$$8\left\{4\left[\frac{x^5-5x^3+5x}{2}\right]^3-3\frac{x^5-5x^3+5x}{2}\right\}^3-24\left[\frac{x^5-5x^3+5x}{2}\right]^3+18\frac{x^5-5x^3+5x}{2}=\sqrt{2-2\left(\frac{1}{2}\frac{\sqrt{5}+1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}\right)}$$

Meilleurs voeux pour
Best wishes for

N^2

où N est le degré de l'équation présentée comme un défi (un peu ridicule) par Adrianus Romanus, et qui fut vite résolue (numériquement) par Viète. En fait, Romanus et Viète travaillaient indépendamment sur un même problème, la détermination algébrique des côtés d'un polygone régulier. L'équation est $2T_N(x/2) = 2\sin\alpha$, où T_N est le polynôme de Tchebycheff $\cos(N \arccos)$ et les solutions sont $2\cos((\pi/2-\alpha+2k\pi)/N), k=0,\ldots,N-1$ [1,2].

C'est 200 ans plus tard (1796) que Gauss montra une nouvelle construction à la règle et au compas, avec $N = 17$ ([3], chap.16).

On résout aujourd'hui ces problèmes par l'équation $f(z) = z^n - r^n = 0$ des racines $n^{\text{èmes}}$ complexes de r^n: $\prod_1^n(z - j^{\text{éme}}\text{racine}) = f(z)$. Ainsi un théorème de Cotes, cité par Wessel [4], assurant que le produit des distances d'un sommet aux $n-1$ autres sommets d'un polygone régulier de n côtés vaut nr^{n-1}. Preuve ([4], probablement la preuve de Cotes): le produit des distances $= \prod_{j=2}^n |r - j^{\text{éme}}\text{racine}| = \lim_{z\to r}\left|\frac{z^n-r^n}{z-r}\right|$.

Une courbe du plan définie par un **produit** constant des distances à des points donnés est une **lemniscate**, parfois appelée **cassinienne**, l'astronome J.D. Cassini ayant décidé, sans doute par caprice, que les planètes doivent parcourir de telles courbes au lieu de la **somme** des distances aux foyers des ellipses kepleriennes...

On retrouve une ellipse et le produit des distances aux foyers dans un problème d'électrostatique à deux dimensions: la fonction harmonique nulle sur l'ellipse $2z = (a+b)e^{i\theta}+(a-b)e^{-i\theta}$ est la partie réelle du potentiel logarithmique complexe $\mathcal{V}(z) = \log\frac{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}}{a+b} = i\theta$, la densité de charge est $\frac{d\mathcal{V}}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2+b^2}}$ [5].

where N is the degree of the (rather ridiculous) challenge equation of Adrianus Romanus, easily solved (numerically) by Viète. As it happened, Romanus and Viète did work independently on the same problem, the algebraic determination of the sides of regular polygons. The modern writing is $2T_N(x/2) = 2\sin\alpha$, where T_N is the Chebyshev polynomial $\cos(N \arccos)$ and the roots are $2\cos((\pi/2-\alpha+2k\pi)/N), k=0,\ldots,N-1$ [1,2].

One had to wait 200 years for a new straightedge and compass construction, when $N = 17$ (Gauss, 1796, [3] chap.16) .

Such problems are solved nowadays through the equation $f(z) = z^n - r^n = 0$ of the complex n^{th} roots of r^n: $\prod_1^n(z - j^{\text{th}}\text{root}) = f(z)$. So, a theorem by Cotes, quoted by Wessel [4], telling that the product of distances of a vertex to the $n-1$ other vertices of a regular polygon of n sides is nr^{n-1}. Proof ([4], probably Cotes's proof): the product of distances $= \prod_{j=2}^n |r - j^{\text{th}}\text{ root }| = \lim_{z\to r}\left|\frac{z^n-r^n}{z-r}\right|$.

A plane curve defined by a constant **product** of distances to a given set of points is called a **lemniscate**, sometimes named a **Cassinian**, from the astronomer G.D. Cassini who decided, probably out of pique, that planets must run such curves instead of the **sum** of distances to the focii of Keplerian ellipses...

One recovers an ellipse and the product of distances to the focii in a two-dimensional electrostatics problem: the harmonic function vanishing on the ellipse $2z = (a+b)e^{i\theta}+(a-b)e^{-i\theta}$ is the real part of the complex logarithmic poyential $\mathcal{V}(z) = \log\frac{z+\sqrt{z^2-a^2+b^2}}{a+b} = i\theta$, the density of charge is $\frac{d\mathcal{V}}{dz} = \frac{1}{\sqrt{z^2-a^2+b^2}}$ [5].

[1] Jean-Pierre Tignol, *Galois' Theory of Algebraic Equations*, World Scientific, 2001.

[2]W. Van Assche, Chebyshev polynomials in the 16th century,*J. of Approx. Theory* **279** (2022) 105767.

[3] Mordechai Ben-Ari,*Mathematical Surprises*, Springer 2022. This book is open access, which means that you have free and unlimited access `https://link.springer.com/book/10.1007/978-3-031-13566-8`.

$$\cos(2\pi/17) = \left(-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}\right)\Big/ 16.$$

[4] Caspar Wessel, Om Direktionens analytiske Betegning, et Forsøg, anvendt fornemmelig til plane og sphæriske Polygoners Opløsning. *Den blev forelagt Videnskabernes selskab i Kbh. 10.3.1797* og trykt i skrifterne *Nye Sam. Kong. Dansken Vid. Sels. Skrift.* vol. **V**, 1799. French translation in `https://archive.org/details/essaisurlareprse00wess` and `https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k99681g.image`

[5] Z. Nehari *Conformal Mapping*, McGraw-Hill 1952 = Dover 1975.

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée, Université catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2, B-1348 Louvain-la-Neuve (Belgium)
`alphonse.magnus@uclouvain.be` , `https://perso.uclouvain.be/alphonse.magnus`