. On peut penser par exemple à la méthode de Laplace, du col, de la phase stationnaire ou aux inégaliés $\left\|f^{(k)}\right\| \leq 2^{\frac{k(n-k)}{2}} \|f\|^{1-k/n} \left\|f^{(n)}\right\|^{k/n}$.

– Ne pas oublier les formules avec reste intégral.
– Il est absurde de vouloir donner une formule de Taylor dans un cadre général, sans être capable d'expliciter la dite formule pour des fonctions numériques d'une variable réelle, ou d'utiliser les formules de Taylor pour calculer la tangente à une courbe.
– On fera attention au fait que les développements doivent faire intervenir les formules de Taylor de manière significative.
– On soignera particulièrement le choix des développements.

$\longrightarrow$ Développement asymptotique de $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $f(x) = x - ax^2 + bx^3 + \circ(x^3)$.
$\longrightarrow$ Lemme de Morse.

219. **Problèmes d'extremums.**
– Bien faire la différence entre propriétés locales (caractérisation d'un extrémum) et globales (existence).

$\longrightarrow$ Théorème du minimax.
$\longrightarrow$ Théorème des extrema liés.

5 Équations différentielles

220. **Équations différentielles $X' = f(t, X)$. Exemples d'études qualitatives des solutions.**
   - Le lemme de Grönwall semble trouver toute sa place dans cette leçon mais est rarement énoncé.
   - L'utilisation du théorème de Cauchy-Lipschitz doit pouvoir être mise en oeuvre sur des exemples concrets.
   - Les études qualitatives doivent être préparées et soignées.
   - Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner une fonction à valeurs vectorielles.

   $\longrightarrow$ Théorème de Cauchy-Lipschitz global.

   $\longrightarrow$ Étude des zéros d'une solution d'une équation différentielle.

   $\longrightarrow$ Théorème de Liapunov.

221. **Équations différentielles linéaires. Systèmes d'équations différentielles linéaires. Exemples et applications.**
   - Le cas des systèmes à coefficients constants fait appel à la réduction des matrices qui doit être connue et pratiquée. L'utilisation des exponentielles de matrices doit pouvoir s'expliquer.
   - Dans le cas général on peut évoquer les généralisations de l'exponentielle (résolvante) via les intégrales itérées.

   $\longrightarrow$ Théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

   $\longrightarrow$ Étude des zéros d'une solution d'une équation différentielle.

   $\longrightarrow$ Trajectoire d'une particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

6 Fonctions

201. **Espaces de fonctions. Exemples et applications.**
   – Leçon de synthèse qui a permis à de très bons candidtas de faire un exposé parfois brillant. Bien entendu, l'exhaustivité est à proscrire, le candidat doit choisir les thèmes et les espaces fonctionnels dont il souhaite présenter les propriétés.
   – Le théorème d'Ascoli est souvent présenté pour des espaces $\mathcal{C}(X, Y)$ où X, Y sont des espaces métriques compacts et les candidats sont bien embarassés lorqu'on leur demande ce qu'il en est de $\mathcal{C}(X, \mathbb{R})$. Il est bon également de citer des applications de ce théorème fondamental, par exemple concernant les opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, etc.
   – Pour la caractérisation du dual de L^p, les candidats se contentent de $1 \leq p \leq 2$, on ne peut ignorer le cas $2 \leq p < \infty$.
   – À propos des exemples d'espaces fonctionnels, qui apparaissent dans de nombreuses leçons, il est suggéré d'examiner l'espace des séries de Taylor absolument convergentes (copie de ℓ^1), qui fournit un exemple simple d'algèbre de Banach de dimension infinie, pourvue de propriétés remarquables.

   $\longrightarrow$ Théorème de Stone-Weierstrass via les polynômes de Bernstein.

   $\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

   $\longrightarrow$ Automorphismes du disque unité.

