PROPOSITION 4.4. *Supposons que la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ soit orthogonale. Alors la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale si et seulement si les coefficients θ_ν^n vérifient :*

$$(\beta_{2n+2}+\beta_{2n+3})\theta_\nu^{n+1}+\gamma_{2n+2}(\beta_{2n+1}+\beta_{2n+2})\theta_\nu^n=0\ ;\ 0\leq\nu\leq n-1\ ,\ n\geq 1 \tag{4.35}$$

$$\gamma_{n+1}^P=\gamma_{2n+1}\gamma_{2n+2}+(\beta_{2n+2}+\beta_{2n+3})\theta_n^{n+1}+\gamma_{2n+2}(\beta_{2n+1}+\beta_{2n+2})\theta_n^n\neq 0\ ,\ n\geq 0. \tag{4.36}$$

Dans ce cas, la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence :

$$\begin{aligned}&P_0(x)=1\quad,\quad P_1(x)=x-\beta_0^P\\&P_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1}^P)P_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}^P P_n(x)\ ,\ n\geq 0\end{aligned} \tag{4.37}$$

$$\begin{aligned}&\beta_0^P=\gamma_1-\beta_0\beta_1\\&\beta_{n+1}^P=\gamma_{2n+2}+\gamma_{2n+3}+\beta_{2n+2}^2+(\beta_{2n+2}+\beta_{2n+3})\theta_{n+1}^{n+1}\ ,\ n\geq 0\end{aligned} \tag{4.38}$$

De même, la suite $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale si et seulement si les coefficients λ_ν^n vérifient :

$$(\beta_{2n+3}+\beta_{2n+4})\lambda_\nu^{n+1}+\gamma_{2n+3}(\beta_{2n+2}+\beta_{2n+3})\lambda_\nu^n=0\ ,\ 0\leq\nu\leq n-1\ ,\ n\geq 1 \tag{4.39}$$

$$\gamma_{n+1}^R=\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}+(\beta_{2n+3}+\beta_{2n+4})\lambda_n^{n+1}+\gamma_{2n+3}(\beta_{2n+2}+\beta_{2n+3})\lambda_n^n\neq 0\ ,\ n\geq 0 \tag{4.40}$$

Dans ce cas, la suite $\{R_n\}_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence :

$$\begin{aligned}&R_0(x)=1\quad,\quad R_1(x)=x-\beta_0^R\\&R_{n+2}(x)=(x-\beta_{n+1}^R)R_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}^R R_n(x)\quad,\quad n\geq 0\end{aligned} \tag{4.41}$$

$$\begin{aligned}&\beta_0^R=\gamma_1+\gamma_2-(\beta_0\beta_1+\beta_1\beta_2+\beta_2\beta_0)\\&\beta_{n+1}^R=\gamma_{2n+3}+\gamma_{2n+4}+\beta_{2n+3}^2+(\beta_{2n+3}+\beta_{2n+4})\lambda_{n+1}^{n+1}\quad,\quad n\geq 0.\end{aligned} \tag{4.42}$$

Corollaire. Pour chaque suite symétrique et orthogonale $\{S_n\}_{n\geq 0}$ vérifiant :

$$\begin{aligned}&S_0(x)=1\quad,\quad S_1(x)=x\\&S_{n+2}(x)=x\,S_{n+1}(x)-\gamma_{n+1}S_n(x)\quad,\quad n\geq 0\end{aligned}$$

la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale et vérifie :

$$\begin{aligned}&P_0(x)=1\quad,\quad P_1(x)=x-\gamma_1\\&P_{n+2}(x)=(x-\gamma_{2n+2}-\gamma_{2n+3})P_{n+1}(x)-\gamma_{2n+1}\gamma_{2n+2}P_n(x)\quad,\quad n\geq 0\end{aligned}$$

la suite $\{R_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale et vérifie :

$$\begin{aligned}&R_0(x)=1\quad,\quad R_1(x)=x-\gamma_1-\gamma_2\\&R_{n+2}(x)=(x-\gamma_{2n+3}-\gamma_{2n+4})R_{n+1}(x)-\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3}R_n(x)\quad,\quad n\geq 0\end{aligned}$$

On retrouve bien un résultat classique [10].

