Séminaire GSNA
Crime, concomitant et châtiment.
pour des opérateurs de type laplacien.

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Université Catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2,
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgium)
(0)(10)473157 , magnus@anma.ucl.ac.be , http://www.math.ucl.ac.be/~magnus/

This version: April 15, 2004 (incomplete and unfinished)

l'organisation du crime en Amérique rapporte quarante billions de dollars. Revenu d'autant plus lucratif que la Mafia dépense très peu en frais de bureaux.
Woody Allen

Abstract:

Contents

Le ***concomitant bilinéaire*** $B(u,v)$ d'une forme différentielle L est l'expression qui apparaît dans les termes aux limites provenant de la succession d'intégrations par parties joignant $\int_D vLu\,dx$ à $\int_D uL^*v\,dx$, par exemple

$$\int_a^b u''(x)v(x)\,dx = (B(u,v))(b) - (B(u,v))(a) - \int_a^b u(x)v''(x)\,dx,$$

avec $B(u,v) = u'v - uv'$. Pour le laplacien:

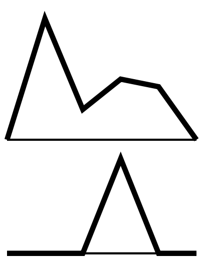
$$\int_D v(x)\Delta u(x)\,dx = \int_{\partial D} (B(u,v))(x)\cdot\vec{n}\,dS - \int_D u(x)\Delta v(x)\,dx,$$

avec $B(u,v) = v\nabla u - u\nabla v$.

1. **Méthodes non criminelles.**

Il n'y a pas crime lorsque la traduction de le forme bilinéaire $a(u,v)$ est distributionnellement correcte.

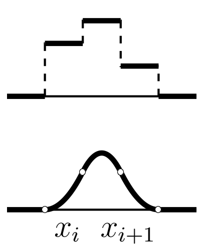
1.1. **Galerkin vrai.**



u et v sont dans le même espace, un espace de fonctions de dérivées de carré intégrable. On prend donc des fonctions continues pour éviter des produits de δ de Dirac.
Les produits d'intégrations par parties aux points de jonction intérieurs se réduisent (si u' est continue):

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(x)v(x)\,dx = (u'v)(x_{i+1}) - (u'v)(x_i) - \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'(x)v'(x)\,dx.$$

1.2. **Petrov.**



On peut très bien prendre u discontinu, si cela est compensé par v très continu, mais on risque de casser la symétrie.

Par exemple, u constant par morceaux, et v spline quadratique $\in \mathscr{C}^1$.
L'intégrale de $u'v'$ est la somme des sauts de u multipliés par les valeurs bien définies de v' aux points de jonction:

$$\int_a^b u'v'\,dx = \sum [u]_{x_i} v'(x_i)$$

Si les inconnues sont les $u_i = u(x_i)_+$, les équations sont

$$[u]_i v_i'(x_i) + [u]_{i+1} v'i(x_{i+1}) = -u_{i-1}v_i'(x_i) + u_i(v_i'(x_i) - v_i'(x_{i+1})) + u_{i+1}v_i'(x_{i+1}) = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} f(x)v_i(x)\,dx.$$

Ça ressemble déjà un peu à un concomitant

1.3. **Forme faible distributionnelle.**

Bien sûr! Si on accentue encore la disymétrie, en portant toutes les dérivations des fonctions d'essai u vers les fonctions test v:

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} u''(x)v(x)\,dx = (u'v)(x_{i+1}) - (u'v)(x_i) - (uv')(x_{i+1}) + (uv')(x_i) + \int_{x_i}^{x_{i+1}} u(x)v''(x)\,dx.$$

D'où une somme résiduelle $\sum_i [uv' - u'v]_i$.