228. **Continuité et dérivabilité des fonctions réelles d'une variable réelle. Exemples et contre-exemples.**
   – Un candidat qui indique dans son plan que l'ensemble des fonctions continues nulle-part dérivables contient un G_δ-dense de $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, doit pouvoir donner une telle fonction, ou au moins indiquer le principe de sa construction.
   – Un plan découpé en deux parties (1. Continuité, 2. Dérivabilité) n'est pas le plus adapté.
   – Certains développements intéressants mais techniques, comme la construction d'une fonction continue partout non dérivable, ou le théorème de Balagner-Colominas, sont à déconseiller fortement aux candidats moyens, et peuvent aboutir à des oraux globalement catastrophiques.
   – Les candidats font beaucoup trop confiance à leur mémoire et pas assez à leur compréhension, ce qui leur vaut de rester embourbés au milieu d'un développement ambitieux, par exemple théorème de Montel, ou bien différentielle isométrique en tout point implique isométrique pour l'application elle-même.
   – Les applications du théorème d'Ascoli (par exemples aux opérateurs intégraux à noyau continu, le théorème de Peano, etc.) sont les bienvenues.

   $\longrightarrow$ Théorème de Stone-Weierstrass via les polynômes de Bernstein.

   $\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

229. **Fonctions monotones. Fonctions convexes. Exemples et applications.**
   – Il est indispensable d'expliquer clairement les relations entre monotonie et convexité.
   – Les candidtas sont invités à réfléchir à l'incidence de ces notions en théorie des probabilités.
   – La dérivabilité presque partout des fonctions monotones est un résultat important et difficile.
   – Le jury souhaiterait que les candidats illustrent leurs propos sur les fonctions convexes par des dessins clairs.
   – Il n'est pas déraisonnable de parler de fonctions à variation bornée.
   – Le théorème sur l'existence d'une limite (à gauche ou à droite) d'une fonction monotone est souvent mal énoncé.

– Les propriétés de dérivabilité des fonctions convexes sont en général mal connues.
– Un développement souvent proposé concerne les inégalités de Hölder et de Minkowski pour des familles finies de réels, alors qu'il est plus simple (et plus général) de traiter le cas de fonctions mesurables positives. La signification topologique de ces inégalités est rarement expliquée, ceci est regrettable. Ce développement, relativement modeste, pourrait être étoffé en montrant comment ces inégalités permettent d'exhiber d'autres fonctions convexes, par exemple la convexité logarithmique de la fonction Γ.

$\longrightarrow$ Caractérisation de la fonction Γ.

$\longrightarrow$ Inégalité de Carleman.

234. **Espaces $\mathbf{L}^p$, $1 \leq p \leq \infty$.**
– Le jury a apprécié les candidats sachant montrer qu'avec une mesure finie $\mathrm{L}^2 \subset \mathrm{L}^1$ (ou plus généralement $\mathrm{L}^p \subset \mathrm{L}^q$ dès que $p \geq q$).
– Il est important de pouvoir justifier l'existence de produits de convolution (L^1 avec L^1 par exemple).

$\longrightarrow$ Théorème de Fischer-Riesz.

$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

239. **Fonctions définies par une intégrale dépendant d'un paramètre. Exemples et applications.**

$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.

$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

$\longrightarrow$ Prolongement de la fonction ζ.

240. **Transformation de Fourier, produit de convolution. Applications.**
– Cette leçon ne peut se résumer à une collection de relations algébriques (analyse algébrique de la transformée de Fourier). Elle nécessite, pour s'inscrire dans le contexte de l'analyse, une étude minutieuse et une réflexion sur les hypothèses et les définitions des objets manipulés.
– L'extension de la transformée de Fourier aux distributions tempérées trouvera sa place ici.
– Si l'équation de la chaleur (en dimension 1) a pour origine la physique, sa résolution mathématique via la transformation de Fourier ne dispense pas le candidat de conserver une certaine rigueur mathématique. La validité de la formule $\mathcal{F}(f')(x) = ix\mathcal{F}(f)(x)$, l'existence du produit de convolution doivent être convenablement circonscrits.

$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.