§5. La quasi-orthogonalité. Applications.

1. La notion de quasi-orthogonalité (d'ordre un) a été introduite dans la résolution du problème des moments et dans les problèmes de quadrature liés à une forme définie positive [21][22].

Definition 5.1. *[23] Soit $u \in \mathcal{P}'$ et $s \in N$. La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à u si elle vérifie :*

$$< u, B_m B_n >= 0 \quad , \quad |n-m| \geq s+1 \tag{5.1}$$

$$\exists r \geq s \quad \text{tel que} \quad < u, B_{r-s} B_r > \neq 0. \tag{5.2}$$

Remarques.

1. Une suite quasi-orthogonale d'ordre zéro est une suite orthogonale dans un sens plus général que celui déjà envisagé.

2. Lorsque la suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est libre, les conditions (5.1) et (5.2) sont équivalentes à

$$\begin{aligned} &< u, x^m B_n(x) >= 0 \quad , \quad 0 \leq m \leq n-s-1 \quad , \quad n \geq s+1 \\ &\exists r \geq s \quad \text{tel que} \quad < u, x^{r-s} B_r(x) > \neq 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

3. Lorsque la forme u est régulière, soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite orthogonale correspondante. Alors toutes les suites $\{B_n\}_{n\geq 0}$ quasi-orthogonales d'ordre $s \geq 1$ par rapport à u sont données par

$$\begin{aligned} &B_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x) \quad , \quad 0 \leq n \leq s-1 \\ &B_n(x) = \sum_{\nu=n-s}^{n} b_{n,\nu} P_\nu(x) \quad , \quad n \geq s \\ &\exists r \geq s \quad \text{tel que } b_{r,r-s} \neq 0 \end{aligned} \tag{5.4}$$

Definition 5.2. *[24][25][26] La suite $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est dite strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à u si elle vérifie (5.1) et*

$$\forall n \geq s :< u, B_{n-s} B_n > \neq 0. \tag{5.5}$$

Remarques.

1) Une telle suite est nécessairement libre et peut donc toujours être normalisée.

2) Une suite strictement quasi-orthogonale d'ordre zéro est une suite (régulièrement) orthogonale et u est régulière. Par contre, si $s \geq 1$ la forme u n'est pas nécessairement régulière. Par exemple, lorsque $\{B_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale par rapport à u_0, elle est alors strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à u_s, qui n'est pas régulière pour $s \geq 1$.

L'utilisation la plus fréquente de la quasi-orthogonalité se fait dans les conditions suivantes :

Soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ une suite normalisée orthogonale par rapport à u régulière ; d'autre part, il existe une forme $\tilde{u}$ telle que la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ soit quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{u}$.

On peut caractériser une telle situation de la façon suivante [27][26] :

Proposition 5.1. *Pour chaque suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ normalisée, régulièrement orthogonale par rapport à u et chaque $\tilde{u} \in \mathcal{P}'$, les énoncés suivants sont équivalents :*

a) La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{u}$.

b) $\exists r \geq s \geq 0$ tels que $< \tilde{u}, P_{r-s} P_r > \neq 0$, $< \tilde{u}, P_n >= 0$, $n \geq s+1$

c) Il existe un polynôme unique Φ de degré s tel que

$$\tilde{u} = \Phi u \tag{5.6}$$

d) La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre s par rapport à $\tilde{u}$.

e) $\exists s \geq 0$ tel que $< \tilde{u}, P_s > \neq 0$, $< \tilde{u}, P_n >= 0$, $n \geq s+1$.

Appliquons ce résultat à la construction de suites orthogonales à partir d'une suite orthogonale donnée.

2. La multiplication (à gauche) d'une forme par un polynôme.

Il s'agit sans doute d'un des plus vieux problèmes de la théorie des polynômes orthogonaux, déjà traité par Christoffel en particulier, en 1858 [28].

