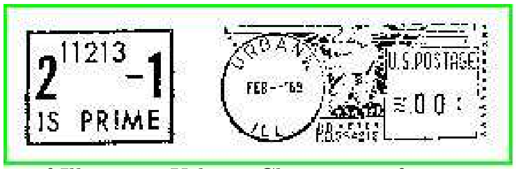


University of Illinois at Urbana Champaign, from 1963 onwards.

Meilleurs voeux pour
Best wishes for
$M_p - a$

où p est premier, M_p est le plus petit nombre de Mersenne $2^p - 1$ composé, et $a > 1$ est le plus petit facteur de M_p.

On sait que tout facteur de M_p est de la forme $kp+1$ (Fermat, Euler). En effet, soit r un facteur premier de $M_p = rs$. Le développement binaire* de $1/r$ a une période qui est $r-1$ ou un facteur de $r-1$ ([2] Thm 88 et (2) p. 110). Mais p est une période, puisque $\frac{1}{r} = \frac{s}{2^p - 1}$. La plus petite période est donc un facteur de p... qui n'en a pas, donc p est la plus courte période, donc divise $r-1$ CQFD. Des démonstrations basées sur un développement binaire ou décimal ne sont pas bien vues, mais Hardy & Wright ([2] chap. IX) ne les dédaignent pas. Le résultat vaut également pour les nombres de Fermat $F_n = 2^{(2^n)} + 1$

Il n'y a que 51 nombres de Mersenne premiers entre M_2 et $M_{82589933}$ [1,5]

Lucas-Lehmer: M_p est premier si et seulement si M_p est un facteur de $L_{2^{p-2}} = (2+\sqrt{3})^{2^{p-2}} + (2-\sqrt{3})^{2^{p-2}}$, calculé par $L_{2^{k+1}} = (L_{2^k})^2 - 2 : p = 3 : L_2 = 14, L_4 = 194, p = 5 : L_8 = 37634 = 31 \times 1214$, etc. Pour Fermat: F_n est premier s'il divise $3^{(F_n - 1)/2} + 1$: $10 = 5 \times 2, 3^8 + 1 = 17 \times 386$, etc. [1] chap.4.

*Par le petit théorème de Fermat, $2^{r-1} - 1$ est un multiple de r, il existe t entier tel que $2^{r-1} - 1 = rt$, ou $\frac{1}{r} = \frac{t}{2^{r-1} - 1} = \frac{t}{2^{r-1}} + \frac{t}{4^{r-1}} + \frac{t}{8^{r-1}} + \cdots$, répétition d'une cellule de $r-1$ positions contenant l'écriture binaire de t.

where p is a prime number, M_p is the smallest non prime Mersenne number $2^p - 1$, and where $a > 1$ is the smallest factor of M_p.

One knows that any factor of M_p has the form $kp+1$ (Fermat, Euler). Indeed, let r be a prime factor of $M_p = rs$. The binary expansion* of $1/r$ has period $r-1$ or a factor of $r-1$ ([2] Thm 88 and (2) p. 110). But p is a period too, as $\frac{1}{r} = \frac{s}{2^p - 1}$. The shortest period is therefore a factor of p ... which is factorless, so p is the shortest period and must be a factor of $r-1$, QED. Proofs based on a binary or decimal expansion are frowned upon, but they were welcome enough with Hardy & Wright ([2] chap. IX). Result also holds for the Fermat numbers $F_n = 2^{(2^n)} + 1$

Only 51 Mersenne numbers between M_2 et $M_{82589933}$ are prime[1,5].

Lucas-Lehmer: M_p is prime only if M_p is a factor of $L_{2^{p-2}} = (2+\sqrt{3})^{2^{p-2}} + (2-\sqrt{3})^{2^{p-2}}$, computed by $L_{2^{k+1}} = (L_{2^k})^2 - 2 : p = 3 : L_2 = 14, L_4 = 194, p = 5 : L_8 = 37634 = 31 \times 1214$, etc. For Fermat: F_n is prime iff it is a factor of $3^{(F_n - 1)/2} + 1$: $10 = 5 \times 2, 3^8 + 1 = 17 \times 386$, etc. [1] chap.4.

*From Fermat's little theorem, r is a factor of $2^{r-1} - 1$, there is an integer t such that $2^{r-1} - 1 = rt$, or $\frac{1}{r} = \frac{t}{2^{r-1} - 1} = \frac{t}{2^{r-1}} + \frac{t}{4^{r-1}} + \frac{t}{8^{r-1}} + \cdots$, an indefinitely repeated cell of length $r-1$ made with the binary writing of t.

En plus d'âvoir été l'animateur de la réunion des plus grands esprits de son temps, Desargues, Fermat, Étienne et Blaise Pascal, Roberval, Gassendi, et parfois Descartes, Marin Mersenne (1588 - 1648) détermina les propriétés des cordes vibrantes et arriva à la fréquence $f = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

où F est la tension appliquée et μ est la densité linéaire, que l'on vérifie aujourd'hui avec ***l'équation des ondes de d'Alembert*** (résultante des forces = masse × accélération) de solution fondamentale

$$F\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \mu\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$$

$$w = \sin\frac{\pi(x-ct)}{L} + \sin\frac{\pi(x+ct)}{L}$$

$$= 2\sin\frac{\pi x}{L}\cos\frac{\pi ct}{L},\ x \in [0, L].$$

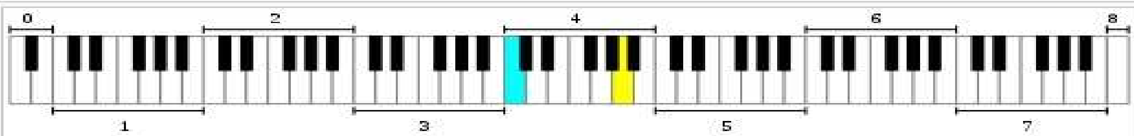
$$(c = \sqrt{F/\mu}).$$

Marin Mersenne (1588 - 1648) was not only the soul of the *société savante* of Desargues, Fermat, Étienne and Blaise Pascal, Roberval, Gassendi, and sometimes Descartes, he also performed valuable acoustic experiments and got the frequency of a vibrating string $f = \frac{1}{L}\sqrt{\frac{F}{\mu}}$

where F is the tension and μ is the mass per unit length, established today from ***d'Alembert wave equation*** (resultant of forces = mass times acceleration) of fundamental solution