245. **Fonctions holomorphes et méromorphes sur un ouvert de $\mathbb{C}$. Exemples et applications.**
– Les conditions de Cauchy-Riemann doivent être parfaitement connues et l'interprétation de la différentielle en tant que similitude directe doit être comprise.
– La notation $\int_\gamma f(z)\mathrm{d}z$ a un sens précis, qu'il faut savoir expliquer. Ne pas confondre $\mathrm{d}z$ et $\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \frac{i}{2}\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}\bar{z}$.
– Par ailleurs il faut connaître la définition d'une fonction méromorphe (l'ensemble des pôles doit être une partie fermée discrète) !
– Des candidats ont montré une perception limitée des rapports entre holomorphie, conformité et différentiabilité. Ils ont eu alors des difficultés pour prouver que toute fonction holomorphe est ouverte dès que sa dérivée ne s'annule pas sur le domaine de définition.

$\longrightarrow$ Automorphismes du disque unité.

$\longrightarrow$ Prolongement de la fonction ζ.

7 Distributions

254. **Espaces de Schwartz et distributions tempérées.**

$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.
$\longrightarrow$ Exemples de calculs de transformées de Fourier de distributions.

255. **Dérivation au sens des distributions. Exemples et applications.**

$\longrightarrow$ Exemples de calculs de transformées de Fourier de distributions.
$\longrightarrow$ Formule des sauts et application.

256. **Transformation de Fourier dans $\mathbf{S}(\mathbb{R}^d)$ et $\mathbf{S}'(\mathbb{R}^d)$.**

$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.
$\longrightarrow$ Exemples de calculs de transformées de Fourier de distributions.

8 Espaces vectoriels normés

208. **Espaces vectoriels normés, applications linéaires continues. Exemples.**
   - La justification de la compacité de la boule unité en dimension finie doit être donnée.
   - Lister tous les théorèmes de Banach ne constitue pas un test très probant, il serait plus intéressant de se limiter à quelques énoncés en les illustrant par des exemples significatifs, par exemples dans la théorie des séries de Fourier.

   $\longrightarrow$ Équivalence des normes en dimension finie.

   $\longrightarrow$ Racine carrée d'un opérateur strictement accrétif.

213. **Espaces de Hilbert. Bases hilbertiennes. Exemples et applications.**
   - Il est important de faire la différence entre base algébrique et base hilbertienne.
   - Il faut connaître quelques critères simples pour qu'une famille orthogonale forme une base hilbertienne.
   - Le théorème de projection sur les convexes fermés (ou sev fermé) est souvent mentionné. En revanche la façon élémentaire de construire le projeté en dimension finie semble inconnue de nombreux candidats.
   - Cette leçon permet de parler de polynômes orthogonaux et de donner des exemples de bases hilbertiennes dans des espaces L^2, mais les candidats ont bien du mal à en déduire des bases hilbertiennes de $L^2(\mathbb{R})$.
   - Les candidats doivent s'intéresser au sens des formules

     $$x = \sum_{n \geq 0} (x, e_n) e_n, \quad \|x\|^2 = \sum_{n \geq 0} (x, e_n)^2$$

     en précisant les hypothèses sur la famille $(e_n)_n$ et en justifiant la convergence.

   $\longrightarrow$ Racine carrée d'un opérateur strictement accrétif.

   $\longrightarrow$ Méthode de Gauss.

   $\longrightarrow$ Théorème du point fixe de Browder.

9 Approximation

232. **Méthodes d'approximation des solutions d'une équation $F(X) = 0$. Exemples.**
   - Le jury attire l'attention sur le fait que X peut désigner un vecteur.
   - Les candidats présentent souvent des résultats tels que la méthode de Newton avec un jeu d'hypothèses correct mais qui ne correspond pas à l'exemple choisi. Cela provient souvent du fait que les hypothèses présentées sont mal adaptées à des applications pratiques.
   - Quelquefois, cf $x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$, la dérivée de $\dfrac{u}{v}$ se comprend mieux en l'écrivant $\dfrac{u'}{v} - u \times \dfrac{v'}{v^2}$.

   $\longrightarrow$ Méthode du gradient.

   $\longrightarrow$ Méthode de Newton.