Posons le problème général. Soit u une forme régulière et soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite normalisée orthogonale correspondante. Soit d'autre part :

$$R(x) = \Pi_{\nu=1}^{p}(x-x_\nu)^{m_\nu} \quad , \quad \sum_{\nu=1}^{p} m_\nu = r \ , \ c = (x_1, \ldots x_p)$$

un polynôme de degré $r \geq 1$. Dans quelle condition, la forme $\tilde{u} = Ru$ est-elle régulière ? Le résultat suivant est démontré dans [5][29] : Soit $D_{n+1}, n \geq 0$ le déterminant d'ordre r :

$$D_{n+1} = \begin{vmatrix} P_{n+1}(x_1) & \cdots & P_{n+r}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n+1}^{(m_1-1)}(x_1) & \cdots & P_{n+r}^{(m_1-1)}(x_1) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n+1}(x_p) & \cdots & P_{n+r}(x_p) \\ \vdots & & \vdots \\ P_{n+1}^{(m_p-1)}(x_p) & \cdots & P_{n+r}^{(m_p-1)}(x_p) \end{vmatrix} = D(c; n+1) \tag{5.7}$$

Alors la forme $\tilde{u}$ est régulière si et seulement si $D_{n+1} \neq 0, n \geq 0$. (Ici $P_n^{(\mu)}(x) = \frac{d^\mu}{dx^\mu} P_n(x)$ et non pas le polynôme associé d'ordre μ). On peut alors construire la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport à $\tilde{u}$ et donner les éléments $\tilde{\beta}_n, \tilde{\gamma}_{n+1}, n \geq 0$ en fonction de $\beta_n, \gamma_{n+1}, n \geq 0$ [29]. On ne le fera ici que dans le cas où $R(x) = (x-c)^m, m = 1, 2$.

Proposition 5.2. *Pour que la forme $\tilde{u} = (x-c)u$ soit régulière, il faut et il suffit que $P_{n+1}(c) \neq 0, n \geq 0$ [10]. Dans ce cas, on a :*

$$(x-c)\tilde{P}_n(x) = P_{n+1}(x) - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} P_n(x) \ , \ n \geq 0 \tag{5.8}$$

$$\tilde{\beta}_n = \beta_{n+1} + \frac{P_{n+2}(c)}{P_{n+1}(c)} - \frac{P_{n+1}(c)}{P_n(c)} \ , \ n \geq 0 \tag{5.9}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{P_{n+2}(c)P_n(c)}{P_{n+1}^2(c)} \gamma_{n+1} \ , \ n \geq 0 \tag{5.10}$$

Remarque. A l'aide de l'identité de Christoffel-Darboux, on a facilement :

$$\tilde{P}_n(x) = \sum_{\nu=0}^{n} \frac{r_n}{r_\nu} \frac{P_\nu(c)}{P_n(c)} P_\nu(x) \text{ avec } r_n = \Pi_{\nu=0}^{n} \gamma_\nu \ , \ n \geq 0. \tag{5.11}$$

Cette relation traduit le fait que la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est strictement quasi-orthogonale d'ordre un par rapport à $\tilde{u}$ et on a de (5.11)

$$P_{n+1}(x) = \tilde{P}_{n+1}(x) - \frac{P_n(c)}{P_{n+1}(c)} \gamma_{n+1} \tilde{P}_n(x) \ , \ n \geq 0. \tag{5.12}$$

Proposition 5.3. *Pour que la forme $\tilde{u} = (x-c)^2 u$ soit régulière, il faut et il suffit que*

$$D(c;n) = P_{n+1}'(c)P_n(c) - P_{n+1}(c)P_n'(c) \neq 0 \ , \ n \geq 1 \tag{5.13}$$

Dans ce cas, on a

$$(x-c)^2 \tilde{P}_n(x) = \left\{ x - c - \frac{P_n(c)P_{n+1}c)}{D(c;n)} \right\} P_{n+1}(x) + \frac{P_{n+1}^2(c)}{D(c;n)} P_n(x)) \quad , \quad n \geq 0$$

$$\tilde{\beta}_n = \beta_{n+1} - 2\frac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)} + \frac{P_{n+1}^2(c)}{D(c;n+1)} \{ c - \beta_{n+1} + \frac{P_n(c)P_{n+1}(c)}{D(c;n)} \} \ , \ n \geq 0 \tag{5.14}$$

$$\tilde{\gamma}_{n+1} = \frac{D(c;n+2)D(c;n)}{D^2(c;n+1)}\gamma_{n+1} \quad , \quad n \geq 0. \tag{5.15}$$

