Analyse discrète.

Gaspard Bangerezako

Université du Burundi, Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, B.P. 2700 Bujumbura, Burundi. E-mail: gbang@avu.org.

Avant propos. Nous discutons des questions d'introduction au calcul différentiel et intégral et aux équations différentielles sur des réseaux spéciaux nonuniformes.

1 Introduction.

Qu'est-ce que c'est l'analyse discrète?

Par analyse continue, nous entendons de l'analyse mathématique introduite sur R^n ou C^n ou tout autre sous ensemble continu (continium) de ceux-ci. Ansi, par analyse discrète nous entendons l'autre analyse mathématique c'est à dire celle introduite cette fois non pas sur R^n ou C^n mais sur un sous ensemble fini ou dénombrable de ceux-ci.

Historique de l'analyse discrète.

L'analyse discrète entant que outils mais pas entant que sciences semble être l'une des plus vielles branches moyennageuses des mathématiques, l'une de ses plus primitives et plus constantes illustrations étant le calcul digital (l'usage des doigts de la main humaine). Cependant l'analyse discrète ayant pour outils la seule main humaine (cette fois au sens moderne : "by hand"), elle ne pouvait pas supporter à elle seule le volume de calculs de plus en plus croissant à effectuer tant en mathématiques pures qu'appliquées. Pour lui emboiter le pas, un effort massif fut porté dès le 17ème siècle, au developement des méthodes de l'analyse continue, ce qui a conduit en particulier aux merveilles du "passage à la limite" introduit et developé aux 17-18èmes siècles principalement par Newton et Lagrange.
Au milieu du 20ème siècle, quand apparurent les premières machines calculatrices automates assez performantes, l'intérêt à l'analyse discrète reprit

vigueur et croit maintenant exponentiellement. Au courant des seules années 1990-2000, on a enregistré un nonmbre surprenant de colloques internationaux consacrés aux seuls phénomènes discrets (Montreal (1996), Dubna (1998), Rome (2001),...).
Les initiatives primordiales de l'analyse discrète furent naturelement celles de dériver les analogues discrèts des principaux résultats de l'analyse continue. A ce niveau un pas majeur fut effectué: En nous limitant aux seules années après 1980, nous pouvons nous réferer avec des risques de nous tromper aux contributions de A P Magnus en théorie des réseaux [10, 11], A P Magnus, N Nikiforov, V Uvarov, R Askey et J Wilson en polynômes orthogonaux [1, 10, 11, 14], A P Veselov, J Moser et S Maeda en systèmes complètement intégrables [13, 15, 9], A Ramani , B Grammaticos et V Papageorgiou en intégrabilité de Painlevé , en théorie de confinement des singularités et en algorithmes numériques [16, 17, 18], A Wadzow , J D Logan et S Maeda en calcul variationnel et contrôle optimal [4, 12, 7, 8], C Carduneanu en phénomènes presques périodiques [4].

Motivation de l'analyse discrète.

L'analyse discrète quoique introduite sur réseaux (un ensemble discret) n'est pas pour autant un cas partculier de l'analyse continue. Au contraire, dans les traitements de l'analyse discrète il existe toujours un paramètre (souvent dénoté h, ω ou q), de telle manière que lorsqu'on fait passer ce paramètre à la limite, on arrive à l'analyse continue. La 1ère motivation de l'analyse discrète est donc la généralisation de l'analyse continue.
Rappelons-nous que l'intérêt majeur porté à l'analyse continue était motivé au départ par l' abscence de machines calculatrices performantes pour effectuer des calculs digitaux gigantesques. Dès l'apparution de celles-ci, c'était à l'analyse continue de bénéficier de cet outils de grande puisance dans le calcul. Et puisque ces machines ne travaillent qu'avec des données discrètes (leurs "mémoires" (quoique rapides!) ne peuvent contenir qu'un nombre fini de données), il faut donc nécessairement discrétiser l'analyse continue. C'est la 2ème motivation de l'analyse discrète.
Une troisième motivation de l'analyse discrète et pas la moindre est que la plus part des phénomènes dans la nature sont interprétés par des équations aux différences (discrètes) (l'équation de Fibonacci en biologie notament dans la reproduction animale, l'équation du prix du marché en microéconomie, le système de Heisemberg dans le jeu des billards, l'équation logistique de Pielou en démographie, ...).

