Groupes métabéliens, fonction de Dehn et groupes de Baumslag-Solitar

Adrien Le Boudec

sous la direction d'Yves de Cornulier

Résumé

Le but de ce travail est d'étudier l'article *Metabelian groups with quadratic Dehn function and Baumslag-Solitar groups*, dont le résultat principal est de montrer que certains groupes métabéliens, contruits à partir d'une action sur un produit de corps locaux, ont une fonction de Dehn quadratique.

En application, il est prouvé que les groupes de Baumslag-Solitar $\mathrm{BS}(1,n)$, qui ont une fonction de Dehn exponentielle, peuvent être plongés dans un groupe ayant une fonction de Dehn quadratique. Ce résultat est optimal dans le sens où ils ne peuvent pas être plongés dans un groupe dont la fonction de Dehn est linéaire, et que toute fonction de Dehn sous-quadratique est linéaire.

Il est également prouvé que les groupes de Baumslag Λ_p ont une fonction de Dehn quadratique.

Table des matières

1 Présentation d'un groupe **2**
1.1 Définitions . . . 2
1.2 Groupes de présentation finie . . . 3
1.3 Groupes de présentation compacte . . . 3

2 Géométrie à grande échelle **7**
2.1 Quasi-isométries . . . 7
2.2 Simple connexité à grande échelle . . . 8
2.3 Complexe de Cayley . . . 9

3 Fonction de Dehn **11**
3.1 Fonction de Dehn d'une présentation et lien avec le problème du mot 11
3.2 Fonction de Dehn d'un groupe . . . 12
3.3 Exemples élémentaires de calcul de fonctions de Dehn . . . 14

4 Groupes de Baumslag-Solitar **20**
4.1 Définition . . . 20
4.2 Construction d'un sur-groupe de $\mathrm{BS}(1, n)$ . . . 21

5 Théorème principal **23**
5.1 Énoncé . . . 23
5.2 Application au groupe Γ_n . . . 24
5.3 Application aux groupes de Baumslag Λ_p . . . 26
5.4 Ensemble de mots efficace . . . 29
5.5 Preuve du théorème . . . 31

Chapitre 1

Présentation d'un groupe

1.1 Définitions

Rappelons qu'un monoïde est un ensemble muni d'une multiplication associative admettant un élément neutre. Si S est un ensemble quelconque, le monoïde libre sur S est par définition l'ensemble $W(S)$ des suites finies d'éléments de S, la multiplication étant la juxtaposition et l'élément neutre la suite vide.

Définition 1.1.1. Si $(G_i)_{i\in I}$ est une famille de groupes, soit $S = \sqcup_{i\in I} G_i$ leur réunion disjointe, et soit $\sim$ la relation d'équivalence sur $W(S)$ engendrée par $we_iw' \sim ww'$ dès que e_i est l'élément neutre de G_i, et $wabw' \sim wcw'$ dés que $a, b, c \in G_i$ vérifient $ab = c$. L'ensemble quotient $W(S)/\sim$ est alors muni d'une structure de groupe, on l'appelle produit libre des groupes $(G_i)_{i\in I}$.

Définition 1.1.2. Soit S un ensemble. Le groupe libre engendré par S est le produit libre d'une famille de copies du groupe $\mathbb{Z}$ indexée par S, on le note F_S. On identifie chaque $s \in S$ avec le générateur $+1$ de la copie de $\mathbb{Z}$ correspondant à s, de sorte que S soit un sous-ensemble de F_S, ce qui permet d'identifier F_S à l'ensemble des mots réduits, c'est-à-dire sans occurrence de ss^{-1} pour $s \in S$, sur $S \cup S^{-1}$.

Définition 1.1.3. Soit G un groupe et soit S un ensemble de générateurs. On définit sur G une distance, appelée métrique des mots, par la formule

$$d_S(g, h) = \min\left\{n \in \mathbb{N} \mid \exists s_1, \dots, s_n \in S^{\pm 1},\ g = hs_1 \dots s_n\right\}.$$

On note $|g|_S$ la longueur de $g \in G$, c'est-à-dire la distance de g à e_G.

Définition 1.1.4. Une présentation d'un groupe G est la donnée d'un ensemble S et d'une surjection $\Pi : F_S \to G$, où F_S désigne le groupe libre sur S, et d'un sous-ensemble R du noyau $N = \ker \Pi$ qui engendre N en tant que sous-groupe distingué de F_S. On dispose alors d'une suite exacte courte

$$1 \longrightarrow \langle\langle R \rangle\rangle \longrightarrow F_S \longrightarrow G \longrightarrow 1,$$

et on écrit $G = \langle S, R \rangle$. Les éléments de S sont les générateurs et les éléments de R sont les relateurs.

1.2 Groupes de présentation finie

Définition 1.2.1. Une présentation $G = \langle S, R\rangle$ est dite bornée si les éléments de R sont de longueur bornée relativement à la distance définie par S.

Remarque 1.2.2. Si de plus S est fini, alors R est également fini et on parle de présentation finie : $G = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m\rangle$.

Proposition 1.2.3. *Soit $G = \langle S, R\rangle$ une présentation finie. Alors pour tout système fini T de générateurs, le groupe G est finiment présenté par T.*

Preuve. Si $T \subset S$ alors écrivons chaque $s \in S \setminus T$ comme un mot en les éléments de T, ce qui est possible puisque T engendre G, et remplaçons chaque occurence de $s = t_1 \dots t_r$ dans un relateur par le mot $t_1 \dots t_r$. On obtient ainsi une présentation finie de G avec T pour système de générateurs. Si $S \subset T$ alors pour chaque $t \in T \setminus S$, on écrit $t = s_1 \dots s_r$ et on ajoute $r = t^{-1}s_1 \dots s_r$ au système de relateurs R. Comme T est fini, on garde un système de relateurs fini. Dans le cas général, on considère le système fini de générateurs $S \cup T$. D'après le second cas, G est finiment présenté par $S \cup T$, et puisque $T \subset S \cup T$ on peut appliquer le premier cas pour obtenir que G est finiment présenté par T. □

Remarque 1.2.4. L'hypothèse de finitude pour T est nécessaire. En effet, on peut montrer que le groupe $\mathbb{Z}$, qui est finiment présenté par $\{1\}$, n'est pas finiment présenté par le système de générateurs $\{n! \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Corollaire 1.2.5. *Soit G_0 un groupe de présentation finie et soit $\pi : G_0 \twoheadrightarrow G$ un morphisme de groupes surjectif. Alors G est de présentation finie si et seulement si $K = \ker \pi$ est engendré en tant que sous-groupe distingué par un nombre fini d'éléments.*

Preuve. Soit $G_0 = \langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m\rangle$ une présentation finie. Si $K = \langle\langle r'_1, \dots, r'_k\rangle\rangle$ alors $\langle s_1, \dots, s_n \mid r_1, \dots, r_m, r'_1, \dots, r'_k\rangle$ est une présentation finie de G. Réciproquement, soit L le noyau de la flèche

$$F_S \overset{p}{\twoheadrightarrow} G_0 \overset{\pi}{\twoheadrightarrow} G.$$

Si G est de présentation finie alors d'après la proposition 1.2.3, L est engendré en tant que sous-groupe distingué par un nombre fini d'éléments, c'est donc également le cas de $K = p(L)$. □

1.3 Groupes de présentation compacte

1.3.1 Propriétés

Définition 1.3.1. Soit G un groupe topologique. On dit que G est de présentation compacte si G est séparé et s'il existe une présentation bornée $\langle S, R\rangle$ de G avec S compact.

Lemme 1.3.2. *Soit G un groupe localement compact et soit S un ensemble de générateurs compact qui est symétrique et qui contient 1. Alors pour tout ensemble de générateurs compact T, il existe un entier n tel que $T \subset S^n$, où S^n désigne l'ensemble des produits de n éléments de S.*

Preuve. Par hypothèse, $G = \cup_{n\geq 1} S^n$ et chaque S^n est fermé car S est compact. D'après le théorème de Baire, qui affirme que tout espace topologique localement compact est de Baire, il existe un entier n tel que S^n ne soit pas d'intérieur vide. Si x est dans l'intérieur de S^n, alors x^{-1} aussi, et donc 1 est dans l'intérieur de S^{2n}. Ainsi, pour tout entier k, S^k est inclus dans l'intérieur de S^{2n+k}. On en déduit donc que les intérieurs des S^{2n+k} recouvrent G et donc en particulier T. Par compacité, on peut extraire de ce recouvrement d'ouverts un sous-recouvrement fini. Enfin, l'hypothèse que $1 \in S$ rend croissante la suite des $(S^k)_k$. Comme T est inclus dans une réunion finie d'entre eux, il est inclus dans l'un d'entre eux, ce qui conclut. □

Proposition 1.3.3. *Soit G un groupe localement compact de présentation compacte. Alors G est présenté de manière compacte par tout sous-ensemble compact T de générateurs.*

Preuve. Le schéma de la preuve est le même que dans le cas d'une présentation finie. Soit $G = \langle S, R\rangle$ une présentation bornée avec S compact. Le groupe G est présenté de manière compacte par T si et seulement s'il est présenté de manière compacte par $T \cup T^{-1} \cup \{1\}$, on peut donc supposer que T est symétrique et contient 1. Quitte à changer S en $S \cup S^{-1} \cup \{1\}$ et à garder le même R, on peut également supposer que S est symétrique et contient 1. D'après le lemme précédent, on dispose d'entiers m, n tel que $S \subset T^n$ et $T \subset S^m$. Si $T \subset S$, écrivons chaque $s \in S \setminus T$ sous la forme $s = t_1 \dots t_n$ et remplaçons chaque occurrence de s dans un relateur par le mot $t_1 \dots t_n$. On obtient ainsi une présentation de G dont l'ensemble de relateurs reste borné. Si $S \subset T$, pour chaque $t \in T \setminus S$, on écrit $t = s_1 \dots s_m$ et on ajoute $r = t^{-1}s_1 \dots s_m$ au système de relateurs R. On garde ainsi un ensemble borné de relateurs. Dans le cas général, on prend comme ensemble de générateurs $S \cup T$, qui reste compact, et on applique successivement les deux cas précédents. □

Remarque 1.3.4. L'hypothèse de locale compacité pour G est nécessaire. En effet, fixons un nombre premier p et munissons $\mathbb{Z}$ de la topologie p-adique. Soit $u_n = n!$ pour $n \in \mathbb{N}$ et soit $u_\infty = 0$. $T = \{u_n \mid n \leq \infty\}$ est un sous-ensemble compact tel que $\mathbb{Z}$ n'est pas de présentation bornée pour T, alors que $\mathbb{Z}$ est de présentation bornée pour $\{1\}$.

Corollaire 1.3.5. *Soit G_0 un groupe localement compact de présentation compacte et soit $\pi : G_0 \twoheadrightarrow G$ un morphisme de groupes surjectif. Alors G est de présentation compacte si et seulement si $K = \ker \pi$ est engendré en tant que sous-groupe distingué par un ensemble d'éléments de longueur bornée.*

Preuve. Identique au cas d'un groupe de présentation finie. □

1.3.2 Un exemple de groupe qui n'est pas de présentation compacte

On étudie dans ce paragraphe le groupe $(\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p) \rtimes \mathbb{Z}$, dont on montre qu'il n'est pas de présentation compacte. Pour cela on a besoin de la notion d'extension HNN topologique.

Définition 1.3.6. Soit $G = \langle S, R \rangle$ un groupe topologique séparé, soient H_1, H_2 deux sous-groupes ouverts de G et soit $\phi : H_1 \to H_2$ un isomorphisme. On définit l'extension $\mathrm{HNN}(G, H_1, H_2, \phi)$ par la présentation

$$\Gamma = \left\langle S, t \mid R, tht^{-1} = \phi(h) \ \forall h \in H_1 \right\rangle .$$

Définition 1.3.7. Si X est un espace topologique, on appelle net sur X toute fonction (x_i) de I dans X, où I est un ensemble muni d'un préordre filtrant.

Remarque 1.3.8. Avec les notations précédentes, on définit une topologie sur Γ en disant qu'un net (g_i) dans Γ converge vers $g \in \Gamma$ si pour tout sous-groupe ouvert L de G, ultimement $g^{-1}g_i \in L$.

