Universite catholique de Louvain

Analyse numérique:

Approximation, interpolation, intégration.

INMA2171
2009-2010

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Université Catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2,
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgium)
(0)(10)473157 , alphonse.magnus@uclouvain.be ,
http://perso.uclouvain.be/alphonse.magnus/

et toujours: http://www.penombre.org/

Table des matières.

Préface. 7

. . . . 8

Analyse numérique et théorie de l'approximation. 11
1. Qu'est ce que l'analyse numérique? 11
1.1. Analyse numérique et analyse 11
1.2. Analyse numérique et calcul 11
2. Théorie de l'approximation. 12
2.1. Les trois niveaux d'une théorie de l'approximation. 12
3. Quelques approximations de fonctions utilisées dans les calculatrices et les ordinateurs 13
3.1. Calculatrices scientifiques: le système CORDIC 13
3.2. Approximations polynomiales et rationnelles 14
3.3. AGM, etc 15
3.4. Approximations et nombres irrationnels 15
3.5. Approximations les plus simples: bien commencer 17

CHAPITRE 1. Théorèmes généraux d'existence et d'unicité de meilleure approximation. 18
1. Distances et normes. 18
1.1. 18
1.2. Exercices et exemples 18
1.3. Remarques 18
1.4. Normes 19
1.5. Exemples, exercices 19
1.6. Exercices, exemples 20
1.7. Formes et applications linéaires continues sur des espaces vectoriels normés de fonctions 20
2. Existence d'une meilleure approximation. 21
2.1. Théorème d'existence de meilleure approximation dans un sous-espace de dimension finie 21
2.2. Contre-exemple 22
2.3. Remarque 22
3. Unicité de la meilleure approximation. 22
3.1. Définition. Convexité 22
3.2. Proposition 22
3.3. Définition 23
3.4. Une condition suffisante d'unicité. Théorème 23

3.5. Exercice 23
4. Continuité du projecteur de meilleure approximation. 23
4.1. Théorème de continuité 23
4.2. Forte unicité 24
5. Dualité. 24
6. Exemples et exercices. 24
6.1. 24
6.2. Moyenne et médiane 25
6.3. Principaux sous-espaces de fonctions utilisés en approximation 25
6.4. Centre et rayon de Tchebycheff d'une partie P de X 26
6.5. Largeurs de Kolmogorov 26
6.6. Coapproximation 26

CHAPITRE 2. Approximation au sens de Tchebycheff. 27
1. Théorème d'équioscillation de Tchebycheff. 27
1.1. Théorème d'équioscillation de Tchebycheff (1853) 27
1.2. Preuve de la condition nécessaire: $\hat{p}$ optimal dans $\mathscr{P}_n \Rightarrow (3)$ 28
1.3. Preuve de la condition suffisante $(3) \Rightarrow \hat{p}$ optimal dans $\mathscr{P}_n$ 29
1.4. Exemple 29
1.5. Théorème d'unicité de la meilleure approximation polynomiale au sens de Tchebycheff 29
2. Propriétés de la meilleure approximation. 30
2.1. Symétrie. Théorème 30
2.2. Théorème (de La Vallée Poussin) 30
2.3. Unicité forte 31
2.4. Signes alternés 31
2.5. Algorithme d'échange 32
2.6. Meilleure approximation au sens $\| \|_\infty$ sur un compact quelconque 33
3. Polynômes de Tchebycheff. 34
3.1. Meilleure approximation d'un polynôme de degré n dans $\mathscr{P}_{n-1}$ 34
3.2. Définition 34
3.3. Premières propriétés 34
3.4. Premiers échantillons 36
3.5. Exercice 38
3.6. Relation de récurrence 38
3.7. Polynôme de moindre norme sur un intervalle, sous contrainte $p(0) = 1$ 39
3.8. Meilleure approximation d'un polynôme de degré n dans $\mathscr{P}_{n-2}$ 39
3.9. Meilleure approximation de fonction rationnelle 39
3.10. Fonctions rationnelles de moindre et plus grande déviation 39
3.11. Propriétés extrémales des polynômes de Tchebycheff 40
3.12. Autres propriétés des T_n 43
3.13. Equation différentielle linéaire 46
3.14. Proposition 46
3.15. Polynômes de Tchebycheff et problèmes de Sturm-Liouville 47
3.16. Coefficients, dérivées et primitives 48
3.17. Primitives itérées de $\dfrac{T_n(x)}{\sqrt{1-x^2}}$ et formule de Rodrigues 49