Difficultés propres à l'analyse discrète.

M'addressant au jeune lecteur, principal destinateur de cet article (c'était là l'esprit primordial de ces séminaires), je dois lui avouer que les 1ers pas en analyse discrète ne sont pas faciles: Finies les favorites recettes que l'on a fini par croire qu'elles font partie intégrante de nous mêmes dès l'école secondaire jusqu' à l'université: En 2ème année candidature section Sciences, quand j'ai demandé ce que c'était une dérivée d'une fonction (notion de séconde humanités générales) la réponse que l'auditoire m'a donné commencait par ce que je redoutais le plus: "Par example"..., Par exemple dérivée de $sinx = cosx, ...$ En 2ème licence Math cette fois, en répondant à la question de savoir ce que c'était l'intégrale de Riemann d'une fonction (1ère année université), 99 pour cent de l'auditore m'a sympatiquement écrit la formule de Newton-Leibnitz (1ère année humanités générales) et sans doute attendait ensuite impatiament de savoir pourquoi je leur addressais une question aussi facile. Même en analyse continue, toutes ces reccettes ne sont vraies que sous certaines conditions, grâce à quoi elles peuvent être motivés et justifiées. En analyse discrète, non seulement les recetttes de l'analyse continue ne marhent plus mais aussi sont rares les démonstrations des résultats de l'analyse continue transmissibles aux versions discrètes des mêmes résultats. En réalité, vu de l'analyse discrète, l'analyse continue semble coutumière.

Etat des lieux de l'analyse discrète.

Les fantastiques developements de l'analyse discrète enregistrés dès les années 1970, 80 et évoqués ci-haut ne concernent(en grande partie) en réalite qu'une seule branche de de l'analyse discrète. En effet en théorie des réseaux obtenue par A P Magnus au tournant des années 1990, on distingue principlalement trois types de réseaux: Par ordre de complexité croissante, on a le réseau linéaire, le réseau q-linéaire, le réseau nonlinéaire et finalement le réseau q-nonlinéaire. En déhors de la théorie des polynômes orthogonaux qui est déjà developpée sur les quatres types de réseaux, les autres developements ci-haut cités concernent presque exclusivement l'analyse discrète sur le seul réseau linéaire.

Pour terminer cette introduction, notons que vu le caractère culturel et pédagogique recommandé pour ces séminaires, le but de ce travail, n'est pas de discuter des questions de l'analyse discrète concernant un domaine pointu

particulier, mais plutôt de discuter des questions d'introduction à l'analyse discrète (calcul différentiel, calcul intégral et équations différentielles) sur des réseaux généraux (c-à-d non linéaires) dits spéciaux nonuniformes. Nous noterons que dans le cas du réseau linéaire, ce que l'on rencontrera ici et beaucoup plus, est bien connu et par conséquent ne sera pas traité ici.
Signalons finalement que l'essentiel du contenu des sections 2.1 (sauf les formules (10,11,12,13) qui sont les nôtres), 31.1,3.2 et 3.3 est tiré des travaux de A P Magnus [10, 11], tandis que le contenu des sections 2.2 et 3.4 (sauf la formule (41) qui est de A P Magnus) est le nôtre.