Lemme 1.3.9. *La topologie définie sur Γ en fait un groupe topologique séparé, et le plongement de G dans Γ est un homéomorphisme entre G et un sous-groupe ouvert de Γ. En particulier, si G est localement compact alors Γ est localement compact.*

Preuve. Voir [6]. □

Proposition 1.3.10. *Si l'extension* HNN *est non ascendante, c'est-à-dire si aucun des deux sous-groupes H_1 et H_2 n'est inclus dans l'autre, alors elle contient un sous-groupe libre non abélien.*

Preuve. L'idée de la preuve est la suivante. On commence par faire agir l'extension HNN sans inversion sur un arbre, c'est-à-dire qu'une arête ne peut pas être envoyée sur la même en la renversant, avec pour domaine fondamental un sommet de stabilisateur G et une arête (émanant de ce sommet) de stabilisateur H_1. On trouve ensuite deux éléments hyperboliques, c'est-à-dire deux éléments qui ne fixent ni arête ni sommet, d'axes disjoints, où l'axe d'un élément hyperbolique désigne l'unique droite de l'arbre qu'il fixe. Le sous-groupe engendré par deux tels éléments est alors libre (voir par exemple [10]). □

Proposition 1.3.11. *Le groupe $G = (\mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p) \rtimes \mathbb{Z}$, où l'élément 1 de $\mathbb{Z}$ agit sur le premier facteur par multiplication par p et sur le second par multiplication par p^{-1}, n'est pas de présentation compacte.*

Preuve. Ce groupe admet la présentation

$$\begin{aligned} \langle\, Z_1, Z_2, t \mid &\forall x \in Z_1 \ txt^{-1} = x^p,\ \forall y \in Z_2 \ t^{-1}yt = y^p, \\ &\forall x \in Z_1 \ \forall y \in Z_2 \ \forall k, \ell \in \mathbb{N} \ [t^{-k}xt^k, t^\ell y t^{-\ell}] = 1 \,\rangle , \end{aligned}$$

où Z_1 et Z_2 désignent deux copies de $\mathbb{Z}_p$. Soit G_n le groupe obtenu à partir de la présentation précédente en faisant varier les entiers k, ℓ entre 0 et n. En particulier,

$$G_0 = \langle\, Z_1, Z_2, t \mid \forall x \in Z_1\ txt^{-1} = x^p,\ \forall y \in Z_2\ t^{-1}yt = y^p, \\ \forall x \in Z_1\ \forall y \in Z_2\ [x, y] = 1 \,\rangle$$

est une extension HNN de $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ par l'isomorphisme $\mathrm{diag}(p, p^{-1})$ entre les deux sous-groupes ouverts $\mathbb{Z}_p \times p\mathbb{Z}_p$ et $p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$. C'est donc un groupe localement compact de présentation compacte, et par le corollaire 1.3.5 il nous suffit de montrer que le noyau N de $\varphi : G_0 \twoheadrightarrow G$ n'est pas engendré en tant que sous-groupe distingué par un ensemble d'éléments de longueur bornée.

On dispose d'une suite de flèches

$$G_0 \twoheadrightarrow G_1 \twoheadrightarrow \ldots G_n \twoheadrightarrow G_{n+1} \twoheadrightarrow \ldots \twoheadrightarrow G.$$

Pour $n \geq 1$, posons $N_n = \ker(\varphi_n : G_0 \twoheadrightarrow G_n)$, de sorte que N soit la réunion croissante des (N_n). L'intersection de N avec le sous-groupe ouvert $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ de G_0 est réduite à l'identité, ce qui prouve que N est discret, et donc fermé en tant que sous-groupe discret d'un groupe topologique séparé. Ainsi, pour tout entier k, l'intersection de N avec la boule de rayon k, c'est-à-dire l'ensemble des éléments de longueur au plus k respectivement au système de générateurs compact Z_1, Z_2, t ; est l'intersection d'un fermé discret avec un compact, et est donc finie. Il existe donc un entier n_k tel que cet ensemble fini de points soit dans N_{n_k}. On a donc montré que le sous-groupe distingué engendré par tout ensemble dont les éléments sont de longueur borné est inclus dans un certain N_{n_k}. Il nous suffit donc de prouver que tous les N_n sont des sous-groupes stricts de N pour conclure la preuve.

On vérifie facilement dans la présentation définissant G_n que tout relateur pour lequel $(k, \ell) \neq (n, n)$ est redondant, et que le morphisme de groupes

$$\begin{aligned} \psi_n : G_0 &\to G_n \\ x \in Z_1 &\mapsto p^{-n}x \\ y \in Z_2 &\mapsto p^n y \\ t &\mapsto t \end{aligned}$$

est bien défini et est un isomorphisme. Ainsi, par la proposition 1.3.10, chaque G_n contient un sous-groupe libre non abélien, et la flèche $G_n \twoheadrightarrow G$ ne peut être injective. Supposons par l'absurde que $N = N_n$ pour un certain entier n, et soit $y \in \ker(G_n \twoheadrightarrow G)$. Il existe $x \in G_0$ tel que $y = \varphi_n(x)$, et en poussant cette égalité dans G on obtient que $x \in N$. Or, $N = N_n$ par hypothèse et donc $1 = \varphi_n(x) = y$. On a montré que $G_n \twoheadrightarrow G$ est injective, ce qui constitue une contradiction. $\square$

Remarque 1.3.12. Le résultat reste vrai dans le cas d'une action par multiplication par $\mathrm{diag}(p^\alpha, p^{-\beta})$ avec $\alpha, \beta > 0$, et la preuve est identique.

Chapitre 2

Géométrie à grande échelle

2.1 Quasi-isométries

On introduit dans ce paragraphe la notion de quasi-isométrie. L'idée qui nous guide est la suivante. Si l'on place sur une droite du plan euclidien des marqueurs à chaque point entier, alors, vus de très loin, notre ensemble de marqueurs et la droite sont indistinguables. On dira alors que cet ensemble de marqueurs et la droite sont quasi-isométriques.

Définition 2.1.1. Soient (X, d_1), (Y, d_2) deux espaces métriques et soient $\lambda \geq 1$, $\varepsilon \geq 0$. Une application $f : X \to Y$ est un plongement (λ, ε)-quasi-isométrique si pour tous $x_1, x_2 \in X$

$$\frac{1}{\lambda} d_1(x_1, x_2) - \varepsilon \leq d_2(f(x_1), f(x_2)) \leq \lambda d_1(x_1, x_2) + \varepsilon.$$

Si de plus il existe une constante $C \geq 0$ telle que tout point de Y soit à une distance inférieure à C de l'image de f, alors on dit que f est une (λ, ε)-quasi-isométrie, et que l'espace (X, d_1) est quasi-isométrique à l'espace (Y, d_2).

Proposition 2.1.2. *S'il existe une (λ, ε)-quasi-isométrie $f : X \to Y$ alors il existe une (λ', ε')-quasi-isométrie $f' : Y \to X$, $\lambda' \geq 1$, $\varepsilon' \geq 0$, et une constante $k \geq 0$ telles que $d_1((f' \circ f)(x), x) \leq k$ pour tout $x \in X$ et $d_2((f \circ f')(y), y) \leq k$ pour tout $y \in Y$.*

Définition 2.1.3. Une telle application est appelée un quasi-inverse de f.

Preuve. Pour tout $y \in Y$ il existe $x \in X$ tel que $d_1(f(x), y) \leq C$. Posons $f'(y) = x$. Démontrons que f' ainsi définie est bien une quasi-isométrie. Soient $y_1, y_2 \in Y$.

$$\begin{aligned} d_1(f'(y_1), f'(y_2)) &= d_1(x_1, x_2) \\ &\leq \lambda\left(\varepsilon + d_2(f(x_1), f(x_2))\right) \\ &\leq \lambda\left(\varepsilon + d_2(f(x_1), y_1) + d_2(y_1, y_2) + d_2(y_2, f(x_2))\right) \\ &\leq \lambda d_2(y_1, y_2) + \lambda\varepsilon + 2\lambda C, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} d_1(f'(y_1), f'(y_2)) &= d_1(x_1, x_2) \\ &\geq \frac{1}{\lambda}(d_2(f(x_1), f(x_2)) - \varepsilon) \\ &\geq \frac{1}{\lambda}(d_2(y_1, y_2) - d_2(y_1, f(x_1)) - d_2(f(x_2), y_2) - \varepsilon) \\ &\geq \frac{1}{\lambda}d_2(y_1, y_2) - \frac{\varepsilon}{\lambda} - \frac{2C}{\lambda}. \end{aligned}$$

Il suffit donc de prendre $\lambda' = \lambda$ et $\varepsilon' = \lambda\varepsilon + 2\lambda C$.

Si $y \in Y$, la majoration $d_2(f(f'(y)), y) \leq C$ résulte de la définition de f'. Si désormais $x \in X$, on cherche à majorer $d_1((f' \circ f)(x), x)$.

$$\begin{aligned} d_1(f'(f(x)), x) &\leq \lambda\varepsilon + \lambda d_2\left(f(f'(f(x))), f(x)\right) \\ &\leq \lambda\varepsilon + \lambda C \end{aligned}$$

toujours par définition de f'. Il suffit donc de prendre $k = \lambda\varepsilon + \lambda C$. □

Remarque 2.1.4. La proposition précédente affirme que la relation de quasi-isométrie est symétrique, ce qui nous permet de dire que deux espaces métriques sont quasi-isométriques.

Proposition 2.1.5. *La composition d'un plongement (λ, ε)-quasi-isométrique et d'un plongement (λ', ε')-quasi-isométrique est un plongement (μ, ν)-quasi-isométrique, avec $\mu = \lambda\lambda'$ et $\nu = \lambda'\varepsilon + \varepsilon'$. De plus, la composition de deux quasi-isométries est une quasi-isométrie.*

Preuve. Il suffit d'écrire la définition. □

Remarque 2.1.6. Ce résultat signifie que la relation de quasi-isométrie est transitive, et est donc une relation d'équivalence sur la classe des espaces métriques.

Exemple 2.1.7. Tout espace métrique borné est quasi-isométrique à un point. Plus généralement, l'inclusion $Y \hookrightarrow X$ d'un sous-ensemble d'un espace métrique X est une quasi-isométrie si et seulement s'il existe une constante $C \geq 0$ telle que tout point de X se situe à une distance de Y inférieure à C. En particulier, si G est un groupe localement compact et si Γ est un réseau co-compact de G, alors l'inclusion $\Gamma \hookrightarrow G$ est une quasi-isométrie. Par exemple, l'inclusion $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{R}$ est une quasi-isométrie.

2.2 Simple connexité à grande échelle

Définition 2.2.1. Un espace métrique (X, d) est dit géodésique si pour tous $x, y \in X$, il existe un plongement isométrique du segment $[0, d(x, y)]$ dans X envoyant 0 sur x et $d(x, y)$ sur y.

Définition 2.2.2. Soit (X, d) un espace métrique. Un C-chemin dans X de longueur n entre x et y est une suite de points $x = x_0, \dots, x_n = y$ telle que $d(x_i, x_{i+1}) \leq C$ pour tout i. On parle de C-lacet lorsque $x = y$.

Définition 2.2.3. Un espace métrique (X, d) est dit C-géodésique si pour tout entier n et tous $x, y \in X$ à distance au plus n, il existe un C-chemin entre x et y de longueur au plus Cn.

Proposition 2.2.4. *Un espace métrique (X, d) est C-géodésique pour un certain C si et seulement s'il est quasi-isométrique à un espace géodésique. En particulier, le fait d'être quasi-géodésique est invariant par quasi-isométrie.*

Définition 2.2.5. Un espace métrique est dit connexe à grande échelle s'il existe une constante C telle que pour tous $x, y \in X$, il existe un C-chemin entre x et y.

Définition 2.2.6. Dans un espace métrique (X, d), deux lacets $x_0, \dots, x_n$ et $y_0, \dots, y_m$ sont C-homotopes si l'on peut passer de l'un à l'autre en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

i) ajouter un point x entre x_i et x_{i+1} tel que $d(x, x_i) \leq C$ et $d(x, x_{i+1}) \leq C$;

ii) enlever un point x_i dès que $d(x_i, x_{i+2}) \leq C$.

Définition 2.2.7. Un espace métrique est dit simplement connexe à grande échelle s'il est C-géodésique et si tout C-lacet est C-homotope au lacet trivial.

Remarque 2.2.8. On peut également définir la simple connexité à grande échelle par le fait d'être quasi-isométrique à un espace géodésique simplement connexe.

La proposition suivante, qui admet une généralisation aux groupes localement compacts et σ-compacts, établit le lien entre la géométrie à grande échelle du groupe et les notions introduites plus haut.