Corollaire. Si u est symétrique et régulière, la forme x^2u est symétrique et régulière si et seulement si

$$P'_{2n+3}(0) = (-1)^{n+1}\Pi_{\lambda=0}^{n}\lambda_{2\lambda+2}\{1+\sum_{\nu=0}^{n}\Pi_{\lambda=0}^{\nu}\frac{\gamma_{2\lambda+1}}{\gamma_{2\lambda+2}}\} \neq 0 \ , \ n \geq 0. \tag{5.16}$$

Dans ce cas :

$$\tilde{\gamma}_{2n+1} = -\frac{P'_{2n+3}(0)}{P'_{2n+1}(0)} \quad ; \quad \tilde{\gamma}_{2n+2} = -\frac{P'_{2n+1}(0)}{P'_{2n+3}(0)}\gamma_{2n+2}\gamma_{2n+3} \ , \ n \geq 0. \tag{5.17}$$

3. Le problème inverse.

Soit v une forme régulière $(v)_0 = 1$ et soit $\lambda \in C^*$, $c \in C$. On pose le problème suivant :

a) Déterminer toutes les formes u telles que

$$(x-c)^m u = \lambda v \quad , \quad (u)_0 = 1 \quad , \quad m = 1,2. \tag{5.18}$$

b) Déterminer les valeurs de λ pour lesquelles chacune des solutions $u(\lambda)$ de (5.18) est régulière.

Le cas $m = 1$. L'équation (5.18) est équivalente à

$$u = \delta_c + \lambda(x-c)^{-1}v. \tag{5.19}$$

Soit $\{R_n\}_{n\geq 0}$ la suite normalisée orthogonale par rapport à v et soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite orthogonale par rapport à $u(\lambda)$ lorsque $u(\lambda)$ est régulière. D'après (5.18), la suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$, lorsqu'elle existe, est strictement quasi-orthogonale d'ordre un par rapport à v. On est amené à chercher $\{P_n\}_{n\geq 0}$ sous la forme :

$$P_{n+1}(x) = R_{n+1}(x) + a_n R_n(x) \quad , \quad a_n \neq 0 \quad , \quad n \geq 0. \tag{5.20}$$

La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est orthogonale par rapport à u si et seulement si

$$a_n = -\frac{R_{n+1}(c) + \lambda R_n^{(1)}(c)}{R_n(c) + \lambda R_{n-1}^{(1)}(c)} \quad , \quad R_n(c) + \lambda R_{n-1}^{(1)}(c) \neq 0 \quad , \quad n \geq 0 \tag{5.21}$$

Notant

$$\lambda_0 = 0 \quad , \quad \lambda_n = -\frac{R_n(c)}{R_{n-1}^{(1)}(c)} \quad , \quad n \geq 1 \tag{5.22}$$

on peut énoncer [30] :

Proposition 5.4. *Soit v une forme régulière, $(v)_0 = 1$ et soit $c \in C$. Pour que la forme u définie par (5.19) soit régulière, il faut et il suffit que $\lambda \neq \lambda_n$, $n \geq 0$. La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ est alors donnée par (5.20) et (5.21).*

Si la suite $\{R_n\}_{n\geq 0}$ vérifie la récurrence :

$$\begin{aligned} &R_0(x) = 1 \quad , \quad R_1(x) = x - \zeta_0 \\ &R_{n+2}(x) = (x-\zeta_{n+1})R_{n+1}(x) - \delta_{n+1}R_n(x) \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.23}$$

on a, pour $\lambda \neq \lambda_n$:

$$\begin{aligned} &\beta_0 = \zeta_0 - a_0 \quad , \quad \beta_{n+1} = \zeta_{n+1} + a_n - a_{n+1} \\ &\qquad\qquad\qquad \gamma_{n+1} = -a_n(c - \zeta_n + a_n) \quad , \quad n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.24}$$

Dans le cas où $c = 0$, on a le résultat :