3.18. Orthogonalité et base duale de $\mathscr{P}_N^*$ ... 50
4. Bonne approximation; séries de polynômes de Tchebycheff, relation avec séries de Fourier. 53
4.1. Bonne base et bonne approximation ... 53
4.2. Cascade de meilleures approximations et développements dans la base des polynômes de Tcheby 54
4.3. Série de Fourier d'une fonction continue périodique ... 55
4.4. Séries de polynômes de Tchebycheff ... 56
4.5. Vitesse de décroissance des coefficients et bornes de norme de fonction d'erreur 59
4.6. Théorème de Weierstrass ... 61
4.7. Calcul des coefficients de Tchebycheff et autres algorithmes ... 62
4.8. Algorithmes en représentation de Tchebycheff ... 65
5. Approximation par fonction rationnelle. ... 66
6. Lecture. Tchebycheff et de La Vallée Poussin ... 67

CHAPITRE 3. Approximation en moyenne quadratique. ... 72
1. Produit scalaire, orthogonalité, espace préhilbertien. ... 72
1.1. Produits scalaires sur $\mathscr{P}_n$ ... 72
1.2. Espace préhilbertien ... 75
2. Meilleure approximation dans un espace préhilbertien. ... 75
2.1. Base d'un espace de dimension finie, matrice de Gram ... 75
2.2. Meilleure approximation = projection orthogonale ... 76
2.3. Méthode d'orthogonalisation de Gram-Schmidt ... 79
2.4. Hauteurs, volumes et déterminants de Gram ... 80
2.5. Factorisation de Cholesky ... 81
3. Polynômes orthogonaux. ... 82
3.1. Construction d'une base orthogonale de $\mathscr{P}_n$ ... 83
3.2. Relation de récurrence ... 86
3.3. Quelques algorithmes utilisant la récurrence ... 87
3.4. Zéros des polynômes orthogonaux ... 91
3.5. Zéros de polynômes orthogonaux et valeurs propres de matrices tridiagonales symétriques 92
3.6. Formules d'intégration de Gauss. Première approche ... 94
3.7. Formule d'intégration de Gauss et fractions continues ... 97
3.8. Formule de Christoffel-Darboux ... 98
3.9. Orthogonalité et opérateurs (formellement) hermitiens ... 99
3.10. Polynômes orthogonaux classiques ... 100
3.11. Usages et variétés de polynômes orthogonaux ... 104
3.12. Harmoniques sphériques et fonctions de Legendre ... 107
3.13. Polynômes d'Hermite et mécanique quantique ... 110
3.14. Orthogonalité et équioscillation ... 111
4. Moindres carrés, régression. ... 112
5. Approximation en norme $\| \|_1$. ... 116
6. Séries de Fourier en analyse numérique. ... 117
6.1. Comportement des coefficients ... 119
6.2. Transformée de Fourier discrète ... 121
6.3. Tranformée de Fourier rapide (Fast Fourier Transform FFT) ... 122

6.4. Analyse en ondelettes . . . 125
7. Convergence, espace de Hilbert . . . 128
7.1. Suites totales et maximales . . . 128
7.2. Théorème. . . . 129
7.3. Exemples de suites totales dans $\mathscr{C}[a,b]$ et $L^2([a,b],\mu)$. . . . 130
7.4. Théorème d'approximation de Weierstrass. . . . 130
7.5. Théorème de Stone-Weierstrass . . . 134
7.6. Noyaux reproduisants, polynômes noyaux, représentants de Riesz . . . 136
7.7. Intervalles non bornés, problème des moments. . . . 138
7.8. Arcs de Bézier en typographie informatique . . . 139