Proposition 2.2.9. *Soit G un groupe dénombrable muni d'une métrique d invariante à gauche telle que les boules sont finies. Alors :*

i) G est de type fini si et seulement si (G, d) est connexe à grande échelle ;

ii) G est de présentation finie si et seulement si (G, d) est simplement connexe à grande échelle.

2.3 Complexe de Cayley

Proposition 2.3.1. *Soit G un groupe de type fini, et soient S_1 et S_2 deux ensembles finis de générateurs. Alors les distances d_{S_1} et d_{S_2} sont Lipschitz-équivalentes, c'est-à-dire qu'il existe une constante $\lambda \geq 0$ telle que*

$$\frac{1}{\lambda} d_{S_1}(g, h) \leq d_{S_2}(g, h) \leq \lambda d_{S_1}(g, h)$$

pour tous $g, h \in G$.

Preuve. En exprimant chaque lettre d'un système de générateurs en fonction des éléments de l'autre système de générateurs, on voit que la constante

$$\lambda = \max\left(\max_{s\in S_1} |s|_{S_2}, \max_{s\in S_2} |s|_{S_1}\right)$$

convient. □

Remarque 2.3.2. Si deux distances d_1 et d_2 sur X sont Lipschitz-équivalentes alors l'identité Id : $(X, d_1) \to (X, d_2)$ est une quasi-isométrie. La proposition précédente permet donc de parler de la classe de quasi-isométrie d'un groupe de type fini.

Définition 2.3.3. Soit G un groupe et S un ensemble symétrique de générateurs. On définit le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$ comme le graphe dont les sommets sont indexés par les éléments de G et ayant pour ensemble d'arêtes $\{(g, gs)|g \in G, s \in S\}$.

Remarque 2.3.4. Si on donne à chaque arête du graphe la longueur 1 et que l'on munit $\Gamma(G, S)$ de la métrique des chemins, alors l'action du groupe G sur $\Gamma(G, S)$ par multiplication à gauche est une action par isométries.

Définition 2.3.5. On définit le complexe de Cayley $\Gamma(G, S, R)$ d'une présentation $G = \langle S, R\rangle$ comme le complexe polygonal dont le 1-squelette est le graphe de Cayley $\Gamma(G, S)$, et dont les 2-cellules sont des polygônes réguliers ayant pour sommets $g, gs_1, \ldots, gs_{n-1}$, pour tout $g \in G$ et tout $r = s_1 \ldots s_n \in R$ de longueur $n \geq 3$.

Remarque 2.3.6. Munissons chaque n-gone régulier de la distance euclidienne, chaque arête étant de longueur 1. Ceci permet de définir de manière naturelle une distance géodésique comme ceci : si x, y sont dans $\Gamma(G, S, R)$, on considère l'ensemble des suites finies $x_0 = x, \ldots, x_n = y$ de points de $\Gamma(G, S, R)$ tels que x_i et x_{i+1} sont dans un même polygone, et on définit la distance de x à y par

$$d_X(x, y) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n} d(x_i, x_{i+1})\right\},$$

où la borne inférieure est prise sur l'ensemble des telles suites de points de $\Gamma(G, S, R)$.

Proposition 2.3.7. *Le plongement de G dans l'un quelconque de ses complexes de Cayley $\Gamma(G, S, R)$ est un plongement quasi-isométrique. C'est une quasi-isométrie si et seulement si la présentation $\langle S, R\rangle$ est bornée.*

Preuve. Il s'agit clairement d'une application 1-lipschitzienne. Si X désigne le complexe de Cayley, on vérifie sans difficulté que pour tous $g, h \in G$,

$$\frac{1}{\sqrt{2}} d_S(g, h) \leq d_X(g, h),$$

la constante $1/\sqrt{2}$ provenant de la longueur de la diagonale d'un carré de côté de longueur 1. Le plongement est donc bi-lipschitz. De plus,

$$\sup_{x\in X} d_X(x, G) = \sup\left\{\rho_k \,|\, \text{R contient un mot de longueur } k\right\},$$

où ρ_k désigne le rayon du k-gone régulier de côté unité, d'où la seconde assertion. □

Chapitre 3

Fonction de Dehn

3.1 Fonction de Dehn d'une présentation et lien avec le problème du mot

Soit (G, S, R) une présentation, et soient $w, w' \in F_S$. On écrira $w = w'$ si ces deux éléments sont égaux dans F_S et $w \equiv w'$ si les deux mots représentent le même élément dans le groupe G. Exposer précisément le problème du mot nécessite des notions sur les machines de Turing, nous nous contenterons ici d'une définition informelle. Résoudre le problème du mot consiste, étant donné $w, w' \in F_S$, à répondre par un algorithme si oui ou non l'égalité $w \equiv w'$ a lieu dans G. Supposons que $w' = w_1(u_3u_1)w_2$ a été obtenu à partir de $w = w_1u_2^{-1}w_2$ en appliquant le relateur $r = (u_1u_2u_3)^{-1}$. Dans le groupe libre F_S, on a

$$w = w_1u_3u_3^{-1}u_2^{-1}u_1^{-1}u_1w_2 = (x_1rx_1^{-1})w_1u_3u_1w_2 = (x_1rx_1^{-1})w',$$

avec $x_1 = w_1u_3$. Si w'' est obtenu à partir de w' en appliquant un autre relateur r' alors on a une égalité du type $w = (x_1rx_1^{-1})(x_2r'x_2^{-1})w''$. En procédant ainsi, on voit que si le mot w peut être réduit au mot trivial en appliquant N relateurs de R, alors on dispose d'une égalité du type

$$w = \prod_{i=1}^{N} x_ir_ix_i^{-1},$$

avec $x_i \in F_S$, $r_i \in R^{\pm 1}$. On voit donc qu'en attaquant le problème du mot à la main, on essaie de manière implicite d'écrire un mot $w \in F_S$ comme produit de conjugués de relateurs, ce qui souligne le lien avec la définition de fonction de Dehn.

Définition 3.1.1. Soit (G, S, R) une présentation et soit N le noyau du morphisme $F_S \to G$. On définit l'aire algébrique d'un élément $g \in N$ comme étant le minimum des entiers k tels que g est produit de k conjugués de relateurs ou de leurs inverses :

$$a(g) = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid g = \prod_{i=1}^{k} v_ir_i^{\pm 1}v_i^{-1},\ v_i \in F_S,\ r_i \in R \right\}.$$

La fonction de Dehn de la présentation (G, S, R) est définie par

$$\delta(n) = \sup \{a(g) \mid g \in N,\ |g|_S \leq n\} .$$

On prolonge la fonction δ à $\mathbb{R}_{\geq 0}$ en posant $\delta(x) = \delta(\lceil x \rceil)$.

Remarque 3.1.2. Dans le cas d'un groupe localement compact de présentation compacte, il peut arriver que la fonction de Dehn définie comme ci-dessus prenne des valeurs infinies. Cependant, il est prouvé dans [6] qu'on peut toujours trouver une présentation compacte telle que la fonction de Dehn correspondante prenne des valeurs finies.

Remarque 3.1.3. En prolongeant la fonction aire à F_S tout entier par $a(g) = +\infty$ si $g \notin N$, on définit une distance invariante à gauche à valeurs dans $[0, +\infty]$, $c : F_S \times F_S \to [0, +\infty]$, par $c(g, h) = a(g^{-1}h)$. La notion d'aire étant invariante par conjugaison, cette distance est également invariante à droite. On peut voir c comme le coût nécessaire pour passer de g à h.

Définition 3.1.4. Une inégalité isopérimétrique pour la présentation (G, S, R) est la donnée d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ telle que pour tout entier n, $\delta(n) \leq f(n)$.

Le théorème suivant, dont nous ne donnons pas la preuve, précise le lien entre le problème du mot et la fonction de Dehn d'une présentation (voir [3]).

Théorème 3.1.5. *Pour une présentation finie $P = (G, S, R)$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

i) Le problème du mot est résoluble ;

ii) δ_P satisfait une inégalité isopérimétrique $\delta_P \leq f$, où f est une fonction récursive (c'est-à-dire calculable par une machine de Turing) ;

1. δ_P est récursive.

3.2 Fonction de Dehn d'un groupe

Considérons les groupes définis par les présentations $P = \langle x \mid \emptyset \rangle$ et $Q = \langle y, z \mid z \rangle$, qui sont tous deux isomorphes au groupe $\mathbb{Z}$, et calculons les fonctions de Dehn correspondantes. Pour la première, le seul mot réduit qui représente l'élément neutre de $\mathbb{Z}$ est le mot vide, donc $\delta_P(n) = 0$ pour tout entier n. Pour Q, parmi les mots réduits de longueur n qui représentent l'élément neutre de $\mathbb{Z}$, le mot z^n a une aire maximale qui est égale à n, donc $\delta_P(n) = n$. Les fonctions de Dehn de deux présentations d'un même groupe ne sont donc pas égales, ce qui motive la définition suivante.

Définition 3.2.1. Soient f, g deux fonctions $[0, +\infty[\to [0, +\infty[$.

On dit que g majore asymptotiquement f, et on écrit $f \preccurlyeq g$, s'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $l \in [0, +\infty[$, on ait $f(l) \leq Cg(Cl + C) + Cl + C$.

On dit que f, g sont équivalentes, et on écrit $f \sim g$, si $f \preccurlyeq g$ et $g \preccurlyeq f$.

Cette définition s'étend immédiatement aux suites de nombres réels positifs. La relation $\sim$ préserve le comportement asymptotique. Par exemple $n^p \sim n^q$ implique $p = q$ et $n^p \not\sim r^n$, pour tout $r > 1$. De plus cette relation identifie les fonctions linéaires aux fonctions constantes, les polynômes de même degré entre eux et les fonctions exponentielles entre elles : $\rho^n \sim r^n$ pour tous $r, \rho > 1$.

Théorème 3.2.2. *Soit G un groupe de présentation finie, et soient $\langle S, R\rangle$ et $\langle S', R'\rangle$ deux présentations finies de G. Alors les fonctions de Dehn δ et δ' sont équivalentes.*

Preuve. Considérons d'abord le cas $S = S'$ et $R \subset R'$. Chaque $r' \in R' \setminus R$ peut s'écrire dans F_S comme produit de $m_{r'}$ conjugués de relateurs de R. Soit m le maximum des $m_{r'}$. Si un mot de F_S s'écrit comme produit de k conjugués d'éléments de $R^{\pm 1} \cup R'^{\pm 1}$, alors il peut s'écrire comme produit d'au plus mk conjugués d'éléments de $R^{\pm 1}$. Cela montre que $\delta(n) \leq m\,\delta'(n)$. Comme par ailleurs il est clair que $\delta'(n) \leq \delta(n)$, on obtient bien que $\delta \sim \delta'$.

Considérons désormais une présentation finie $\langle S, R\rangle$ et ajoutons un ensemble fini S' de générateurs. Pour chaque $s' \in S'$, ajoutons un relateur $s' u_{s'}^{-1}$, où $u_{s'}$ est un élément de F_S qui représente s' dans le groupe G. Soit $\langle S'', R''\rangle$ la présentation ainsi obtenue, et soit M le maximum des longueurs des mots $u_{s'}$. Etant donné un mot $w \in F_{S''}$ de longueur n qui représente l'élément neutre du groupe G, on commence par appliquer les nouveaux relateurs pour remplacer les s' par les mots $u_{s'}$. On obtient ainsi un élément de F_S de longueur inférieur à Mn, son aire est donc inférieure à $\delta(Mn)$. Ainsi $\delta''(n) \leq \delta(Mn)$, et donc $\delta'' \preccurlyeq \delta$. Montrons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a également $\delta(n) \leq \delta''(n)$. Pour cela, il suffit de montrer que si un mot $w \in F_S$ peut s'écrire dans $F_{S''}$ comme produit de n conjugués d'éléments de $R''^{\pm 1}$, alors il peut aussi s'écrire dans F_S comme produit de n conjugués d'éléments de $R^{\pm 1}$. Pour s'en convaincre, il suffit de considérer l'image du produit en question par le morphisme $F_{S''} \to F_S$ qui envoie chaque $s' \in S'$ sur $u_{s'}$.