Proposition 5.5. *Soit v régulière. Alors la forme $u = \delta + \lambda x^{-1} v$ est régulière pour chaque $\lambda \neq 0$ si et seulement si v est symétrique.*

Dans ce cas, on peut préciser (5.21) :

(5.25)
$$a_{2n} = -\lambda \Pi_{\nu=0}^{n} \frac{\delta_{2\nu}}{\delta_{2\nu-1}} \ , \ \delta_{-1} = 1 \quad ; \quad a_{2n+1} = \frac{1}{\lambda} \Pi_{\nu=0}^{n} \frac{\delta_{2\nu+1}}{\delta_{2\nu}} \ , \ n \geq 0.$$

La forme u vérifie : $(u)_0 = 1, (u)_{2n} = 0, n \geq 1$. Une telle forme est appelée une forme quasi-antisymétrique.

Exemple. [31][32]. On considère le produit scalaire suivant :

$$(f,g) = \int_\Gamma \frac{f(z)g(z)}{iz} dz$$

où $\Gamma = \{z \in C, z = e^{i\theta}, 0 \leq \theta \leq \pi\}$. On veut construire la suite $\{P_n\}_{n \geq 0}$ orthogonale suivant ce produit scalaire. Celui-ci est défini par la forme u

$$< u, f > = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(e^{i\theta}) d\theta \quad , \quad f \in \mathcal{P}.$$

A l'aide du calcul des résidus, on a facilement :

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(e^{i\theta}) d\theta + \frac{1}{i\pi} P \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{x} dx = f(0),$$

c'est-à-dire :

$$< u, f > = < \delta, f > - \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x) - f(0)}{x} dx,$$

donc

$$u = \delta - \frac{2}{i\pi} x^{-1} L$$

où L est la forme de Legendre définie par

$$< L, f > = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_+(1 - x^2) f(x) dx \quad , \quad f \in \mathcal{P}.$$

On sait que : (voir le §6)

$$\zeta_n = 0 \quad ; \quad \delta_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)} \quad , \quad n \geq 0$$

et donc, après quelques calculs :

$$a_n = -i \frac{2}{2n+1} \left(\frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2})}{\Gamma(\frac{1+n}{2})} \right)^2 \quad , \quad n \geq 0.$$

On peut généraliser en considérant le produit scalaire

$$(f,g) = \int_\Gamma \frac{G(z)}{iz} f(z) g(z) dz$$

où G est holomorphe dans un ouvert contenant le demi-cercle unité. En supposant :

$$G_0 = \int_{-1}^{+1} G(x) dx \neq 0 \quad ; \quad \mu = G(0) - \frac{1}{i\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{G(x) - G(0)}{x} dx \neq 0,$$

on a encore

$$u = \delta + \lambda x^{-1} v$$

avec

$$< v, f > = \frac{1}{G_0} \int_{-\infty}^{+\infty} 1_+(1 - x^2) G(x) f(x) dx$$

$$\lambda = -\frac{G_0}{i\pi\mu}.$$

Le cas $m = 2$. L'équation (5.18) est équivalente à

(5.26)
$$u = \delta + (a - \beta)D\delta + \lambda(x - a)^{-2}v$$

Proposition 5.6. *[20] Soit v une forme régulière, $(v)_0 = 1$ et soit $\{R_n\}_{n\geq 0}$ la suite orthogonale correspondante, vérifiant (5.23). Alors pour chaque $c, \beta_0 \in C$, la forme u donnée par (5.26) est régulière si et seulement si λ vérifie*

$$\lambda d_n(\lambda) \neq 0 \quad , \quad n \geq 0$$

où

$$d_{n+1}(\lambda) - \delta_{n+1} d_n(\lambda) = -\{\lambda R_n^{(1)}(c) + (c-\beta_0)R_{n+1}(c)\}^2 + 2(c-\beta_0)^2 R_{n+1}^2(c) \quad , \quad n \geq 0$$
$$d_0(\lambda) = (c-\beta_0)^2 - \lambda.$$