1.4. Un peu d'algèbre: saut d'un produit.

$$
\begin{aligned}
[ab]_i &= a_i^+ b_i^+ - a_i^- b_i^- \\
&= (a_i^+ - a_i^-) b_i^+ + a_i^- (b_i^+ - b_i^-) \\
&= [a]_i \left(\{b\}_i + \frac{[b]_i}{2} \right) + [b]_i \left(\{a\}_i - \frac{[a]_i}{2} \right) \\
&= [a]_i \{b\}_i + [b]_i \{a\}_i .
\end{aligned}
\tag{1}
$$

2. Crimes sans concomitant.

La forme bilinéaire est sommée sur les éléments. On ne fait pas intervenir des valeurs de discontinuités aux frontières intérieures, mais les contraintes doivent être telles que la matrice de rigidité soit non singulière (Ciarlet, Strang, années 70). C'est toujours du Galerkin, on garde la symétrie.

cf. Thomée [7], pp.26-27:

“ In some situations one may want to use finite element spaces S_h defined by piecewise polynomial approximating functions on a partition $\mathscr{T}_h$ of Ω which are not continuous across interelement boundaries, so called nonconforming elements. Assuming Ω polygonal so that it is exactly a union of elements τ, one may introduce a discrete bilinear form by $D_h(\psi, \chi) = \sum_{\tau \in \mathscr{T}_h} (\nabla\psi, \nabla\chi)_\tau$. Provided S_h is such that $\|\chi\|_{1,h} = D_h(\chi, \chi)^{1/2}$ is a norm on S_h, a unique nonconforming finite element solution u_h of $-\Delta u = f$ in Ω with $u = 0$ on $\partial\Omega$ is now defined by $D_h(u_h, \chi) = (f, \chi)$ for $\chi \in S_h$, and it was shown in Strang (1972) that

$$
\|u_h - u\|_{1,h} \leqslant C \inf_{\chi \in S_h} \|u - \chi\|_{1,h} + C \sup_{\chi \in S_h} \frac{|D_h(u, \chi) - (f, \chi)|}{\|\chi\|_{1,h}}, \tag{5.12}
$$

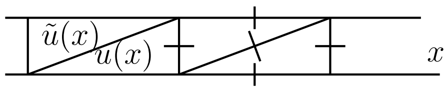
As an example, consider an axes parallel rectangular domain, partitioned into smaller such rectangles with longest edge $\leqslant h$, and let S_h be piecewise quadratics which are continuous at the corners of the partition. Then $\|.\|_{1,h}$ is a norm on S_h. In Wilson's rectangle, the six parameters involved on each small rectangle are determined by the values at the corners plus the (constant) values of $\partial^2\chi/\partial x_l^2$, $l = 1, 2$. The functions in S_h are not in $C(\overline{\Omega})$ but using (5.12) one may still show $\|u_h - u\|_{1,h} \leqslant C(u)h$.

The analysis above assumes that all inner products are calculated exactly. An analysis where quadrature errors are permitted was also worked out by Strang (1972). For instance, if (f, χ) is replaced by a quadrature formula $(f, \chi)_h$, a term of the form $C \sup_{\chi \in S_h} |(f, \chi) - (f, \chi)_h| / \|\nabla\chi\|$ has to be added to the bound for $\|\nabla(u_h - u)\|$. For example, if the quadrature formula is exact on each element for constants and if $f \in W_q^1(\Omega)$ with $q > 2$, then the $O(h)$ error for $\|\nabla(u_h - u)\|$ is maintained. The situations when curved boundaries, nonconforming elements, or quadrature errors occur, so that the basic assumptions of the variational formulation are not satisfied, are referred to in Strang (1972), as variational crimes. ” fin de citation.

Et Braess [2, chap. 3] dit bien que l'analyse des méthodes non conformes conduit aussi aux méthodes de différences et de volume fini!

2.1. **Un crime à une dimension.**

Méthodes initialement prévues pour des problèmes d'ordre élevé, par exemple plaque avec triangles de Morley (degré 2, valeurs aux sommets et dérivées normales aux milieux des côtés [3, § 8.x].