2 Calcul différentiel et intégral sur réseaux.

2.1 Dérivation sur réseaux.

Nous cherchons tout naturellement deux fonctions discrètes $x(s)$ et $y(s)$, $s \in Z^+$ telles que la dérivée aux différences divisées

$$\mathcal{D}f(x(s)) =^{def} \tfrac{f(y(s+1))-f(y(s))}{y(s+1)-y(s)} \tag{1}$$

donne, lorsqu'elle est appliquée à un polynôme en $x(s)$ de degré n, un polynôme en $x(s)$ de degré $n-1$. La condition nécessaire immédiate est que $x(s)$ et $y(s)$ doivent vérifier la relation

$$F(x(s), y(s)) = 0; \quad F(x(s), y(s+1)) = 0 \tag{2}$$

oú

$$F(x, y) = ay^2 + 2bxy + cx^2 + 2dy + 2ex + f \tag{3}$$

est une courbe du second degré.
Une étude plus poussée produit que [10]

$$\begin{aligned} x(s) &= Aq^s + Bq^s + C \\ y(s) &= \hat{A}x(s-1/2) + \hat{B}. \end{aligned} \tag{4}$$

oú $A, B, C, \hat{A}$ et $\hat{B}$ sont des constantes en s. La paire $(x(s), y(s))$ est dite *réseau spécial nonuniforme*. De simple simplifications et passages à la limite conduisent à 4 formes canoniques pour (4):

$$\begin{aligned} &(a) \quad x(s) = \tfrac{q^s+q^{-s}}{2}, y(s) = \hat{A}x(s-1/2) + \hat{B}; \\ &(b) \quad x(s) = s(s+1), y(s) = \hat{A}x(s-1/2) + \hat{B}; \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&(c) \quad x(s) = q^s, y(s) = \hat{A}x(s-1/2) + \hat{B}; \\
&(d) \quad x(s) = s, y(s) = \hat{A}x(s-1/2) + \hat{B}.
\end{aligned} \tag{5}
$$

Au cours de cela, les côniques correspondantes sont alors une *ellipse* ou une *hyperbole* pour le réseau (a), une *parabole* pour le réseau (b), *deux droites concourantes* pour le réseau (c) et *deux droites parallèles* pour le réseau (d). Les réseaux les plus importantes sont ceux de (a), (c) et (d). Ce qui conduit aux trois dérivées aux différences divisées les plus importantes:

$$
\begin{aligned}
(a) \quad (\mathcal{D}f)(x(s)) &= \tfrac{f(x(s+1/2))-f(x(s-1/2))}{x(s+1/2)-x(s-1/2)} \\
&= \tfrac{f(x(zq^{1/2}))-f(x(zq^{-1/2}))}{x(zq^{1/2})-x(zq^{-1/2})} \\
x(s) &= \tfrac{q^s+q^{-s}}{2}; y(s) = x(s-1/2) \\
x(z) &= \tfrac{z+z^{-1}}{2}; z = q^s
\end{aligned} \tag{6}
$$

$$
(c) \quad D_q f(x) = \tfrac{f(qx)-f(x)}{qx-x}; x = q^s = y \tag{7}
$$

$$
(d) \quad \Delta f(x) = f(x+1) - f(x); x = s = y \tag{8}
$$

Clairement,

$$
\lim_{q\rightsquigarrow 1} \mathcal{D}f = \lim_{q\rightsquigarrow 1} D_q f = Df \tag{9}
$$

Dérivée du produit.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}(fg))(x(s)) &= f(y(s+1))\mathcal{D}g(x(s)) + g(y(s))\mathcal{D}g(x(s)) \\
&= g(y(s+1))\mathcal{D}f(x(s)) + f(y(s))\mathcal{D}g(x(s))
\end{aligned} \tag{10}
$$

Dérivée du quotient.

$$
(\mathcal{D}(f/g))(x(s)) = \tfrac{g(y(s))\mathcal{D}f(x(s))-f(y(s))\mathcal{D}g(x(s))}{g(y(s+1))g(y(s))} \tag{11}
$$

Dérivée d'une fonction composée.