Dans ce cas :

$$P_0(x) = 1 \quad , \quad P_1(x) = R_1(x) + b_0 R_0(x)$$
$$P_{n+2}(x) = R_{n+2}(x) + b_{n+1}R_{n+1}(x) + a_n R_n(x) \quad , \quad n \geq 0$$
$$b_0 = \zeta_0 - \beta_0$$
$$b_{n+1} = \zeta_{n+1} - c - \frac{1}{d_n(\lambda)}\{\lambda R_n^{(1)}(c) - (c-\beta_0)R_{n+1}(c)\}\{\lambda R_{n-1}^{(1)}(c) - (c-\beta_0)R_n(c)\}$$
$$a_n = \frac{d_{n+1}(\lambda)}{d_n(\lambda)} \quad , \quad n \geq 0.$$

La suite $\{P_n\}_{n\geq 0}$ vérifie (4.9) avec

$$\beta_{n+1} = \zeta_{n+1} + b_n - b_{n+1} \quad , \quad n \geq 0$$
$$\gamma_1 = -d_0(\lambda)\ ;\ \gamma_{n+2} = \frac{d_{n+1}(\lambda)d_{n-1}(\lambda)}{d_n^2(\lambda)}\delta_n\ ,\ n \geq 0\ ,\ \delta_0 = 1\ ,\ d_{-1}(\lambda) = -\lambda.$$

Corollaire. Lorsque $\beta_0 = c$, la forme $u(\lambda)$ est régulière pour chaque $\lambda \in C^*$ tel que

$$\lambda \neq -\frac{< v, R_{n+1}^2 >}{R_n^{(1)}(c)(R_{n+1}^{(1)})'(c) - R_{n+1}^{(1)}(c)(R_n^{(1)})'(c)}\ ,\ n \geq 0.$$

En particulier, si v est définie positive, la forme $u(\lambda)$ est définie positive pour chaque $\lambda > 0$ et chaque $c \in \mathbb{R}$.

Lorsque $\beta_0 = c = 0$ et v est symétrique et régulière, la forme $u(\lambda)$ est régulière et symétrique pour chaque $\lambda \in C^*$ tel que

$$\lambda \neq -\frac{1}{\displaystyle\sum_{\nu=0}^{n} \Pi_{\mu=0}^{\nu} \frac{\delta_{2\mu}}{\delta_{2\mu+1}}} \quad , \quad n \geq 0.$$

4. La régularité de u^{-1} [33][34][35].

Considérons le problème suivant : une forme u régulière étant donnée, dans quelle condition la forme inverse u^{-1} est-elle régulière ? D'après (4.6) la forme u^{-1} vérifie l'équation

$$\gamma_1 u^{(1)} = -x^2 u^{-1} \quad , \quad (u)_0 = 1 \tag{5.27}$$

où $u^{(1)}$ est la forme canonique de la suite associée $\{P_n^{(1)}\}_{n\geq 0}$ relativement à u. Notons $\{P_n^{(-)}\}_{n\geq 0}$ la suite normalisée orthogonale par rapport à u^{-1}, lorsque u^{-1} est régulière. Elle vérifie (4.8)-(4.9) avec $\{\beta_n^{(-)}\}_{n\geq 0}$ et $\{\gamma_{n+1}^{(-)}\}_{n\geq 0}$.

L'équation (5.27) est un cas particulier de l'équation (5.18) où $m = 2, c = 0, \lambda = -\gamma_1, v = u^{(1)}$ et u est remplacée par u^{-1}.

Autrement dit, on a $R_n = P_n^{(1)}$ et P_n devient $P_n^{(-)}$ dans les formules de la proposition 5.6.

Proposition 5.7. *Soit u une forme régulière, $(u)_0 = 1$. Pour que la forme inverse u^{-1} soit régulière, il faut et il suffit que la forme $x^2 u$ soit régulière. En particulier, si u est définie positive, la forme u^{-1} est régulière, mais elle n'est pas définie positive.*

On a :

$$\begin{aligned} &P_0^{(-)}(x) = 1 \quad , \quad P_1^{(-)}(x) = P_1^{(1)}(x) + b_0 \\ &P_{n+2}^{(-)}(x) = P_{n+2}^{(1)}(x) + b_{n+1}P_{n+1}^{(1)}(x) + a_n P_n^{(1)}(x)\ ,\ n \geq 0 \end{aligned} \tag{5.28}$$