CHAPITRE 4. Interpolation et applications. . . . 142
1. Interpolation. . . . 142
1.1. Interpolation polynomiale classique . . . 143
1.2. Interpolation: cadre général . . . 145
1.3. Interpolation polynomiale classique en formulation de Newton, différences divisées. 149
1.4. Extrapolation à la limite de Richardson . . . 151
1.5. Formulation de Newton en général . . . 151
1.6. Différences divisées et dérivées . . . 153
1.7. Reste de l'interpolation polynomiale classique . . . 156
1.8. Interpolation d'Hermite-Fejér . . . 157
2. Formules d'intégration basées sur l'interpolation. . . . 158
2.1. Reste de la formule de quadrature de Gauss . . . 158
2.2. Formules de quadratures de Gauss avec points imposés . . . 159
2.3. Points de Tchebycheff: règle de Clenshaw-Curtis . . . 160
2.4. Règles adaptatives d'intégration . . . 161
3. Représentation du reste: théorème de Peano. . . . 161
3.1. Théorème (Peano) . . . 162

CHAPITRE 5. Différences finies. . . . 164
1. Les opérateurs du calcul aux différences. . . . 164
2. Interpolation. . . . 167
3. Dérivation. . . . 168
4. Intégration. . . . 169
4.1. Formules de Newton-Cotes . . . 169
5. Noyaux de Peano de règles d'intégration. . . . 170
5.1. Formule du trapèze . . . 170
5.2. Formule de Simpson . . . 171
5.3. Noyaux de Peano de formules composées . . . 171
5.4. La formule de Simpson avant Simpson . . . 172
6. Formule d'Euler-Maclaurin. . . . 173
6.1. Identités des nombres et polynômes de Bernoulli . . . 175
6.2. Schéma d'intégration de Romberg. . . . 178
6.3. Formule d'Euler-Maclaurin en tant que formule sommatoire . . . 179

CHAPITRE 6. Récapitulation. . . . 183

CHAPITRE 7. Appendices: alphabets grec, cyrillique, petit dico, index. 184
1. Alphabets 184
2. Petit dico mathematical English → français mathématique. 185

Index 186

Préface.

L'analyse numérique a longtemps été incorporée au cours d'analyse générale, dont elle représentait le versant appliqué et constructif.

Le fort développement des moyens de calcul automatique a rendu nécessaire l'apparition d'un enseignement spécifique. La discipline put se développer sous l'impulsion de mathématiciens avisés, tels P. Henrici [**Hen**] et E. Stiefel [**Sti**].

Le présent cours fut crée par ***Jean Meinguet***, Professeur à l'Université. On trouvera ici l'essentiel de la partie "approximation, interpolation, intégration" de son enseignement. D'autres cours reprennent les thèmes de résolution numériques des équations (y compris différentielles et fonctionnelles), d'algèbre linéaire numérique (théorie des matrices) et d'algorithmique numérique.

Le Professeur Meinguet est également à l'origine de l'enseignement de la programmation et de l'informatique dans notre université, mais cela est une autre histoire. . .

Les grands principes de la théorie de l'approximation sont d'abord déduits de concepts d'analyse fonctionnelle (chap. 1). Ces résultats sont alors appliqués à des situations plus concrètes: on examine en détail l'approximation par des polynômes et par des polynômes trigonométriques, selon la norme du maximum (chap. 2) et en moyenne quadratique (chap. 3). Avec l'interpolation (chap. 4) et le calcul aux différences finies (chap. 5), on dispose des outils permettant de traiter tous les problèmes de l'analyse numérique classique, en particulier l'intégration numérique.