Réduction à une dimension: on prend un long rectangle avec conditions naturelles sur les longs côtés, donc $\partial u/\partial y = 0 \Rightarrow u$ ne dépend plus que de x, ce qui est le but de la manœuvre (Atkinson [1, § 8.3]).

On se rapproche effectivement d'une méthode aux différences:

Sur le même intervalle (x_{i-1}, x_i), on considère les deux fonctions du second degré

$u(x) = u_{i-1}(x_i - x)/h_{i-1} + u_i(x - x_{i-1})/h_{i-1} + \alpha_i(x - x_{i-1})(x - x_i)$,

$\tilde u(x) = u_{i-1}(x_i - x)/h_{i-1} + u_i(x - x_{i-1})/h_{i-1} + \beta_i(x - x_{i-1})(x - x_i)$.

La continuité de la dérivée demande que la valeur de $u'(x_i)$ coïncide avec celle de $\tilde u'$ provenant de l'intervalle (x_i, x_{i+1}):

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}} + \alpha_i h_{i-1} = \frac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \beta_{i+1} h_i.$$

On voit poindre la différence (divisée) seconde $[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]_u := 2\dfrac{\dfrac{u_{i+1} - u_i}{h_i} - \dfrac{u_i - u_{i-1}}{h_{i-1}}}{h_{i-1} + h_i}$ de u!

Pour résoudre le problème de poutre $u'''' = f$, on minimise

$$\sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{(u''(x))^2 + (\tilde u''(x))^2}{2} - [u(x) + \tilde u(x)] f(x)\, dx, \text{soit} \sum_i \left[2(\alpha_i^2 + \beta_i^2) h_{i-1} - (u_{i-1} + u_i) f_{i+1/2} h_{i-1}\right].$$

Minimiser $\alpha_i^2 h_{i-1} + \beta_{i+1}^2 h_i$ sachant que $\alpha_i h_{i-1} + \beta_{i+1} h_i = s \Rightarrow \alpha_i = \beta_{i+1} = [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]/2$.

Enfin, $\dfrac{\partial}{\partial u_i}\left[\sum_i \dfrac{1}{2}(h_{i-1} + h_i)[x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]^2 - u_i(f_{i+1/2} h_{i-1} + f_{i+3/2} h_i)\right] =$

$$[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]\frac{1}{h_{i-1}} - [x_{i-1}, x_i, x_{i+1}]\left(\frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}\right)[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]\frac{1}{h_i} - f_{i+1/2} h_{i-1} - f_{i+3/2} h_i = 0$$

pratiquement un traitement de différences.

3. **Convergence par consistance et stabilité.**

A partir du moment où on s'écarte de la logique éléments finis, on se rapproche d'une analyse de méthode aux différences: l'opérateur L étant approché par L_h, on apprécie l'écart entre la solution u_h du problème numérique $L_h u_h = f$ et la solution théorique de $Lu = f$ par

$$\begin{aligned} \|u_h - u\| &= \|L_h^{-1} f - u\| \\ &= \|L_h^{-1}[f - L_h u]\| \\ &\leqslant \underbrace{\|L_h^{-1}\|}_{\substack{\text{stabilité}\\ \text{numérique}}}\ \underbrace{\|(L - L_h)u\|}_{\text{consistance}} \end{aligned} \tag{2}$$

4. L'article de Süli *et al.*.

4.1. Le schéma.

Pour le problème $-u'' = f$:

on admet pour u et v des polynômes par morceaux sans aucune contrainte, mais une espèce de concomitant est introduit:

$$\int_a^b f(x)v(x)\,dx = \sum_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} u'v'\,dx + [v]_i\{u'\}_i - [u]_i\{v'\}_i$$

à quoi il est prudent d'ajouter un terme de pénalité-régularisation $\sigma[u][v]$.