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{D}(f(g))(x(s)) &= \tfrac{f(g(y(s+1)))-f(g(y(s)))}{g(y(s+1))-g(y(s))} . \tfrac{g(y(s+1))-g(y(s))}{y(s+1)-y(s)} \\
&=^{def} (D_g f).D_y g
\end{aligned} \tag{12}
$$

Dérivée d'une fonction inverse. Soit $z = f(x)$. De cela découle que $x = f^{-1}(z)$ oú f^{-1} est la fonction inverse à f. Dérivant les deux membres de l'équation par rapport à x, on obtient

$$
\begin{aligned}
1 &= \tfrac{f^{-1}(z(y(s+1)))-f^{-1}(z(y(s)))}{y(s+1)-y(s)} \\
&= \tfrac{f^{-1}(z(y(s+1)))-f^{-1}(z(y(s)))}{z(y(s+1))-z(y(s))} . \tfrac{z(y(s+1))-z(y(s))}{y(s+1)-y(s)} \\
&=^{def} \mathcal{D}_z f^{-1} . \mathcal{D}_x z
\end{aligned}
$$

D'oú

$$\mathcal{D}_z f^{-1} = \frac{1}{\mathcal{D}_x z} \tag{13}$$

2.2 Intégration sur réseaux.

Sans perte de généralités et pour questions de simplicité, nous considérons dans la suite le réseau (a): $x(s) = \frac{q^s+q^{-s}}{2}$; $y(s) = x(s-1/2)$. Il est obtenu du réseau général (4) par d'insignifiantes transformations de variables. De plus, les réseaux (b), (c) et (d) s'obtiennent de lui comme des cas particuliers. Dans ce cas, posons

$$\mathcal{D}f(x(s)) = \frac{f(x(s+1/2)-f(x(s-1/2)))}{x(s+1/2)-x(s-1/2)} \tag{14}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{f(x(s+1))-f(x(s))}{x(s+1)-x(s)} = g(x(s+1/2)) \tag{15}$$

$$\Longleftrightarrow f(x(s)) = (1-E_s)^{-1}\{[x(s)-x(s+1)]g(x(s+1/2))\} \tag{16}$$

$$\Longleftrightarrow f(x(s)) = \sum_0^\infty [x(s+i)-x(s+i+1)]g(x(s+i+1/2)), \tag{17}$$

oú $E_s^i h(s) = h(s+i)$, $i \in Z$. D'oú la définition de l'intégrale sur réseaux:

$$\int g(x(s))d_q x(x)(s) =^{def} \sum_0^\infty [x(s+i)-x(s+i+1)]g(x(s+i+\tfrac{1}{2})) \tag{18}$$

ou sous forme de borne supérieure d'intégration variable

$$\begin{aligned} &\int_{x(\infty)}^{x(s)} g(x(s))d_q x(s) \\ &= \sum_0^\infty [x(s+i)-x(s+i+1)]g(x(s+i+1/2)) && (19)\\ &= \sum_{k=s}^\infty [x(k)-x(k+1)]g(x(k+1/2)) && (20)\\ &= \sum_{x(s)}^{x(\infty)} [x(k)-x(k+1)]g(x(k+1/2)). && (21) \end{aligned}$$

L'intégrale définie se définit alors

$$\int_{x(0)}^{x(\infty)} g(x(s))d_q x(s) = \sum_0^\infty [x(s)-x(s+1)]g(x(s+1/2)) \tag{22}$$

Clairement si $g(x)$ est Riemman-intégrable sur $[x(\infty), x(0)]$ (posant $x(0) > x(\infty)$), alors

$$\int_a^b g(x(s))d_q(x(s)) \rightsquigarrow \int_a^b g(x)dx, \quad q \rightsquigarrow 1, \quad a = x(\infty), b = x(0). \tag{23}$$

Remarquons que nous pouvons définir une intégrale définie relativement plus générale que (22):

$$\int_{x(M)}^{x(N)} g(x(s))d_qx(s) = \sum_M^N [x(s) - x(s+1)]g(x(s+1/2)), \tag{24}$$

mais celle-ci n'est une version discrète de l' intégrale de Riemann de $g(x)$ sur $[x(N), x(M)]$ que si $M = 0, N = \infty$. Elle présente donc moins d'intérêt. Comme en analyse continue, nous pouvons à présent discuter les deux

Principes fondamentaux de l'analyse discrète.