238. **Méthodes de calcul approché d'intégrales et d'une solution d'une équation différentielle.**
   - Il faut connaître les majorations d'erreurs de chaque méthode proposée et connaître l'origine de ces majorations.

   $\longrightarrow$ Noyau de Peano d'une méthode numérique.

   $\longrightarrow$ Méthode de Gauss.

10 Probabilités

242. **Utilisation en probabilités de la transformation de Fourier ou de Laplace et du produit de convolution.**

249. **Suites de variables de Bernoulli indépendantes.**

250. **Loi des grands nombres. Théorème de la limite centrale. Applications.**

251. **Indépendance d'événements et de variables aléatoires. Exemples.**

252. **Loi binomiale. Loi de Poisson. Applications.**

11 Autres

205. **Espaces complets. Exemples et applications.**
   – Le théorème de Baire trouvera évidemment sa place, mais il faut l'illustrer par des applications.

   $\longrightarrow$ Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
   $\longrightarrow$ Prolongement des applications uniformément continues et théorème de Plancherel.
   $\longrightarrow$ Racine carrée d'un opérateur strictement accrétif.
   $\longrightarrow$ Théorème du point fixe de Browder.

206. **Théorèmes de point fixe. Exemples et applications.**
   – Les applications aux équations différentielles sont importantes. Il faut préparer des contre-exemples pour illustrer la nécessité des hypothèses.
   – Le théorème de Peano est parfois présenté comme application du théorème de Schauder. Présenter un tel développement lorsqu'on a aucune idée de la démonstration des théorèmes d'Ascoli, Brouwer et Schauder est quelque peu génant. Signalons que la méthode très ingénieuse (et simple !) de Carathéodory permet d'obtenir le résultat à l'aide du seul théorème d'Ascoli.

   $\longrightarrow$ Théorème de Brouwer en dimension 2.
   $\longrightarrow$ Théorème du point fixe de Browder.
   $\longrightarrow$ Théorème de Cauchy-Lipschitz global.
   $\longrightarrow$ Racine carrée d'un opérateur strictement accrétif.

207. **Prolongement de fonctions. Exemples et applications.**
   – Les questions liées au prolongement analytique font partie de la leçon.
   – Le théorème de Hahn-Banach (en dimension infinie) n'est pas une nécessité absolue pour faire une leçon de niveau acceptable, surtout quand on manque de recul sur la thématique.
   – En ce qui concerne le théorème de prolongement des applications uniformément continues, on ignore bien souvent la version linéaire, alors qu'elle peut être l'objet de développements intéressants, tel que le théorème de Plancherel par exemple.
   – Quant au prolongement de la fonction Gamma, il serait bon de savoir que la relation fonctionnelle permet de le faire en quelques lignes.

   $\longrightarrow$ Théorème de Hahn-Banach en dimension finie.
   $\longrightarrow$ Prolongement des applications uniformément continues et théorème de Plancherel.
   $\longrightarrow$ Prolongement de la fonction ζ.

216. **Etude métrique des courbes. Exemples.**

236. **Illustrer par des exemples quelques méthodes de calcul d'intégrales de fonctions d'une ou plusieurs variables réelles.**
   – Il faut savoir énoncer correctement le théorème de changement de variable en dimension n et l'appliquer.
   – La méthode des résidus ne doit pas être oubliée.
   – Il est important de montrer, sur des exemples, l'interaction entre le calcul d'intégrales multiples et d'intégrales simples.

$\longrightarrow$ Formule de Stirling et intégrales de Wallis.
$\longrightarrow$ Calcul de $\Gamma'(1)$.
$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

247. **Exemples de problèmes d'interversion de limites.**

$\longrightarrow$ Formule sommatoire de Poisson et application à la fonction théta.
$\longrightarrow$ Calcul de $\Gamma'(1)$.
$\longrightarrow$ Inversion de Fourier sur l'espace de Schwartz.

253. **Utilisation de la notion de convexité en analyse.**

$\longrightarrow$ Théorème du point fixe de Browder.
$\longrightarrow$ Caractérisation de la fonction Γ.