(5.29)
$$b_n = \frac{1}{D(0;n)}\{P_{n+2}(0)P_n'(0) - P_n(0)P_{n+2}'(0)\}\ ,\ n \geq 0$$
$$a_n = \frac{D(0;n+2)}{D(0;n+1)} \quad , \quad n \geq 0$$

(5.30)
$$D(0;n) = P_n(0)P_{n+1}'(0) - P_{n+1}(0)P_n'(0) \neq 0\ ,\ n \geq 0$$

(5.31)
$$\beta_n^{(-)} = \beta_{n+1} + b_{n-1} - b_n\ ,\ n \geq 0\ ,\ b_{-1} = 0$$
$$\gamma_1^{(-)} = -D(0;1) = -(\beta_0^2 + \gamma_1)$$
$$\gamma_{n+2}^{(-)} = \frac{D(0;n+2)D(0;n)}{D^2(0;n+1)}\gamma_{n+1} \quad , \quad n \geq 0$$

Remarques.

D'après la proposition 5.3, la condition (5.30) traduit le fait que x^2u soit régulière : c'est la condition $\lambda d_n(\lambda) \neq 0$ de la proposition 5.6. Avec les notations de la proposition 5.3, si $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ désigne la suite orthogonale par rapport à x^2u, on a de (5.31)

$$(\beta_n^{(-)})^{(1)} = \tilde{\beta}_n \quad ; \quad (\gamma_{n+1}^{(-)})^{(1)} = \tilde{\gamma}_{n+1}.$$

Autrement dit :

$$(P_n^{(-)})^{(1)} = \tilde{P}_n \quad , \quad n \geq 0$$

ce que traduit la formule, d'après (4.6)

$$\gamma_1^{(-)}(u^{-1})^{(1)} = -x^2u.$$

Lorsque u est symétrique, la forme u^{-1} est aussi symétrique ; elle est régulière si et seulement si $P_{2n+3}'(0) \neq 0, n \geq 0$, d'après le corollaire de la proposition 5.3.

5. L'adjonction d'une mesure de Dirac à une forme régulière.

Pour chaque $c, \lambda \in C$, on considère la forme suivante

(5.32)
$$\tilde{u} = u + \lambda\delta_c$$

où la forme u est régulière. Il s'agit de déterminer les valeurs de λ pour lesquelles la forme $\tilde{u}$ est régulière [36][37][38][39].

Proposition 5.8. *[40] Soit u une forme régulière et soit $\{P_n\}_{n\geq 0}$ la suite normalisée orthogonale correspondante. Pour chaque $c \in C$, la forme $\tilde{u}$ définie par (5.32) est régulière si et seulement si λ vérife*

(5.33)
$$\lambda \neq -(\sum_{\nu=0}^{n} \frac{P_\nu^2(c)}{r_\nu})^{-1} \quad , \quad n \geq 0$$

Dans ce cas, la suite $\{\tilde{P}_n\}_{n\geq 0}$ orthogonale par rapport à $\tilde{u}$ est donnée par :

(5.34)
$$\tilde{P}_{n+1}(x) = P_{n+1}(x) - \lambda\frac{r_n}{d_n(\lambda,c)}P_{n+1}(c)\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_\nu(c)P_\nu(x)}{r_\nu}\ ,\ n \geq 0$$

ou encore par :

(5.35)
$$(x-c)\tilde{P}_{n+1}(x) = (\lambda_{n+1,n} - \gamma_{n+1})P_n(x) + (x - \beta_{n+1} + \lambda_{n+1,n+1})P_{n+1}(x)\ ,\ n \geq 0$$

où

(5.36)
$$\lambda_{n+1,n} = \frac{d_{n+1}(\lambda,c)}{d_n(\lambda,c)}$$
$$\lambda_{n+1,n+1} = \beta_{n+1} - c - \frac{\lambda}{d_n(\lambda,c)}P_n(c)P_{n+1}(c) \quad , \quad n \geq 0$$
$$d_n(\lambda,c) = r_n\{1 + \lambda\sum_{\nu=0}^{n}\frac{P_\nu^2(c)}{r_\nu}\}$$