(i)

$$\begin{aligned} & D\left[\int_{x(\infty)}^{x(s)} g(x(s))d_qx(s)\right] \\ &= D\left[\sum_{x(s)}^{x(\infty)} [x(k) - x(k+1)]g(x(k+1/2))\right] \\ &= \frac{\left[\sum_{x(s-1/2)}^{x(\infty)} - \sum_{x(s+1/2)}^{x(\infty)}\right][x(k)-x(k+1)]g(x(k+1/2))}{(x(s-1/2)-x(s+1/2))} \qquad (25) \\ &= (x(s-1/2) - x(s+1/2))g(x(s))/(x(s-1/2) - x(s+1/2)) \\ &= g(x(s)) \qquad (26) \end{aligned}$$

cqfd.
(ii)

$$\begin{aligned} \int_{x(\infty)}^{x(s)} (\mathcal{D}f)(x(s))d_qx(s) &= \sum_{x(s)}^{x(\infty)} [x(k) - x(k+1)](\mathcal{D}f)(x(k+1/2)) \\ &= \sum_{x(s)}^{x(\infty)} [x(k) - x(k+1)]\frac{f(x(k+1)) - f(x(k))}{x(k+1) - x(k)} \\ &= f(x(s)) - f(x(\infty)) \qquad (27) \end{aligned}$$

cqfd.

Intégration par parties.

L'équation (10) pour le réseau (a) s'écrit:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(fg)(x(s)) &= f(x(s+1/2))\mathcal{D}g(x(s)) + g(x(s-1/2))\mathcal{D}f(x(s)) \\ &= g(x(s+1/2))\mathcal{D}f(x(s)) + f(x(s-1/2))\mathcal{D}g(x(s)) \qquad (28) \end{aligned}$$

D'oú

$$f(x(s+1/2))\mathcal{D}g(x(s)) = \mathcal{D}(fg)(x(s)) - g(x(s-1/2))\mathcal{D}f(x(s)). \tag{29}$$

En effectuant une sommation de 0 à l' ∞ à gauche et à droite de cette égalité après avoir remplacé s par $s+1/2$ et multiplié les deux membres par $(x(s)-x(s+1))$, on obtient

$$\begin{aligned}&\textstyle\sum_{s=0}^{\infty}(x(s)-x(s+1))f(x(s+1))\mathcal{D}g(x(s+1/2))\\ &=[fg]_{x(\infty)}^{x(0)}-\textstyle\sum_{s=0}^{\infty}(x(s)-x(s+1))g(x(s+1))\mathcal{D}f(x(s+1/2)) \qquad (30)\end{aligned}$$

ou tout simplement

$$\begin{aligned}&\textstyle\int_{x(0)}^{x(\infty)} f(x(s+1/2))\mathcal{D}g(x(s))d_q\\ &=[fg]_{x(\infty)}^{x(0)}-\textstyle\int_{x(0)}^{x(\infty)} g(x(s-1/2))\mathcal{D}f(x(s))d_q. \qquad (31)\end{aligned}$$

Pour clore ce chapitre, illustrons la dérivée et l'intégrale sur réseau par l'exemple suivant:

Soit $f(x)=x^{\alpha}$; $x(s)=q^s=y(s)$; $0<q<1$.