Considérons enfin deux présentations finie $\langle S, R\rangle$ et $\langle S', R'\rangle$ du groupe G, et construisons la présentation ayant pour système de générateurs $S'' = S \cup S'$ et pour relateurs $R'' = R \cup R' \cup \{s u_s^{-1}\} \cup \{s' u_{s'}^{-1}\}$, où u_s (resp. $u_{s'}$) est un mot de F_S (resp. $F_{S'}$) qui représente s (resp. s') dans G. Ce qui précède montre que que la fonction de Dehn δ'' associée à cette présentation est équivalente à la fois à δ et à δ', ce qui termine la preuve. □

Remarque 3.2.3. Le résultat reste vrai dans le cas d'un groupe localement compact de présentation compacte, sous réserve que les fonctions de Dehn prennent des valeurs finies (ce qui est le cas pour un choix convenable de relateurs, voir [6]), et la preuve est identique.

La classe d'équivalence de δ est donc un invariant du groupe G, ce qui nous permet de parler de classe d'équivalence de la fonction de Dehn du groupe G. Par abus, on dit aussi fonction de Dehn du groupe G. Le théorème suivant est un résultat plus précis, nous l'utiliserons dans la partie 5.

Théorème 3.2.4. *Soient G, G' deux groupes localement compacts de présentation compacte. Si G, G' sont quasi-isométriques alors les fonctions de Dehn de G et G' sont équivalentes. Autrement dit, la fonction de Dehn, à équivalence près, est un invariant de quasi-isométrie du groupe.*

On ne peut en général rien dire sur la fonction de Dehn d'un sous-groupe ou d'un quotient de G. La proposition suivante traite le cas très particulier d'un rétract, elle nous sera utile dans la preuve du théorème 5.1.6.

Définition 3.2.5. Un sous-groupe H de G est un rétract s'il existe un morphisme de groupes $G \to H$ valant l'identité sur H.

Proposition 3.2.6. *Soit G un groupe de présentation finie et soit H un rétract de G. Alors H est de présentation finie et $\delta_H(n) \leq \delta_G(n)$ pour tout entier n.*

Preuve. Soient $\langle S, R\rangle$ une présentation finie de H. On peut trouver une présentation finie $\langle S', R'\rangle$ de G telle que $S \subset S'$ et $R \subset R'$. Si $w \in \langle\langle R\rangle\rangle$, on note $a(w)$ son aire en tant qu'élément de F_S et $a'(w)$ son aire en tant qu'élément de $F_{S'}$. Montrons que $a(w) \leq a'(w)$. On écrit dans $F_{S'}$

$$w = \prod_{i=1}^{a'(w)} v_i' r_i' v_i'^{-1}$$

et on projette cette égalité dans F_S, autrement dit on supprime dans ce mot tous les $s' \in S' \setminus S$. On obtient ainsi une égalité dans F_S du type

$$w = \prod_{i=1}^{a'(w)} v_i r_i v_i^{-1}$$

et donc, par définition de l'aire, $a(w) \leq a'(w)$. $\square$

3.3 Exemples élémentaires de calcul de fonctions de Dehn

3.3.1 L'exemple de $\mathbb{Z}^2$

On donne, dans ce paragraphe, une preuve directe du fait que la fonction de Dehn du groupe $\mathbb{Z}^2$ est quadratique. Pour obtenir une minoration, on introduit le groupe donné par la présentation

$$H = \langle x, y, z \mid z = [x, y], [x, z] = [y, z] = 1\rangle .$$

Considérons également le groupe matriciel

$$H_{mat} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} \\ 0 & 1 & \mathbb{Z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

appelé groupe de Heisenberg, et ses trois matrices élémentaires

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ces trois matrices vérifient les relations $Z = XYX^{-1}Y^{-1}$, $ZX = XZ$ et $ZY = YZ$. On dispose donc d'un morphisme de groupes φ de H dans H_{mat}, qui envoie x sur X et y sur Y, et le calcul

$$\begin{pmatrix} 1 & n & p \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Y^m X^n Z^p,$$

montre que ce morphisme est surjectif. Par ailleurs, tout élément de H peut être représenté par un mot du type $w(x, y)z^p$ car z est central, mais également par un mot du type $y^m x^n z^p$ grace aux relations

$$xy = yxz,\ x^{-1}y = yx^{-1}z^{-1},\ xy^{-1} = y^{-1}xz^{-1},\ x^{-1}y^{-1} = y^{-1}x^{-1}z.$$

Il en résulte que φ est aussi injectif et que ces deux groupes sont donc isomorphes.

Commençons par minorer la fonction de Dehn de la présentation

$$G = \langle x, y \mid [x, y] = 1 \rangle .$$

Considérons le mot $[x^n, y^n]$ de longueur $4n$ et notons a son aire. Dans F_S, écrivons

$$[x^n, y^n] = \prod_{i=1}^{a} v_i [x, y]^{\varepsilon_i} v_i^{-1},\ \varepsilon_i \in \{\pm 1\},$$

comme produit de a conjugués de relateurs, et prenons l'image de cette égalité dans le group de Heisenberg. On obtient alors

$$[x^n, y^n] = [x, y]^{\sum \varepsilon_i}.$$

Or, dans H on a l'égalité $[x^n, y^n] = [x, y]^{n^2}$, comme on le vérifie facilement à l'aide de la représentation matricielle. Comme de plus $[x, y]$ n'est pas d'ordre fini dans H, on en déduit que $n^2 = \sum_{i=1}^{a} \varepsilon_i \leq a$. On a donc montré que $\delta(4n) \geq n^2$, et donc $n^2 \preccurlyeq \delta_{\mathbb{Z}^2}(n)$.

Nous allons utiliser le lemme suivant pour majorer la fonction de Dehn du groupe $\mathbb{Z}^2$.

Lemme 3.3.1. *Pour tous $x, y \in F_S$ et pour tous $m, n \in \mathbb{Z}$, on a :*

i) $a([x, y]) = a([y, x])$,

ii) $a([x^n, y^m]) \leq |mn| a([x, y])$.

Preuve. La première égalité est claire car $[y,x] = [x,y]^{-1}$. On commence par établir la seconde pour $m, n \geq 0$. Le résultat est évident si $n = 0$. De plus,

$$[x, y^m] = xy^m x^{-1} y^{-m} = [x,y]y[x, y^{m-1}]y^{-1},$$

donc

$$\begin{aligned} a([x,y^m]) &\leq a([x,y]) + a(y[x,y^{m-1}]y^{-1}) \\ &= a([x,y]) + a([x,y^{m-1}]), \end{aligned}$$

et une récurrence sur m permet de conclure que $a([x,y^m]) \leq m\, a([x,y])$ pour tout $m \geq 0$. On procède désormais par récurrence sur n :

$$[x^n x, y^m] = x^n x y^m x^{-1} x^{-n} y^{-m} = x^n [x, y^m] x^{-n} [x^n, y^m],$$

donc

$$\begin{aligned} a([x^{n+1}, y^m]) &\leq a(x^n [x,y^m] x^{-n}) + a([x^n, y^m]) \\ &= a([x,y^m]) + a([x^n, y^m]) \\ &\leq m\, a([x,y]) + mn\, a([x,y]) \\ &= (n+1)m\, a([x,y]), \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. Pour établir le résultat pour $n \leq 0$, il suffit de changer x en x^{-1} dans le résultat précédent, et de remarquer que $[x^{-1}, y]$ et $[y, x]$ sont conjugués et donc ont la même aire. De même pour le cas $m \leq 0$. □

Proposition 3.3.2. *La fonction de Dehn de la présentation*

$$G = \langle x, y \mid [x,y] = 1 \rangle$$

vérifie $\delta(n) \leq n(n-1)/2$. En particulier, la fonction de Dehn du groupe $\mathbb{Z}^2$ est $\preccurlyeq n^2$.

Preuve. Tout élément de G s'écrit de manière unique sous la forme $x^\alpha y^\beta$. Cela signifie que pour tout élément $g \in F_S$, il existe un unique couple d'entiers relatifs (α, β) tel que $c(g, x^\alpha y^\beta) < +\infty$. Démontrons par récurrence sur $n = |g|$ que $c(g, x^\alpha y^\beta) \leq n(n-1)/2$. L'inégalité est vérifiée pour $n = 0$. Supposons qu'elle est vérifiée pour un entier n, et soit $g \in G$ de longueur $n+1$. Si $g = x^e m$ avec $e = \pm 1$ et $|m| = n$, alors

$$\begin{aligned} c(g, x^{\alpha+e} y^\beta) &= c(x^e m, x^{\alpha+e} y^\beta) \\ &= c(m, x^\alpha y^\beta) \\ &\leq \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence. Donc $c(g, x^{\alpha+e}y^{\beta}) \leq n(n+1)/2$, ce qui conclut l'héritage dans ce cas. Dans le cas où $g = y^e m$ avec $e = \pm 1$ et $|m| = n$, on a

$$\begin{aligned}
c(g, x^{\alpha}y^{\beta+e}) &= c(y^e m, x^{\alpha}y^{\beta+e}) \\
&= c(m, y^{-e}x^{\alpha}y^{\beta+e}) \\
&= a(y^{-e}x^{\alpha}y^{\beta+e}m^{-1}) \\
&= a([y^{-e}, x^{\alpha}]x^{\alpha}y^{\beta}m^{-1}) \\
&\leq a([y^{-e}, x^{\alpha}]) + a(x^{\alpha}y^{\beta}m^{-1}) \\
&\leq |e\alpha| a([x, y]) + a(x^{\alpha}y^{\beta}m^{-1}) \\
&= |\alpha| + c(m, x^{\alpha}y^{\beta}) \\
&\leq n + \frac{n(n-1)}{2} \\
&= \frac{n(n+1)}{2}.
\end{aligned}$$

Si $a(g) < +\infty$ alors $\alpha = \beta = 0$ donc $a(g) \leq |g|(|g|-1)/2$, et $\delta(n) \leq n(n-1)/2$. □

Remarque 3.3.3. Comme pour tout $d \geq 2$ le groupe $\mathbb{Z}^2$ est un rétract de $\mathbb{Z}^d$, on obtient que la fonction de Dehn du groupe $\mathbb{Z}^d$ est au moins quadratique. En fait $\delta_{\mathbb{Z}^d}(n) \sim n^2$, par un argument similaire.

3.3.2 Fonction de Dehn du groupe de Heisenberg

Evaluons la fonction de Dehn de la présentation définissant le groupe H. Pour obtenir une majoration, estimons le nombre de relateurs suffisant à ramener un mot w de longueur n en un mot de la forme $y^{\alpha}x^{\beta}z^{\gamma}$. On commence par mettre tous les $z^{\pm 1}$ à droite. Il suffit de n relateurs pour chaque $z^{\pm 1}$, et ceux-ci sont en nombre inférieur à n, ce qui nous donne au plus n^2 relateurs. Ensuite, pour toute paire de lettres adjacentes du type $x^{\pm 1}y^{\pm 1}$, on passe à $y^{\pm 1}x^{\pm 1}z^{\pm 1}$ à l'aide d'un relateur, et on met $z^{\pm 1}$ à droite avec au plus n relateurs. Comme le nombre de telles paires est majoré par n^2, on aboutit à la forme souhaitée à l'aide d'au plus n^3 relateurs. En appliquant cela au cas d'un mot représentant l'élément trivial, on obtient que la fonction de Dehn de cette présentation vérifie $\delta(n) \preccurlyeq n^3$. Pour obtenir une minoration, nous allons procéder de manière analogue au cas de $\mathbb{Z}^2$, en construisant une extension centrale ad-hoc.