Allons bon. Naïvement, on prendrait:

$$-\int_{x_i}^{x_{i+1}} u"v = \int_{x_i}^{x_{i+1}} u'v' - (u'v)(x_{i+1}) + (u'v)(x_i),$$

soit une somme $\sum_i [u'v]_i$, qui se développe, selon (1), en $[u']_i\{v\}_i + [v]_i\{u'\}_i$. Si u est une solution $\mathscr{C}^1$, il n'y a pas de saut de u', reste donc $[v]_i\{u'\}_i$.

Pourquoi retirer $[u]_i\{v'\}_i$? Si u' est continue, u l'est encore plus, si j'ose dire, il n'y a donc pas de saut de u non plus, c'est dingue!

4.2. Tentative d'explication.

Ce que nous venons de discuter est ce qui se passe quand on introduit la solution théorique dans le schéma numérique: c'est une discussion de ***consistance*** $L_h u - f = (L_h - L)u$. Nous avons vu que la suppression du terme $[u']_i\{v\}_i$ ne détruit pas la qualité de l'erreur de consistance. Il en est de même pour l'introduction de $-[u]_i\{v'\}_i$. Donc, opération blanche. Mais alors, où est l'intérêt?

Des termes aux frontières intérieures de type concomitant ***s'annulent*** quand $u = v$. Donc, la forme quadratique $(v, L_h v)$ se confond avec (v, Av), où A est la matrice de rigidité ordinaire d'un problème de Galerkin, matrice symétrique et définie positive, donc, en adaptant la propriété de ***coercivité*** d'un problème bien posé de type laplacien:

$$c\|v\|^2 \leqslant (v, L_h v) \leqslant \|v\| \;\; \|L_h v\|,$$

d'où $\|L_h v\| \geqslant c\|v\|$ et $\|L_h^{-1}\| \leqslant c^{-1}$.

Tout ce qui précède est quelque peu oversimplifié, on ne détaille pas trop le calcul de consistance, les normes (de vecteurs? de fonctions?) utilisées, etc.

5. References.

[1] K. Atkinson, W. Han, *Theoretical Numerical Analysis, A Functional Analysis Framework*, Springer-Verlag, 2001. Lectures in Mathematics - ETH Zürich

[2] D. Braess, *Finite Elements. Theory, Fast Solvers and Applications in Solid Mechanics* , 2nd edition, Cambridge University Press 2001.

[3] Brenner, Susanne C., Scott, L. Ridgeway, *The Mathematical Theory of Finite Element Methods (Texts in Applied Mathematics*, Vol **15**), 2nd Ed 385 pages, Springer-Verlag New York Inc., Jul. 2002.

[4] S. Nicaise, *Analyse numérique et équations aux dérivées partielles. Cours et problèmes résolus*, Dunod, Paris, 2000.

[5] K. Polthier, Unstable Periodic Discrete Minimal Surfaces, *in*: *Nonlinear Partial Differential Equations*, S. Hildebrandt and H. Karcher (Eds.) Springer Verlag (2002), pp. 127-143.
`http://www-sfb288.math.tu-berlin.de/~konrad/articles/alignment/alignmentFinal.pdf`
`http://www.zib.de/polthier/articles/alignment/alignmentFinal.pdf`

[6] Süli, Endre; Schwab, Christoph; Houston, Paul: *hp*-DGFEM for partial differential equations with nonnegative characteristic form. *in* Cockburn, Bernardo (ed.) et al., *Discontinuous Galerkin methods. Theory, computation and applications. 1st international symposium on DGM, Newport, RI, USA, May 24-26, 1999*. Berlin: Springer. Lect. Notes Comput. Sci. Eng. **11**, 221-230 (2000). preprint in `http://caeconsulting.be/gsna/protected/NA-99-02.ps.gz`

[7] V. Thomée, From finite differences to finite elements. A short history of numerical analysis of partial differential equations, *J. Comp. Appl. Math.* **128** (2001) 1-54.