Nous avons pour la q-dérivée $D_q x^{\alpha}=\frac{(qx)^{\alpha}-x^{\alpha}}{qx-x}=\frac{q^{\alpha}-1}{q-1}x^{\alpha-1}\rightsquigarrow \alpha x^{\alpha-1}=\frac{d}{dx}x^{\alpha}$, for $q\rightsquigarrow 1$. Pour la q-intégrale, nous devons distinguer trois cas
(i) $\alpha\geq 0$:
$\int x^{\alpha}d_q x=(1-q)x^{\alpha+1}\sum_{i=0}^{\infty}q^{(\alpha+1)i}=\frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}\rightsquigarrow\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\int x^{\alpha}dx$ for $q\rightsquigarrow 1$.
(ii) $\alpha=-1$:
$\int_0^{\infty}\frac{d_q}{x}=(1-q)\sum_{i=0}^{\infty}1=\infty$.
(iii) $\alpha<0,\alpha\neq -1$:
Si $D_q f=x^{\alpha}\Leftrightarrow\frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}=x^{\alpha}\Leftrightarrow\frac{f(x)-f(q^{-1}x)}{x-q^{-1}x}=q^{-\alpha}x^{\alpha}$
$\Leftrightarrow f(x)=(1-E_{q^{-1}})^{-1}\,[(x-q^{-1}x)q^{-\alpha}x^{\alpha}]$
$=\sum_{i=0}^{\infty}E_{q^{-i}}[(x-q^{-1}x)q^{-\alpha}x^{\alpha}]$; $(E_{q^{-i}}g(x)=g(q^{-i}x))$
$=\frac{1-q}{1-q^{\alpha+1}}x^{\alpha+1}\rightsquigarrow\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}=\int x^{\alpha}dx$, for $q\rightsquigarrow 1$.

De cette manière peuvent se dériver ou s'intégrer tous les polynômes généralisés (à puissances pas nécessairement entières), les fonctions analytiques généralisées, les ploynômes et les séries de Laurent généralisés.

3 Equations aux différences sur réseaux.

Comme pour les équations différentielles, la majorité d'équations aux différences sur réseaux, vous vous en doutez, n'a pas de méthodes de résolution explicites en quadratures. Mais ce qu'il faut comprendre ici et c'est là même un des fondements de l'analyse discrète, c'est que toute équation aux différences peut être résolue *recursivement*, en partant des conditions intitiales, ce qui n'est pas le cas pour les équations différentielles.

3.1 Equations du 1er degré.

Vu que $\mathcal{D}f(x(s)) = g(x(s))$ fait intervenir $f(y(s))$, $f(y(s+1))$ et $x(s)$, une équation du 1er degré devrait prendre la forme

$$F(f(y(s)), f(y(s+1)), x(s)) = 0 \tag{32}$$

ou sous forme de recurrence

$$f(y(s+1)) = H(f(y(s)), x(s)), \quad s = 0, 1, \dots \tag{33}$$

Si nous définissons l'opérateur moyenne μ par $(\mu f)(x(s)) = \frac{f(y(s))+f(y(s+1)}{2}$, alors une équation du 1er degré peut prendre la forme

$$G((\mathcal{D}f)(x), (\mu f)(x), x) = 0 \tag{34}$$

3.2 Equations linéaires du 1er degré.

Elle a la forme

$$A(x(s))(\mathcal{D}f)(x(s)) + B(x(s))(\mu f)(x(s)) + C(x(s)) = 0 \tag{35}$$

Ce qui équivaut à

$$\begin{gathered}(\tfrac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} + \tfrac{B(x(s))}{2})f(y(s+1)) - (\tfrac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} - \tfrac{B(x(s))}{2})f(y(s)) \\ +C(x(s)) = 0\end{gathered} \tag{36}$$

Même dans ce cas, pas de méthode générale non recursive pour sa résolution.

3.3 Equation de Ricatti.

Elle a la forme

$$\begin{gathered}A(x(s))(\mathcal{D})(x(s)) \\ = B(x(s))f(y(s))f(y(s+1)) + C(x(s))(\mu f)(x(s)) + D(x(s))\end{gathered} \tag{37}$$

ou sous forme homographique

$$f(y(s+1)) = \frac{(\frac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} + \frac{C(x(s))}{2})f(y(s)) + D(x(s))}{\frac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} - \frac{C(x(s))}{2} - B(x(s))f(y(s))} \tag{38}$$