Lemme 3.3.4. *Le groupe* Γ *défini par la présentation*

$$\Gamma = \langle x, y, z, t \mid z = [x, y],\ t = [x, z],\ [x, t] = [y, t] = [y, z] = 1 \rangle$$

est isomorphe au produit semi-direct $(\mathbb{Z}[X]/X^3) \rtimes \mathbb{Z}$*, où l'élément* 1 *de* $\mathbb{Z}$ *agit par multiplication par l'élément inversible* $1 + X$*.*

Preuve. Soient $a = 1 \in \mathbb{Z}$, et soient $b = 1$, $c = X$, $d = X^2 \in \mathbb{Z}[X]/X^3$, que l'on identifie avec leurs images dans le produit semi-direct $(\mathbb{Z}[X]/X^3) \rtimes_{1+X} \mathbb{Z}$. Vérifions que ces éléments satisfont les relations définies par la présentation de Γ.

$$\begin{aligned}[a, b] &= aba^{-1}b^{-1} \\ &= (a \cdot b)b^{-1} \\ &= (1 + X, 0)(-1, 0) \\ &= (X, 0) \\ &= c.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}[a, c] &= aca^{-1}c^{-1} \\ &= (a \cdot c)c^{-1} \\ &= (X + X^2, 0)(-X, 0) \\ &= (X^2, 0) \\ &= d\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[a, d] &= ada^{-1}d^{-1} \\ &= (a \cdot d)d^{-1} \\ &= (X^2 + X^3, 0)(-X^2, 0) \\ &= (0, 0).\end{aligned}$$

De plus, le fait que les éléments $[b, d]$ et $[b, c]$ sont triviaux est clair car la multiplication s'effectue dans le groupe abélien $\mathbb{Z}[X]/X^3$. On dispose donc d'un morphisme de groupes surjectif

$$\varphi : \Gamma \longrightarrow (\mathbb{Z}[X]/X^3) \rtimes_{1+X} \mathbb{Z}$$

qui envoie (x, y, z, t) sur (a, b, c, d). Il nous suffit de vérifier que φ est injectif. Il résulte des relations

$$xy = zyx,\ x^{-1}y = z^{-1}tyx^{-1},\ xy^{-1} = y^{-1}z^{-1}x,\ x^{-1}y^{-1} = y^{-1}t^{-1}zx^{-1},$$

et du fait que les éléments y, z, t commutent deux à deux, que tout élément de Γ peut s'écrire sous la forme $y^\alpha z^\beta t^\gamma x^\delta$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z}$. Si $g = y^\alpha z^\beta t^\gamma x^\delta$ est un élément du noyau de φ, on obtient $(\alpha + \beta X + \gamma X^2, \delta) = (0, 0)$ et donc $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, ce qui conclut. $\square$

Lemme 3.3.5. *Dans le groupe Γ, on a $[x^n, [x^n, y^n]] = t^{n^3}$.*

Preuve. Voir ce groupe comme produit semi-direct nous fournit un moyen de calculer dans Γ. Ainsi $x^n y^n x^{-n}$ s'identifie au résultat de l'action de $n \in \mathbb{Z}$ sur $n \in \mathbb{Z}[X]/X^3$. D'où

$$\begin{aligned} s &= [x^n, y^n] \\ &= (x^n y^n x^{-n}) y^{-n} \\ &= n(1+X)^n - n \\ &= n^2 X + \alpha_n X^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} [x^n, [x^n, y^n]] &= (x^n s x^{-n}) s^{-1} \\ &= s(1+X)^n - s \\ &= (n^2 X + \alpha_n X^2)((1+X)^n - 1) \\ &= n^3 X^2 \\ &= t^{n^3}. \end{aligned}$$

□

Toujours avec les notations de la présentation définissant H, montrons que le mot $[x^n, [x^n, y^n]]$ a une aire a supérieure à n^3. Cela implique que $\delta(10n) \geq n^3$, et donc $n^3 \preccurlyeq \delta(n)$. Combiné avec ce qui précède, on obtiendra alors que le groupe de Heisenberg a une fonction de Dehn cubique.

Pour cela, écrivons dans F_S le mot

$$[x^n, [x^n, y^n]] = \prod_{i=1}^{a} v_i r_i^{\pm 1} v_i^{-1}$$

comme produit de a conjugués de relateurs, et prenons l'image de cette égalité dans le groupe Γ du lemme précédent. D'après les relations définissant Γ, les images des r_i sont soit t soit 1. En particulier ces éléments sont dans le centre de Γ, et on obtient donc $t^{n^3} = \prod_{i=1}^{a} t^{\alpha_i}$ avec $\alpha_i \in \{-1, 0, 1\}$. Comme t n'est pas d'ordre fini dans Γ, ce qui est clair via la représentation de Γ en tant que produit semi-direct, on en déduit que $n^3 = \sum_{i=1}^{a} \alpha_i \leq a$, ce qui conclut.

Chapitre 4

Groupes de Baumslag-Solitar

4.1 Définition

Définition 4.1.1. Soit $n \geq 1$. On appelle groupe de Baumslag-Solitar

$$\mathrm{BS}(1,n) = \left\langle t, x \mid txt^{-1} = x^n \right\rangle.$$

Proposition 4.1.2. $\mathrm{BS}(1,n)$ *est isomorphe au produit semi-direct* $\mathbb{Z}[1/n] \rtimes \mathbb{Z}$*, où l'élément* 1 *de* $\mathbb{Z}$ *agit sur* $\mathbb{Z}[1/n]$ *par multiplication par* n*.*

Preuve. En effet, si on appelle H le sous-groupe de $\mathrm{BS}(1,n)$ engendré par $\left\{t^k x t^{-k}\right\}_{k \in \mathbb{Z}}$ et K le sous-groupe engendré par t, alors montrons que

i) $\mathrm{BS}(1,n) = HK$,

ii) H est distingué dans $\mathrm{BS}(1,n)$,

iii) $H \cap K = 1$.

i) Etant donné un mot w en t, x, on le parcourt de la gauche vers la droite et à chaque apparition d'une lettre $x^{\pm 1}$ on écrit $t^k x^{\pm 1} = (t^k x^{\pm 1} t^{-k}) t^k$. Ainsi, on peut écrire w comme le produit d'un élément de H par un élément de K.

ii) Il est clair que t centralise H. Montrons que x centralise chaque $t^k x t^{-k}$. C'est évident si $k \geq 0$ car $t^k x t^{-k}$ est une puissance de x. Si $k \leq 0$ alors $-k \geq 0$ et

$$[x, t^k x t^{-k}] = t^k [t^{-k} x t^k, x] t^{-k} = t^k [x^{n^{-k}}, x] t^{-k} = 1.$$

iii) Dans H la conjugaison par t s'identifie à l'élévation à la puissance n, donc aucune puissance non triviale de t ne peut être dans H.

On peut voir $\mathbb{Z}[1/n] \rtimes \mathbb{Z}$ comme le groupe de matrices

$$\begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & \mathbb{Z}[1/n] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Considérons les matrices

$$a = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le sous-groupe G de $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}[1/n])$ engendré par a et b. La relation

$$\begin{pmatrix} n^p & \frac{q}{n^k} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = a^{-k} b^q a^{p+k}$$

montre que

$$G = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} & \mathbb{Z}[1/n] \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La relation $aba^{-1} = b^n$ fournit un morphisme de groupes surjectif $\varphi : \mathrm{BS}(1,n) \to G$ qui envoie t sur a et x sur b. Montrons que ce morphisme est injectif. D'après ce qui précède, tout élément de $\mathrm{BS}(1,n)$ s'écrit d'une unique manière sous la forme $t^k x^q t^{-k} t^p$. En poussant un élément du noyau de φ dans G, on obtient l'égalité matricielle

$$\begin{pmatrix} n^p & qn^k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

donc $p = q = 0$ et le seul élément du noyau de φ est l'élément neutre, ce qui termine la preuve. □

4.2 Construction d'un sur-groupe de $\mathrm{BS}(1,n)$

Il est prouvé dans [8] que $\mathrm{BS}(1,n)$ a une fonction de Dehn exponentielle pour tout $n \geq 2$. Dans ce paragraphe nous contruisons un groupe Γ_n contenant une copie de $\mathrm{BS}(1,n)$, et nous déduirons du théorème 5.1.6 qu'il a une fonction de Dehn quadratique.

Les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} n & 0 \\ 0 & n \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

commutent et ne sont pas d'ordre fini dans $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$. Le sous-groupe qu'elles engendrent est donc isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. Définissons le groupe

$$\Gamma_n = \mathbb{Z}[1/n]^2 \rtimes_{(A,B)} \mathbb{Z}^2,$$

où les éléments $(1,0)$ et $(0,1)$ de $\mathbb{Z}^2$ agissent respectivement par multiplication par A et B.

Proposition 4.2.1. *Le groupe Γ défini par la présentation*

$$\Gamma = \left\langle a, b, x, y \mid [a,b],\ [x,y],\ axa^{-1} = x^n,\ aya^{-1} = y^n,\ bxb^{-1} = x^2y,\ byb^{-1} = xy \right\rangle$$

est isomorphe au groupe Γ_n. En particulier Γ_n est un groupe de type fini qui contient une copie du groupe $\mathrm{BS}(1,n)$.

Preuve. Considérons les éléments de Γ_n $x' = ((1,0),(0,0))$, $y' = ((0,1),(0,0))$, $a' = ((0,0),(1,0))$ et $b' = ((0,0),(0,1))$. Le fait que ces éléments vérifient les relations définissant Γ fournit un morphisme de groupes $\Gamma \to \Gamma_n$ envoyant (a,b,x,y) sur (a',b',x',y'), qui est surjectif car a',b',x',y' engendrent Γ_n. Pour montrer l'injectivité on identifie une structure de produit semi-direct dans Γ, comme effectué en 4.1.2. Enfin, $(\mathbb{Z}[1/n] \times \{0\}) \rtimes (\mathbb{Z} \times \{0\})$ est un sous-groupe de Γ_n qui est clairement isomorphe à $\mathrm{BS}(1,n)$. $\square$

Remarque 4.2.2. On peut également voir le groupe Γ_n comme un groupe de matrices. En effet, si on considère

$$A' = \begin{pmatrix} n & 0 & 0 \\ 0 & n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, B' = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, X' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, Y' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors Γ_n est isomorphe au sous-groupe

$$G = \begin{pmatrix} n^{\mathbb{Z}} B^{\mathbb{Z}} & \begin{matrix} \mathbb{Z}[1/n] \\ \mathbb{Z}[1/n] \end{matrix} \\ 0 \quad 0 & 1 \end{pmatrix}$$

de $\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}[1/n])$ qu'elles engendrent.

Chapitre 5

Théorème principal

5.1 Énoncé

Définition 5.1.1. Une norme sur un corps k est une application $|\ | : k \to [0, +\infty[$ satisfaisant

1. $|x| = 0 \iff x = 0$,
2. $\forall x, y \in k$, $|xy| = |x||y|$,
3. $\forall x, y \in k$, $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Exemple 5.1.2. Soit p un nombre premier. On définit le corps des séries de Laurent sur $\mathbb{F}_p$ comme le corps des fractions de l'anneau des séries formelles $\mathbb{F}_p[[u]]$, il est noté $\mathbb{F}_p((u))$. Il s'agit de l'ensemble des séries du type

$$f = \sum_{n \geq N} a_n u^n,$$

où les a_n sont dans $\mathbb{F}_p$ et $N \in \mathbb{Z}$. Si N désigne effectivement le plus petit entier tel que $a_n \neq 0$, alors on définit une norme sur $\mathbb{F}_p((u))$ en posant $|f| = p^{-N}$.

Remarque 5.1.3. La donnée d'une norme sur k permet de définir une distance en posant $d(x, y) = |x - y|$. Lorsque nous parlerons des propriétés topologiques de k, il s'agira, sauf mention contraire, de la topologie définie par cette distance.

Définition 5.1.4. On appelle corps local un corps normé localement compact qui n'est pas discret.

Le théorème suivant, dont la preuve se trouve dans [11], est un théorème de classification des corps locaux.

Théorème 5.1.5. *Tout corps local est isomorphe soit à $\mathbb{R}$, soit à $\mathbb{C}$, soit à une extension finie de $\mathbb{Q}_p$ ou de $\mathbb{F}_p((u))$.*

Considérons un groupe abélien $A \simeq \mathbb{Z}^d$ et une famille finie $(V_i)_{i=1..m}$ où chaque V_i est un produit de corps locaux muni d'une action de A par multiplication par un scalaire, et considérons le produit semi-direct

$$G = \left(\bigoplus_{i=1}^{m} V_i\right) \rtimes A.$$

Théorème 5.1.6. *Si pour toute paire d'entiers i, j il existe un élément du groupe A qui agit par contraction sur V_i et V_j, c'est-à-dire par multiplication par un élément de norme strictement inférieure à 1 sur chacun des facteurs, alors le groupe G a une fonction de Dehn quadratique si $d \geq 2$ et linéaire si $d = 1$.*

Preuve. Comme le groupe $A \simeq \mathbb{Z}^d$ est un rétract de G, on obtient un minoration de la fonction de Dehn du groupe G par celle de $\mathbb{Z}^d$, qui est linéaire si $d = 1$ et quadratique sinon. Il nous suffit donc de majorer la fonction de Dehn de G.

Quitte à raffiner la décomposition en somme directe, on peut supposer que chaque V_i est un corps local K_i sur lequel A agit par multiplication scalaire. Fixons une norme sur chaque K_i, et notons S_i l'ensemble des éléments de norme inférieure ou égale à 1.