Il trouve $f = 2/\text{sec.}$ avec $L = 17.5$ pieds (5.25 m.), F = un poids d'une demi-livre (0.25 kg-poids=2.5 Newton) et une corde faite de "12 intestins de mouton", peut être 0.0225 kg par mètre (Mersenne ne s'occupe que de L et F), on aurait $(1/5.25)\sqrt{2.5/0.0225} = 2.0...$ Avec 10 pouces (0.25 m)et 8 livres (40 N), il a $f = 2 \times \dfrac{17.5}{10/12} \times \sqrt{\dfrac{40}{2.5}} = 168/\text{sec.}$ pour une note ré$_3$, ce qui fait un diapason la$_4 = 168 \times 1.5 \times 2 = 504$ (diapason moderne=440). Voir le dessin d'un clavier moderne avec la nouvelle numérotation des octaves.

He finds $f = 2/\text{sec.}$ with $L = 17.5$ feet (5.25 m.), F = a half pound weight (2.5 Newton) a a string made of "12 mutton bowels", maybe 0.0225 kg per meter (Mersenne only cares for L and F), would give $(1/5.25)\sqrt{2.5/0.0225} = 2.0...$ He also finds $f = 2 \times \dfrac{17.5}{10/12} \times \sqrt{\dfrac{40}{2.5}} = 168/\text{sec.}$ with 10 inches(0.25 m)and 8 pounds (40N) for a tune D$_3$, leading to a standard tune of A$_4 = 168 \times 1.5 \times 2 = 504$ (modern standard tune choice=440) See the picture of a modern keyboard explaining the new octaves numbering.



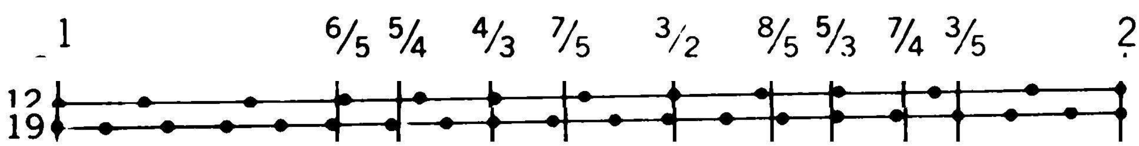
An 88-key piano, with the octaves numbered and middle C (cyan) and **A**$_4$ (yellow) highlighted.

Dans une gamme avec tempérament strictement égal, chaque demi-ton multiplie la fréquence par $2^{1/12} = 1.0595$, ce qui donne $2^{4/12} = 1.2599$ pour une tierce majeure, assez loin du 1.25 pythagoricen ($2^{7/12} = 1.498$ pour la quinte est meilleur).

Steinhaus [7] recommande de diviser plutôt l'octave en 19 demi tons de valeur $2^{1/19}$, ce qui donne $2^{6/19} = 1.2447$ et $2^{11/19} = 1.494$. La dernière fraction du dessin est évidemment 9/5 au lieu de 3/5.

In the equal temperament scale, each halftone multiplies the frequency by $2^{1/12} = 1.0595$, giving $2^{4/12} = 1.2599$ for a major third, not so close to the Pythagorean 1.25 ($2^{7/12} = 1.498$ for the fifth is better).

Steinhaus [7] recommends to divide the octave instead in 19 halftones of value $2^{1/19}$, giving now $2^{6/19} = 1.2447$ and $2^{11/19} = 1.494$. In the picture from [7], the fraction 3/5 must of course be replaced by 9/5.



Mersenne, qui n'aurait pas fait de mal à une mouche, réclamait les pires châtiments contre les mécréants [8].

Mersenne would not be able to hurt a single fly, but he asked for strong punishments towards unbelievers [8].

[1] Richard Crandall, Carl Pomerance, *Prime Numbers A Computational Perspective*, 2nd Ed., Springer, 2005.

[2] G.H. Hardy, E.M. Wright, *An Introduction to the Theory of Numbers*, Oxford University Press 1960 ,. . . , 1968 (with corrections), 1971, 1975.

[3] `https://rosettacode.org/wiki/Factors_of_a_Mersenne_number`

[4]`https://www.planetmath.org/tableoffactorsofsmallmersennenumbers`

[5] `https://en.wikipedia.org/wiki/Mersenne_prime#List_of_known_Mersenne_primes`

[6] Alain Boudet, histoire de la notion de fréquence sonore,
`https://www.spirit-science.fr/doc_musique/histoire-frequences.html`

[7] Hugo Steinhaus, *Mathematical Snapshots*, Oxford UP, 1950, 3rd Amer. ed., 1969.

[8] M.Mersenne, *L'Impiété des déistes, athées et libertins de ce temps, combatue et renversée de point en point par raisons tirées de la philosophie et de la théologie, ensemble la réfutation du "Poème des déistes"* ... 1624
`https://archive.org/details/bub_gb_PUpEp_m433YC`

Alphonse Magnus, Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Université catholique de Louvain,
`alphonse.magnus@uclouvain.be` , `https://perso.uclouvain.be/alphonse.magnus`