C'est A P Magnus qui est à la base de cette équation dont la forme nous laisse à première vue perplexe quand à sa motivation. Au milieu des années 1980, il a étudié la classe des polynômes orthogonaux sur le réseau spécial nonuniforme, dont la fonction de Stieltjes correspondante satisfait à cette équation, avec A, B, C, D des polynômes de degrés respectifs $k+2$, $k+2$, $k+1$ et k respectivement [10]. Dans la suite, il est apparu que la quasi totalité des polynômes connus à nos jours appartient à cette classe. Pour des raisons qui lui sont en grande partie propres, A P Magnus a appelé ces polynômes les *polynômes de Laguerre-Hahn.* Nous noterons que contrairement aux polynômes orthogonaux classiques ($B = 0$ et $k = 0$ dans (37)) ou même semi-classiques ($B = 0$ dans (37)), les polynômes de Laguerre-Hahn et leurs associés satisfont à une équation non pas du second ordre mais du quatrième ordre (cfr [3] et une série de travaux par M Foupouagnigni et coauthors dont [6]).

L'équation de Ricatti se transforme en une équation du second ordre si l'on pose

$$\tfrac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} - \tfrac{C(x(s))}{2} - B(x(s))f(y(s)) = \tfrac{F(s)}{F(s-1)} \tag{39}$$

et on a

$$\begin{aligned} B(x(s+1))F(s+1) = \{&B(x(s))[\tfrac{A(x(s+1))}{y(s+1)-y(s)} - \tfrac{C(x(s+1))}{2}] \\ &-B(x(s+1))[\tfrac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)} - \tfrac{C(x(s))}{2}]\}F(s) \\ &-B(x(s+1))\{(\tfrac{A(x(s))}{y(s+1)-y(s)})^2 - \tfrac{C^2(x(s))}{4}) \\ &+B(x(s))D(x(s))\}F(s-1) \end{aligned} \tag{40}$$

3.4 Equations linéaires du second degré.

Ce sont des équations de la forme

$$\alpha(x(s))f(y(s+1)) + \beta(x(s))f(y(s)) + \gamma(x(s))f(y(s)) = \theta(x(s)). \tag{41}$$

Sauf recursivement, il n'y a bien entendu pas de méthode générale pour leur résolution. Nous pouvons cependant suffisament discuter le problème aux valeurs propres suivant

$$H(z,q)f(x(z)) = \lambda f(x(z)) \tag{42}$$

oú

$$\begin{aligned} H(z,q) &= u(z)E_q + v(z) + w(z)E_q^{-1} \\ E_q^i f(x(z)) &= f(x(q^i z)); \quad x(z) = \tfrac{z+z^{-1}}{2}; \quad z = q^s \end{aligned} \tag{43}$$

Comme dans le cas différentiel, des cas particuliers de (42) possèdent des méthodes de résolution connues[2]. Du point de vue de fonctions spéciales, la solution la plus générale possible de (42) est fournie par les polynômes dits d' Askey-Wilson[1]. Au fait A P Magnus a montré que ces polynômes n'étaient autre chose qu'un cas particulier des polynômes de Laguerre-Hahn avec $B = 0$ et $k = 0$ dans (37).
Du point de vue importante d'autoconjugaison, on peut vérifier que l'application $\rho H \rho^{-1}$, oú

$$\frac{\rho^2(qz)}{\rho^2(z)} = \frac{u(z)}{w(qz)} \frac{x(zq^{-1/2}) - x(zq^{1/2})}{x(zq^{1/2}) - x(zq^{3/2})} \tag{44}$$

transforme $H(z, q)$ en sa forme symétrique formelle

$$w(z) \frac{x(zq^{1/2}) - x(zq^{3/2})}{x(zq^{-1/2}) - x(zq^{1/2})} E_q + v(z) + w(z) E_q^{-1}. \tag{45}$$

Dénotons ensuite par $\ell^2(x(\infty), x(0), \rho^2)$, l'espace au produit scalaire sur réseaux:

$$\begin{aligned}(\psi, \phi)_{\rho^2} = \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \psi(q^(k+1/2))\phi(q^(k+1/2))\rho^2(q^(k+1/2)) \\ [x(q^k) - x(q^{k+1})]\end{aligned} \tag{46}$$

et soit $\ell_0^2(x(\infty), x(0), \rho^2)$ le sous espace de $\ell^2(x(\infty), x(0), \rho^2)$ composé de telles fonctions que

$$\begin{aligned}[u(zq^{-1/2})\rho(zq1/2)[x(z/q) \\ -x(z)][\psi(zq^{1/2})\phi(zq^{-1/2})\psi(zq^{-1/2})\psi(zq^{3/2})]](z=1) = 0.\end{aligned} \tag{47}$$