Nous traitons ici le cas $d = 1$, le cas $d \geq 2$ sera démontré plus tard. L'hypothèse signifie dans ce cas qu'il existe un générateur t de $\mathbb{Z}$ qui agit par contraction sur chacun des facteurs. Prenons comme système de générateurs $S = B \cup \{t\}$, où B désigne le produit des S_i. Il existe un entier $k \geq 4$, que l'on suppose désormais fixé, tel que pour tous $x_1, \dots, x_k \in B$, il existe $x'_1, \dots, x'_\ell \in B$, avec $\ell \leq k - 3$, tels que les mots $tx_1 \dots x_k t^{-1}$ et $x'_1, \dots x'_\ell$ représentent le même élément du groupe G. Prenons comme système de relateurs toutes les relations dans le groupe G de taille au plus $2k$.

On se donne désormais un mot de taille au plus n représentant l'élément neutre du groupe G. Si l'un de ses conjugués cycliques contient une suite $x_1 \dots x_k$ alors en appliquant un relateur on est ramené à un mot de longueur au plus $n - 1$. Sinon, si le mot est de longueur inférieure à k alors son aire est bornée par une constante. En supposant notre mot de longueur au moins k, il existe une occurrence de $t^{\pm 1}$ et on dispose donc d'un conjugué cyclique dans lequel $tx_1 \dots x_m t^{-1}$ apparaît. Par hypothèse $m < k$ donc $tx_1 \dots x_m t^{-1} = (tx_1 t^{-1}) \dots (tx_m t^{-1})$ s'écrit $x'_1 \dots x'_m$ avec un coût 1, ce qui fait diminuer la taille du mot.

En itérant ce procédé, on voit que l'on a $\delta(n) \leq n$, ce qui conclut la preuve dans le cas $d = 1$.

$\square$

5.2 Application au groupe Γ_n

Afin d'estimer la fonction de Dehn du groupe Γ_n, nous allons montrer qu'il se plonge en un réseau co-compact dans un groupe de fonction de Dehn quadratique, et utiliser l'invariance par quasi-isométrie.

Définition 5.2.1. Un réseau d'un groupe topologique localement compact G est un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ possède une mesure borélienne finie invariante par G.

Exemple 5.2.2. Un sous-groupe discret co-compact, c'est-à-dire un sous-groupe discret Γ tel que le quotient G/Γ est compact, est un réseau de G.

Exemple 5.2.3. Pour tout $n \geq 2$, $\mathrm{SL}_n(\mathbb{Z})$ est un réseau non co-compact de $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 5.2.4. *Soit G un groupe localement compact de présentation compacte et soit Γ un réseau co-compact de G. Alors Γ et G ont la même fonction de Dehn.*

Preuve. Γ et G sont quasi-isométriques d'après l'exemple 2.1.7, et donc l'invariance de δ par quasi-isométrie conclut. $\square$

Soit $\mathbb{Q}_p$ le corps des nombres p-adiques. On note $\mathbb{Q}_n$ le produit des $\mathbb{Q}_p$ lorsque p parcourt l'ensemble des diviseurs premiers distincts de n. Si on munit chaque $\mathbb{Q}_p$ de la topologie p-adique, $\mathbb{Q}_n$ est alors muni de la topologie produit.

Lemme 5.2.5. *L'image du plongement diagonal de $\mathbb{Z}[1/n]$ dans $\mathbb{Q}_n \times \mathbb{R}$ est un sous-anneau discret co-compact.*

Preuve. Soit $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition de n en produit de facteurs premiers distincts. Pour le caractère discret il suffit de montrer que 0 est isolé. Soit $x = qp_1^{\beta_1} \dots p_r^{\beta_r}$ un élément non nul de $\mathbb{Z}[1/n]$ tel que q est premier avec chacun des p_i et $\beta_i \in \mathbb{Z}$. Si pour tout entier i on a $p_i^{-\beta_i} = |x|_{p_i} \leq 1$ alors $\beta_i \geq 0$ et $x \in \mathbb{Z}$. Si on a de plus $|x| < 1$ alors $x = 0$, ce qui montre que le plongement est bien discret. Pour le caractère co-compact, il suffit de montrer que la réunion des translatés du compact $\prod \mathbb{Z}_{p_i} \times [0,1]$ par le plongement diagonal de $\mathbb{Z}[1/n]$ est $\prod \mathbb{Q}_{p_i} \times \mathbb{R}$. Soit donc $(x_1, \dots, x_r, x)$ avec $x_i \in \mathbb{Q}_{p_i}$. Si $|x_i|_{p_i} > 1$ alors on écrit $x_i = \varepsilon p_i^{-m}$, où $m > 0$ et ε est une unité p_i-adique. Par densité de $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}_{p_i}$, il existe $c \in \mathbb{Z}$ tel que $|c - \varepsilon|_{p_i} \leq p_i^{-m}$, et donc $|x_i - cp_i^{-m}|_{p_i} \leq 1$. On ramène ainsi la coordonnée selon $\mathbb{Q}_{p_i}$ dans $\mathbb{Z}_{p_i}$ à l'aide d'un élément de $\mathbb{Z}[1/p_i]$, et ceci sans affecter la valuation p_j-adique de la coordonnée selon $\mathbb{Q}_{p_j}$ pour $j \neq i$. En effectuant au plus r telles opérations, on ramène l'élément $(x_1, \dots, x_r, x)$ dans $\prod \mathbb{Z}_{p_i} \times \mathbb{R}$ à l'aide d'un élément diagonal de $\mathbb{Z}[1/n]$. Il suffit alors d'ajouter un élément diagonal de $\mathbb{Z}$ pour être dans $\prod \mathbb{Z}_{p_i} \times [0,1]$. $\square$

Considérons désormais le plongement diagonal de $\mathbb{Z}[1/n]^2$ dans $\mathbb{Q}_n^2 \times \mathbb{R}^2$ et le groupe

$$G_n = (\mathbb{Q}_n^2 \times \mathbb{R}^2) \rtimes \mathbb{Z}^2,$$

où l'action du groupe $\mathbb{Z}^2$ est toujours définie par la même paire de matrices. Il revient au même de faire agir ces matrices sur $\mathbb{Z}[1/n]^2$ puis d'effectuer le plongement dans $\mathbb{Q}_n^2 \times \mathbb{R}^2$ ou de plonger $\mathbb{Z}[1/n]^2$ puis de faire agir ces matrices. Autrement dit G_n contient une copie de Γ_n, et on peut identifier Γ_n à un réseau co-compact de G_n.

Décomposons $\mathbb{R}^2 = V_+ \oplus V_-$ selon les sous-espaces propres orthogonaux de B, où V_+ est la droite propre associée à la valeur propre de B de module strictement plus grand que 1, et V_- est la droite propre associée à la valeur propre de module strictement plus petit que 1.

Proposition 5.2.6. *Il existe un entier naturel k tel que*
- *$B^k A$ contracte à la fois V_- et $\mathbb{Q}_n^2$,*
- *$B^{-k} A$ contracte à la fois V_+ et $\mathbb{Q}_n^2$.*

Preuve. La matrice A contracte $\mathbb{Q}_n^2$ et la matrice B agit par isométrie sur $\mathbb{Q}_n^2$ (si on considère la norme infinie par exemple), il est donc clair que $B^m A$ contracte $\mathbb{Q}_n^2$ pour tout entier m. Pour que $B^m A$ contracte également V_-, il suffit de prendre m assez grand de manière à compenser le fait que A dilate V_-. On raisonne de même pour la seconde assertion, et on choisit pour k le maximum des deux entiers obtenus. $\square$

Notons que la matrice A^{-1} contracte à la fois V_+ et V_-. Autrement dit, pour toute paire parmi V_+, V_- et $\mathbb{Q}_n^2$, il existe un élément du groupe engendré par A, B qui agit sur cette paire par contraction. Le fait que le groupe G_n ait une fonction de Dehn quadratique est alors conséquence du théorème 5.1.6.

5.3 Application aux groupes de Baumslag Λ_p

5.3.1 Produit en couronne

Définition 5.3.1. Soient G, H deux groupes. On définit le produit en couronne $H \wr G$ de G et H comme le produit semi-direct $H^{(G)} \rtimes G$, où $H^{(G)}$ est l'ensemble des fonctions de G dans H à support fini, sur lequel G agit par décalage d'indices : $(g \cdot \lambda)(s) = \lambda(g^{-1}s)$.

Exemple 5.3.2. Si $H = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ et $G = \mathbb{Z}$, on obtient un groupe appelé *allumeur de réverbères*. Il modélise une rue avec une infinité de lampes indexées par $\mathbb{Z}$ dont seulement un nombre fini est allumé, et un allumeur qui se déplace pour allumer ou éteindre la lampe devant laquelle il se trouve. Si $\gamma = \lambda n$ alors $\lambda \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ indique la position des lampes allumées et $n \in \mathbb{Z}$ indique la position de l'allumeur, ce que résument les règles de calcul

$$\begin{aligned}(\lambda n)\delta_1 &= (\lambda(n \cdot \delta_1))n = (\lambda + \delta_n)n, \\ (\lambda n)n' &= \lambda(n + n'),\end{aligned}$$

où δ_x désigne la masse de Dirac en $x \in \mathbb{Z}$.

5.3.2 Groupes de Baumslag

Le groupe défini par la présentation

$$\Lambda = \left\langle a, s, t \mid [s,t], [a^t, a], a^s = a^t a \right\rangle$$

a été introduit pour la première fois par Baumslag dans [1], en tant qu'exemple de groupe métabélien de présentation finie possédant un sous-groupe abélien distingué de rang infini. Il est prouvé dans [9] que ce groupe a une fonction de Dehn exponentielle. Le sous-groupe $\langle a, t \rangle$ de Λ est

$$\mathbb{Z} \wr \mathbb{Z} = \left(\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} \mathbb{Z} \right) \rtimes \mathbb{Z} = \left\langle a, t \mid [a^{t^k}, a],\ k \in \mathbb{Z} \right\rangle.$$

Si on ajoute à la présentation définissant Λ la relation $a^p = 1$, où p est un nombre premier, on obtient un groupe contenant une copie de $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \wr \mathbb{Z}$. On l'appelle groupe de Baumslag et on le note Λ_p.

Soit K un corps local et soit $d \geq 1$. On définit le groupe $\mathrm{SOL}_{2d-1}(K)$ comme le produit semi-direct de K^d par le sous-groupe $D_d^1(K)$ de $\mathrm{GL}_d(K)$ formé des matrices diagonales de déterminant de norme 1. En ne considérant que les matrices de $D_d^1(K)$ dont les coefficients sont des puissances d'un élément de K donné, de norme différente de 1, on obtient un sous-groupe co-compact de $\mathrm{SOL}_{2d-1}(K)$ de la forme $K^d \rtimes \mathbb{Z}^{d-1}$. D'après le théorème 5.1.6, on en déduit que $\mathrm{SOL}_{2d-1}(K)$ a une fonction de Dehn quadratique dès que $2d - 1 \geq 5$. Comme application de ce résultat, nous allons prouver que le groupe de Baumslag Λ_p a une fonction de Dehn quadratique.

Lemme 5.3.3. *Le sous-groupe D de Λ_p engendré par $\left\{ a^{t^i s^j} \right\}_{i,j \in \mathbb{Z}}$ est abélien.*

Preuve. Il suffit de montrer que tous les $a^{t^i s^j}$ commutent avec a. Prouvons par récurrence sur $n \geq 1$ que le groupe engendré par $a, a^t, \ldots, a^{t^n}$ est abélien. C'est vrai pour $n = 1$ d'après les relations définissant Λ_p. Soit $n \geq 1$ tel que le groupe engendré par $a, a^t, \ldots, a^{t^n}$ est abélien. Alors le groupe engendré par $a^t, a^{t^2}, \ldots, a^{t^{n+1}}$ est lui aussi abélien, si bien que a^t commute avec $a, a^{t^n}, a^{t^{n+1}}$ et a^{t^n} commute avec $a, a^t, a^{t^{n+1}}$. On en déduit alors que

$$\begin{aligned} 1 &= [a, a^{t^n}] = [a, a^{t^n}]^s = [a^s, (a^{t^n})^s] = [a^s, a^{st^n}] = [a^s, a^{t^n s}] \\ &= [aa^t, (aa^t)^{t^n}] = [aa^t, a^{t^n} a^{t^{n+1}}] = [a, a^{t^{n+1}}], \end{aligned}$$

ce qui conclut la récurrence. On a donc montré que les $(a^{t^i})_{i \in \mathbb{Z}}$ commutent deux à deux. Désormais, si $j \geq 0$ alors a^{s^j} est un élément du groupe engendré par $a, a^t, \ldots a^{t^j}$ donc $a^{t^i s^j}$ commute avec a. Sinon, alors $-j > 0$ et

$$1 = [a^{s^{-j}}, a^{t^i}] = [a^{s^{-j}}, a^{t^i}]^{s^j} = [a, a^{t^i s^j}],$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Lemme 5.3.4. *Le sous-groupe D est distingué dans Λ_p.*

Preuve. Le normalisateur de D dans Λ_p contient clairement s et t, et il contient a car $a \in D$ et D est abélien, donc c'est Λ_p tout entier. $\square$

Lemme 5.3.5. *Le sous-groupe K de Λ_p engendré par s et t vérifie $K \cap D = 1$.*

Preuve. Tout élément de D est d'ordre 1 ou p et le seul élément d'ordre fini de K est l'élément neutre, d'où le résultat. $\square$

Proposition 5.3.6. *Le groupe Λ_p est produit semi-direct de D et K.*

Preuve. D'après les résultats précédents, il suffit de montrer que $\Lambda_p = DK$. Autrement dit, on doit prouver que tout élément de Λ_p s'écrit sous forme de produits de conjugués de a et d'un élément du type $s^n t^m$, mais ceci est clair d'après les relations définissant Λ_p. $\square$

Proposition 5.3.7. *Soit $\mathbb{F}_p[X, X^{-1}]$ l'anneau des polynômes de Laurent à coefficients dans $\mathbb{F}_p$. Le groupe Λ_p est isomorphe au produit semi-direct*

$$\Omega_p = \mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}] \rtimes \mathbb{Z}^2,$$

où les éléments de la base canonique de $\mathbb{Z}^2$ agissent respectivement par multiplication par X et $1+X$.

Preuve. On dispose d'un morphisme $\varphi : \Lambda_p \to \Omega_p$ surjectif envoyant a sur l'élément unité de l'anneau $\mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}]$ et (t, s) sur la base canonique de $\mathbb{Z}^2$. Montrons qu'il est injectif. Soit $x = dt^n s^m$ un élément du noyau de φ, $d \in D$. Comme d est produit de conjugués de a, l'élément $\varphi(d)$ est dans $\mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}]$. Mais il est également dans $\mathbb{Z}^2$ car $0 = \varphi(d)\varphi(t)^n\varphi(s)^m$, donc c'est l'élément neutre de Ω_p, et $n = m = 0$. Or, il découle des relations définissant Λ_p que les éléments $(a^{t^k})_{k\in\mathbb{Z}}$ et $(a^{s^n})_{n\geq 1}$ suffisent à engendrer le groupe D. L'élément d peut donc s'écrire $d = a^{t^{k_1}} \dots a^{t^{k_r}} a^{s^{n_1}} \dots a^{s^{n_m}}$, avec $n_i \geq 1$, ce qui nous donne la relation

$$0 = X^{k_1} + \dots + X^{k_r} + \frac{1}{(1+X)^{n_1}} + \dots \frac{1}{(1+X)^{n_m}}$$

dans $\mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}]$. Or, il n'existe pas de combinaison linéaire non triviale à coefficients dans $\mathbb{F}_p$ liant les éléments $X, X^{-1}, (1+X)^{-1}$ dans $\mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}]$. On en déduit que chaque k_i et chaque n_i a apparaît dans d un nombre de fois qui est multiple de p, ce qui montre que d est une puissance p-ième dans D et donc $d = 1$, ce qui conclut. $\square$

Lemme 5.3.8. *Le plongement*

$$\begin{aligned} \sigma : \mathbb{F}_p[X, X^{-1}, (1+X)^{-1}] &\longrightarrow \mathbb{F}_p((u))^3 \\ P &\longmapsto \big(P(u), P(u^{-1}), P(u-1)\big) \end{aligned}$$

est discret et co-compact.

Preuve. Si P est non nul alors $|P(u^{-1})|$ et $|P(u)|$ ne peuvent pas être simultanément aussi petits que l'on veut, ce qui prouve que l'image est discrète. Pour le caractère co-compact, il nous suffit de montrer que tout triplet $(P_1, P_2, P_3) \in \mathbb{F}_p((u))^3$ peut s'écrire comme somme d'un élément de l'image de σ et d'un élément de $\mathbb{F}_p[[u]]^3$. Si on écrit

$$P_1 = \sum_{n \geq N_1} a_n u^n, \ P_2 = \sum_{n \geq N_2} b_n u^n, \ P_3 = \sum_{n \geq N_3} c_n u^n,$$

alors en posant

$$P = \sum_{n=N_1}^{-1} a_n u^n + \sum_{n=N_2}^{-1} b_n u^{-n} + \sum_{n=N_3}^{-1} c_n (1+u)^n,$$

on obtient que $(P_1 - P(u), P_2 - P(u^{-1}), P_3 - P(u-1)) \in \mathbb{F}_p[[u]]^3$, ce qui termine la preuve. $\square$

Proposition 5.3.9. *Pour tout nombre premier p, le groupe Λ_p se plonge en un réseau co-compact dans* $\mathrm{SOL}_5(\mathbb{F}_p((u)))$.

Preuve. Si l'on fait désormais agir les éléments de la base canonique de $\mathbb{Z}^2$ sur $\mathbb{F}_p((u))^3$ par multiplication par les matrices $\mathrm{diag}(u, u^{-1}, u-1)$ et respectivement $\mathrm{diag}(u+1, u^{-1}+1, u)$, on fait du plongement σ du lemme précédent une application équivariante, c'est-à-dire qui commute à l'action des deux groupes en présence. De plus, le plongement de $\mathbb{Z}^2$ dans $D_3^1(K)$ défini par la donnée de ces deux matrices est lui aussi discret et co-compact, ce qui nous permet d'étendre σ en un plongement discret et co-compact

$$\Omega_p \longrightarrow \mathbb{F}_p((u))^3 \rtimes D_3^1(K) = \mathrm{SOL}_5(\mathbb{F}_p((u))),$$

ce qui conclut. $\square$

5.4 Ensemble de mots efficace

L'objet de ce paragraphe, dont l'idée est due à Gromov, est de ramener le problème général du calcul de la fonction de Dehn à son calcul uniquement avec des mots d'une certaine forme. Le résultat principal est la proposition 5.4.3, que l'on déduit des deux lemmes techniques suivants.

Lemme 5.4.1. *Soit $u_k : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ une famille de fonctions vérifiant*

i) $\underline{\lim}_{x\to\infty} u_k(x) > 0$ *pour tout* $k \geq 1$,

ii) $\forall \eta > 0 \ \exists Z > 0; \ \forall z \geq Z \ \forall y \geq 1 \ \forall k \geq 1 \ \dfrac{z u_k(y)}{u_k(yz)} \leq \eta.$

Soit $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ localement bornée telle qu'il existe des constantes $x_0, c_1, c_2 > 0$ telles que pour tout $x \geq x_0$, pour tout $k \geq 1$,

$$f(x) \leq u_k(x) + c_1 k f(c_2 x/k).$$

Alors il existe des constantes $A, x_1 > 0$ telles que pour tout $x \geq x_1$, pour tout k assez grand,

$$f(x) \leq A u_k(x).$$

Preuve. Soit $\eta = 1/(2c_1c_2)$ et soit donc $0 < \varepsilon_0 \leq 1/2$ tel que pour tout $z \geq 1/\varepsilon_0$, on ait $zu_k(y) \leq \eta u_k(yz)$ pour tous $y, k \geq 1$. Ainsi, pour tout $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$ et tout $x \geq 1/\varepsilon$, on a $u_k(x\varepsilon) \leq \eta\varepsilon u_k(x)$. En prenant $\varepsilon = c_2/k$, on obtient que pour tout $k \geq c_2/\varepsilon_0$, pour tout $x \geq 1/\varepsilon$,

$$u_k(c_2x/k) \leq \frac{c_2\eta}{k} u_k(x).$$

Fixons désormais un tel entier k, et soit $x_1 \geq \max(1/\varepsilon, x_0)$ assez grand pour que l'on ait $\inf_{x \geq x_1} u_k(x) > 0$. Puisque f est localement bornée, on dispose d'une constante $A \geq 2$ telle que $f(x) \leq Au_k(x)$ pour tout $x \in [x_1, \varepsilon^{-1}x_1]$. Prouvons par récurrence sur $n \geq 1$ que $f(x) \leq Au_k(x)$ pour tout $x \in [x_1, \varepsilon^{-n}x_1]$, ce qui démontre le résultat annoncé. Le cas $n = 1$ est vrai par ce qui précède, supposons donc la propriété vérifiée jusqu'à l'entier $n - 1$. Soit $x \in [x_1, \varepsilon^{-n}x_1]$.

$$\begin{aligned} f(x) &\leq u_k(x) + c_1 k f(c_2x/k) \\ &\leq u_k(x) + c_1 k A u_k(c_2x/k) \end{aligned}$$

par hypothèse de récurrence,

$$\begin{aligned} f(x) &\leq u_k(x)(1 + c_1 A c_2 \eta) \\ &\leq u_k(x)(1 + A/2) \\ &\leq Au_k(x). \end{aligned}$$

□

Soit G un groupe localement compact, et soit S un système de générateurs symétrique et compact. Si $\mathcal{F}$ désigne un ensemble de mots en les éléments de S, nous noterons $\mathcal{F}[k]$ l'ensemble des mots obtenus par concaténation d'au plus k éléments de $\mathcal{F}$. On définit la fonction de Dehn restreinte $\delta_{\mathcal{F}[k]}(n)$ comme le maximum des aires des mots $w \in \mathcal{F}[k]$ de longueur au plus n vérifiant $w \equiv 1$. On dira que $\mathcal{F}$ est efficace s'il existe une constante C telle que pour tout mot w en les éléments de S, il existe $w' \in \mathcal{F}$ tel que $w' \equiv w$ et $|w'|_S \leq C|w|_S$.

Lemme 5.4.2. *Supposons que $\mathcal{F}$ est efficace. Alors pour tous $k, n \geq 1$, on a*

$$\delta(n) \leq k\delta\left((C+1)\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil\right) + \delta_{\mathcal{F}[k]}\left(Ck\left\lceil\frac{n}{k}\right\rceil\right).$$

En particulier si $n \geq k$,

$$\delta(n) \leq k\delta\left((C+1)\frac{2n}{k}\right) + \delta_{\mathcal{F}[k]}(2Cn).$$

Preuve. La figure 1 de [7] éclaire grandement l'idée de la preuve. Considérons un lacet γ de longueur au plus n et découpons le en k segments $[a_i, a_{i+1}]$ de longueur au plus $\lceil n/k \rceil$. Si on note $b_i = a_i^{-1}a_{i+1}$ alors on dispose de $b_i' \in \mathcal{F}$ tel que $b_i' \equiv b_i$ et $|b_i'|_S \leq C\lceil n/k \rceil$. Si on appelle γ_i le lacet $b_i' b_i^{-1}$, alors on a découpé le lacet initial γ en k lacets $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de longueur au plus $(C+1)\lceil n/k \rceil$ et un lacet γ' défini par le mot $b_1' \ldots b_k' \in \mathcal{F}[k]$ de longueur au plus $Ck\lceil n/k \rceil$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\text{aire}(\gamma) &\leq \sum_{i=1}^{k} \text{aire}(\gamma_i) + \text{aire}(\gamma') \\
&\leq k\delta\left((C+1)\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right) + \delta_{\mathcal{F}[k]}\left(Ck\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil\right).
\end{aligned}$$

□

Proposition 5.4.3. *Supposons que $\mathcal{F}$ est efficace, et qu'il existe $\xi > 1$ tel que pour tout entier $k \geq 1$, il existe une constante a_k telle que $\delta_{\mathcal{F}[k]}(n) \leq a_k n^\xi$ pour tout entier n. Alors il existe une constante C' telle que $\delta(n) \leq C' n^\xi$ pour tout entier n.*

Preuve. Soit $k \geq 1$. D'après le lemme 5.4.2, on a

$$\delta(n) \leq a_k(2C)^\xi n^\xi + k\delta\left((C+1)\frac{2n}{k}\right)$$

pour tout entier $n \geq k$. Quitte à augmenter la constante a_k, on peut supposer que l'inégalité précédente a lieu pour tout entier $n \geq 1$. On est alors dans les conditions d'application du lemme 5.4.1 avec $u_k(x) = a_k(2C)^\xi x^\xi$, ce qui nous donne le résultat souhaité. □

5.5 Preuve du théorème

Revenons en au groupe G du théorème 5.1.6. Quitte à raffiner la décomposition en somme directe, on peut supposer que chaque V_i est un corps local K_i sur lequel A agit par multiplication scalaire. Fixons une norme sur chaque K_i, et notons S_i l'ensemble des éléments de norme inférieure ou égale à 1. Soit T un système de générateurs fini symétrique pour A, notons $|\cdot|$ la longueur des mots dans A associée à T. Désignons par $\mathcal{F}$ l'ensemble des mots de la forme

$$\left(\prod_{i=1}^{m} t_i v_i t_i^{-1}\right) t,$$

où $v_i \in S_i$ et t_i, t sont des mots en les éléments de T.