En ce cas, on vérifie que sur $\ell_0^2(x(\infty), x(0), \rho^2)$, l'opérateur $H(z, q)$ est *symétrique* c-à-d

$$(H\psi, \phi)_{\rho^2} = (\psi, H\phi)_{\rho^2} \quad . \tag{48}$$

Ainsi, deux fonctions propres de (42) correspondant à des valeurs propres distinctes sont orthogonales. Si les fonctions propres vérifiant les conditions indiquées forment en plus un système complet (d'après un résultat bien connu, tel est le cas si les fonctions orthogonales sont des polynômes et que l'intervale d'orthogonalité est fini), alors ce système constitue un élement précieux en aproximation(Rapelez-vous des équations normales).

References

[1] Askey R, Wilson J, Some basic hypergeometric orthogonal polynomials that generalize the Jacobi polynomials, *Mem. Am. Math. Soc.* **54** (1985) 1-55.

[2] Bangerezako G, The factorization method for the Askey-Wilson polynomials, J. Comp. Appl. Math. 107 (1999) 219-232.

[3] Bangerezako G, The fourth order difference equation for the Laguerre-Hahn polynomials orthogonal on special nonuniform lattices, The Ramanujan Journal 5 (2002) 167-181.

[4] Cadzow J A, Discrete calculus of variations, *Int. J. Control,* Vol. 11, no3 (1970) 393-407.

[5] Corduneanu C, Almost periodic discrete processes, *Libertas Math.* **2** (1982) 159-169.

[6] Foupouagnigni M, Ronveaux A, Koepf W, Fourth order q-difference equation for the first associated of the q-classical orthogonal polynomials,*J. Comput. Appl. Math.* 101 (1999), 231-236.

[7] Maeda S, Canonical structures and symmetries for discrete systems, *Math. Japonica* 25, no4 (1980) 405-420.

[8] Maeda S, Lagrangian formulation of discrete systems and concept of difference space, *Math. Japonica* 27, no3 (1982) 345-356.

[9] Maeda S, Completely integrable symplectic mapping *proc. Japan Acad.* 63, Ser. A (1987).

[10] Magnus A P, Associated Askey-Wilson polynomials as Laguerre-Hahn orthogonal polynomials, Springer Lectures Notes in Math. 1329 (Springer, Berlin 1988) 261-278.

[11] Magnus AP, Special nonuniform lattices (snul) orthogonal polynomials on discrete dense sets of points, *J. Comp. Appl. Math.* **65** (1995) 253-265.

[12] Logan J D, First integrals in the discrete variational calculus, *Acquat. Math.* **9**, (1973) 210-220.

[13] Moser J, Veselov A P, Discrete versions of some integrable systems and factorization of matrix polynomials, *Comm. Math. Phys.* **139**, (1991) 217-243.

[14] Nikiforov A, Uvarov V, Polynomial solutions of hypergeometric type difference equations and their classification, *Int. Transf. Spec. func.* N1 **103** (1993) 223-249.

[15] Veselov A P, Integrable maps, *Russian Math. Surveys* 46:5 (1991) 1-51.

[16] Ramani A, Grammaticos B, What is the discrete analogue of the Painlevé property? ANZIAM J. 44 N1 (2002) 21-32.

[17] Papageorgiou V, Grammaticos B, Ramani A, Integrable difference equations and numerical analysis algorithms, in *Symmetries and integrability of difference equations* , CRM Proc. Lecture Notes, 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.

[18] Ramani A, Grammaticos B, Papageorgiou V, Singularity confinement, in *Symmetries and integrability of difference equations*, CRM Proc. Lecture Notes, 9, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1996.