Lemme 5.5.1. *Soit $G = (\oplus_{i=1}^m K_i) \rtimes A$, où chaque K_i est un corps local muni d'une action de A par multiplication scalaire. Si l'on suppose que pour tout entier i il existe un élément de A qui agit par contraction sur K_i, alors $\mathcal{F}$ est efficace.*

Preuve. Notons $\lambda_i(t) \in K_i^*$ l'élément par lequel $t \in T$ agit sur K_i par multiplication, et définissons les constantes $c = \min_i(\max_t ||\lambda_i(t)||)$ et $C = \max(2, \max_{i,t} ||\lambda_i(t)||)$. Par hypothèse, on a $c > 1$. Toujours d'après l'hypothèse d'action par contraction sur chacun des facteurs, on en déduit que $\cup S_i \cup T$ est un système de générateurs du groupe G.

Commençons par montrer le fait suivant : tout mot de longueur inférieure à n relativement à ce système de générateurs représente un élément $xt = ((x_i), t)$ de $\oplus K_i \rtimes A$ vérifiant $||x_i|| \leq C^n$ et $|t| \leq n$. Procédons par récurrence sur n, le cas $n = 1$ étant clair. Pour l'héritage, le cas d'un mot de longueur $n+1$ se terminant par une lettre de T est évident, il nous suffit donc de traiter le cas d'un mot du type xtv, $v \in S_i$. De $xtv = x(tvt^{-1})t$, on déduit que l'on doit majorer

$$\begin{aligned} ||x + tvt^{-1}|| &\leq ||x|| + ||tvt^{-1}|| \\ &\leq C^n + C^n \\ &\leq C^{n+1}, \end{aligned}$$

la seconde inégalité provenant de l'hypothèse de réccurence et de la définition de C.

Trouvons désormais une constante K telle que l'on puisse écrire tout élément $((x_i), t)$, avec $||x_i|| \leq C^n$ et $|t| \leq n$, comme produit d'au plus Kn éléments de $\mathcal{F}$, ce qui conclura la preuve. Soit donc $((x_i), t)$ un tel élément. Par définition de c, on peut écrire $x_i = t_i v_i t_i^{-1}$ avec t_i un mot en les éléments de T de longueur au plus

$$\lceil \log_c(C^n) \rceil \leq n \lceil \log_c(C) \rceil,$$

et $v_i \in S_i$. L'élément considéré est donc représenté par le mot $\left(\prod_{i=1}^m t_i v_i t_i^{-1}\right) t \in \mathcal{F}$, dont la longueur est plus petite que $n(2m \log_c(C) + 1)$. □

Nous somme désormais en mesure de démontrer le cas $d \geq 2$ du théorème 5.1.6, dont nous rappelons l'énoncé.

Théorème. *Soit $G = (\oplus_{i=1}^m K_i) \rtimes A$, où chaque K_i est un corps local muni d'une action de $A \simeq \mathbb{Z}^d$ par multiplication scalaire. Si pour toute paire d'entiers i, j il existe un élément du groupe A qui agit par contraction sur K_i et K_j, alors le groupe G a une fonction de Dehn quadratique si $d \geq 2$ et linéaire si $d = 1$.*

Preuve. Prenons toujours $S = \cup S_i \cup T$ comme système de générateurs de G, et définissons les relateurs R comme étant :

- les relations définissant le groupe A associées au système de générateurs T ;
- les relations de longueur 4 de la forme $tst^{-1} = s'$, pour $t \in T$ et $s, s' \in S_i$;
- les relations de longueur 4 de la forme $[s, s'] = 1$, pour $s \in S_i$, $s' \in S_j$;

– les relations de longueur 3 de la forme $ss' = s''$, pour $s, s', s'' \in S_i$.
Nous allons prouver qu'il s'agit bien d'une présentation de G et que la fonction de Dehn associée est $\preccurlyeq n^2$. Si l'on note α la fonction d'aire associée au système de relateurs R et $c(w_1, w_2) = \alpha(w_1^{-1}w_2)$, alors le fait qu'il s'agisse bien d'une présentation de G est équivalent au fait que la fonction coût c prenne des valeurs finies sur les paires de mots (w_1, w_2) homotopes, c'est-à-dire tels que $w_1 \equiv w_2$.

Affirmation 1. *Sous les hypothèses du lemme 5.5.1, il existe une constante C telle que pour tout i, si $v, w \in S_i$ et si s est un mot en les éléments de T de longueur au plus n tel que $svs^{-1} \equiv w$, alors $c(svs^{-1}, w) \leq Cn^2$.*

En effet, soit $t = t_1t_2$ un mot en les éléments de T tel que $s \equiv t$ et toutes les lettres de t_2 contractent K_i et toutes celles de t_1 dilatent K_i. Pour tout suffixe τ_j de t de longueur j, $\tau_j v \tau_j^{-1}$ représente un élément w_j de S_i par construction. Une récurrence sur j fournit la majoration $c(\tau_j v \tau_j^{-1}, w_j) \leq |\tau_j|$, de laquelle on déduit que $c(tvt^{-1}, w) \leq n$. Par ailleurs, puisque la fonction de Dehn de A est quadratique, il existe une constante C_1 telle que $c(s, t) \leq C_1n^2$, et donc

$$\begin{array}{rcl} c(svs^{-1}, w) & \leq & c(svs^{-1}, tvt^{-1}) + c(tvt^{-1}, w) \\ & \leq & 2c(s, t) + c(tvt^{-1}, w) \\ & \leq & 2C_1n^2 + n \\ & \leq & Cn^2, \end{array}$$

ce qui justifie l'affirmation.

Par hypothèse, on dispose d'éléments $s_{i,j}$ qui agissent par contraction sur K_i et K_j. Quitte à rajouter des générateurs, on peut supposer que T contient tous les $s_{i,j}$. Par ailleurs, puisque T est fini, il existe un entier M tel que $s_{i,j}^M t$ contracte à la fois K_i et K_j pour tout $t \in T$.

Affirmation 2. *Il existe une constante C' telle que pour tout n, pour tous mots t, u en les éléments de T de longueur au plus n, et pour tout $(v, w) \in S_i \times S_j$,*

$$\alpha([tvt^{-1}, uwu^{-1}]) \leq C'n^2.$$

Pour alléger les notations, on note désormais $a_n \preceq b_n$ s'il existe une constante C dépendant uniquement du groupe G et de T telle que $a_n \leq Cb_n$ pour tout n. Posons $s = s_{i,j}^{Mn}$, de sorte que st et su contractent K_i et K_j. Il existe $(v', w') \in S_i \times S_j$ tel que $stvs^{-1}t^{-1} \equiv v'$ et $suws^{-1}u^{-1} \equiv w'$. D'après l'affirmation précédente, $c(stvs^{-1}t^{-1}, v') \preceq n^2$, $c(suws^{-1}u^{-1}, w') \preceq n^2$, et donc

$$\begin{array}{rcl} \alpha([tvt^{-1}, uwu^{-1}]) & = & \alpha([stvt^{-1}s^{-1}, suwu^{-1}s^{-1}]) \\ & \leq & \alpha([v', w']) + 2c(stvt^{-1}s^{-1}, v') + 2c(suwu^{-1}s^{-1}, w') \\ & = & 1 + 2c(stvt^{-1}s^{-1}, v') + 2c(suwu^{-1}s^{-1}, w') \\ & \preceq & n^2. \end{array}$$

On note toujours $\mathcal{F}$ l'ensemble de mots efficace du lemme 5.5.1. Nous allons montrer que pour tout entier k_0, il existe une constante C_{k_0} telle que $\delta_{\mathcal{F}[k_0]}(n) \leq C_{k_0} n^2$. D'après la proposition 5.4.3, cela implique que la fonction de Dehn de G est quadratique. Soit donc k_0 un entier fixé, et soit w un mot de $\mathcal{F}[k_0]$ de longueur au plus n qui représente l'élément trivial du groupe. On peut toujours écrire $w = \prod_{j=1}^{R} t_j v_j$ avec $R = mk_0$, t_j un mot en les éléments de T de longueur au plus n, et v_j un élément de $\cup S_i$. En posant $u_j = t_1 \ldots t_j$, on obtient l'égalité

$$w = \left(\prod_{j=1}^{R} u_j v_j u_j^{-1} \right) u_R.$$

Comme ce mot représente l'élément trivial du groupe, on a $u_R \equiv 1$ et $\alpha(u_R) \preceq n^2$. En appliquant au plus R^2 relations du type $[u_j v_j u_j^{-1}, u_k v_k u_k^{-1}]$, chacune d'entre elles ayant une aire $\preceq n^2$ d'après l'affirmation précédente, on peut écrire le produit ci-dessus, en rassemblant les termes correspondant au même S_i, sous la forme

$$\prod_{i=1}^{m} w_i$$

avec un coût $\preceq n^2$. Ici chaque w_i est un mot représentant l'élément trivial du groupe de la forme

$$w_i = \prod_{k=1}^{R_i} u_{j(i,k)} v_{j(i,k)} u_{j(i,k)}^{-1},$$

avec $\sum R_i = R$ et $v_{j(i,k)} \in S_i$. Il nous suffit désormais de prouver que l'aire de chaque w_i est $\preceq n^2$. Soit $s = s_{i,i}^{MRn}$, de telle sorte que $s u_{j(i,sk)} v_{j(i,k)} u_{j(i,k)}^{-1} s^{-1}$ représente un élément $x(i,k) \in S_i$. D'après la première affirmation, on a

$$c(s u_{j(i,sk)} v_{j(i,k)} u_{j(i,k)}^{-1} s^{-1}, x(i,k)) \preceq n^2,$$

ce qui nous ramène à majorer l'aire du mot $x(i,1) \ldots x(i,R_i)$, qui est bornée par la constante R. Chaque mot w_i a donc une aire $\preceq n^2$ et donc le mot w également.

On pourrait également utiliser ce qui précède pour obtenir une preuve du théorème dans le cas $d = 1$. En effet, la même preuve montre que la fonction $\delta_{\mathcal{F}[k_0]}$ a une croissance linéaire pour tout entier k_0. On ne peut cependant pas appliquer la proposition 5.4.3 pour $\xi = 1$ pour en déduire que la fonction de Dehn du groupe G est linéaire. Néanmoins, on peut l'appliquer pour $\xi = 3/2$ pour obtenir que la fonction de Dehn est asymptotiquement bornée par $n^{3/2}$, et est donc sous-quadratique. Un résultat général permet alors de conclure qu'elle est linéaire (voir par exemple [2]). $\square$

Bibliographie

[1] G. Baumslag. A finitely presented metabelian group with a free abelian derived group of infinite rank. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 35(1), 1972.

[2] B. Bowditch. A short proof that a subquadratic isoperimetric inequality implies a linear one. *Michigan Mathematical Journal*, 42(1), 1995.

[3] M. Bridson. The geometry of the word problem. *Invitations to Geometry and Topology*, 2001.

[4] M. Bridson and A. Haefliger. *Metric spaces of non-positive curvature*. Springer, 1999.

[5] Y. de Cornulier. Large scale simple connectedness in geometric group theory. `http://www.normalesup.org/~cornulier/math.html`.

[6] Y. de Cornulier. Compactly presented groups. arXiv :1003.3959, 2010.

[7] Y. de Cornulier and R. Tessera. Metabelian groups with quadratic Dehn function and Baumslag-Solitar groups. *Confluentes Mathematici*, 2(4), 2010.

[8] J. Groves and S. Hermiller. Isoperimetric inequalities for soluble groups. *Geometriae Dedicata*, 88, 2001.

[9] M. Kassabov and T. Riley. The Dehn function of Baumslag's metabelian group. Preprint, 2010.

[10] I. Pays and A. Valette. Sous-groupes libres dans les groupes d'automorphismes d'arbres. *L'Enseignement Mathématique*, 37, 1991.

[11] A. Weil. *Basic Number Theory*. Springer-Verlag, 1995.