Séminaire GSNA

mars 2006

Transports hyperboliques.

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Université Catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2,
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgium)
(0)(10)473157 , magnus@inma.ucl.ac.be , http://www.math.ucl.ac.be/~magnus/

This version: March 27, 2006
The present file is http://www.math.ucl.ac.be/~magnus/num2/hyperbo.pdf

L'hyperbole est une figure de rhétorique consistant à augmenter l'effet de la reprśentation des choses décrites sous le signe de l'exagération. L'énergie, l'intensité d'une expression hyperbolique proviennent souvent de l'emploi de la métaphore ou de la métonymie : "avoir mangé du lion" ou "être vacciné avec une aiguille de phono" rendent les traits d'un homme courageux ou d'un bavard, à travers le transfert. La comparaison, dont l'un des termes représente l'incommensurable par rapport à l'autre, procède par hyperbole : "Cette femme était belle comme une déesse" (Fénelon, *Télémaque*). La comparaison filée magnifie davantage son objet dans ces vers de Clément Marot (CLXIXe épigramme) :

Incontinent que je te vis venue,
Tu me semblas le cler soleil des cieulx
Qui sa lumiere a long temps retenue,
Puis la faict veoir luysant et gracieux ;
Mais ton depart me semble une grand nue,
Qui se vient mettre au devant de mes yeulx.

Véronique KLAUBER

Hyperbolique: Adjectif singulier invariant en genre
1 - poussé l'extrême, très exagéré
2 - en géométrie, relatif à l'hyperbole, courbe à deux branches, résultant d'une section de cône

Abstract:

Contents

1. **Hyperbolicité.**

Bizarrement, “hyperbolique” veut souvent dire en mathématiques “normal”, “courant”, “générique”. Une conique a deux asymptotes, l’hyperbole est donc “hyperbolique”, même s’il y a autant d’ellipses (asymptotes imaginaires) que d’hyperboles (asymptotes réelles). Un polynôme de degré n possède n zéros, et est appelé hyperbolique si tous ses zéros sont réels (ça a quelque chose à voir avec les équations, ou plutôt les problèmes hyperboliques, voir plus loin).

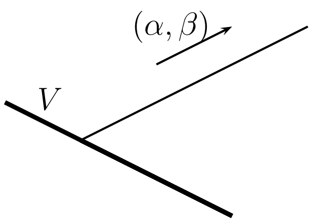
1.1. **Définition.**

Une EDP (scalaire ou système) portant sur des fonctions de n variables est hyperbolique relativement à une variété V de dimension $n-1 \subset \mathbb{R}^n$ si le problème de Cauchy sur cette variété est bien posé. C’est-à-dire que l’on peut déterminer u partout à partir de $u, \partial u/\partial n, \ldots, \partial^{m-1}u/\partial n^{m-1}$ sur V si m est l’ordre maximal des dérivées dans l’équation.

Une EDP est hyperbolique s’il est possible de trouver partout une variété qui convient.

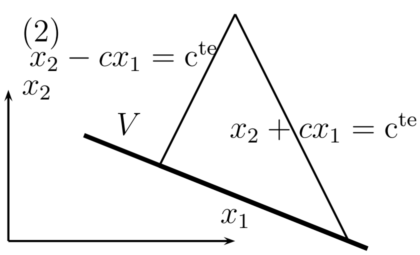
Vaste programme!

(1)



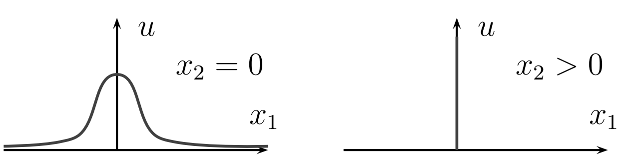
$\alpha\dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \beta\dfrac{\partial u}{\partial x_2} = f$ est hyperbolique: il suffit de prendre V = une droite non parallèle à la direction (α,β), on a alors la dérivée tangentielle $du/ds = f\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ sur toute droite de direction (α,β), à partir de son point d’intersection avec V.

(2)



$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - c^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ est hyperbolique: il suffit de prendre V = une droite non parallèle aux directions $(c,\pm 1)$, et particulariser la solution générale $u = \varphi(x_2 - cx_1) + \psi(x_2 + cx_1)$ à partir de $u = \varphi + \psi$ et $\nabla u = [c(\psi' - \varphi'), \psi' + \varphi']$ sur V, ce qui donne des valeurs de φ et ψ à condition que ni $x_2 - cx_1$ ni $x_2 + cx_1$ ne soient constantes sur V.

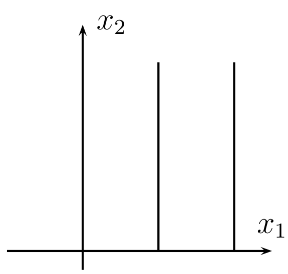
(3)



$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ n’est pas hyperbolique: des singularités peuvent apparaître en tout $x_2 > 0$! Une condition initiale peut être infiniment amplifiée en n’importe quelle valeur > 0 de x_2: ***Le problème de Cauchy est mal posé***.

Exemple: $u(x_1, x_2) =$ partie réelle de $\dfrac{1}{(x_1 + ix_2)^2 + \varepsilon}$, $\varepsilon > 0$.

(4)



$\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$ n’est pas hyperbolique relativement à $x_1 = 0$: on peut déterminer partout u à partir de $u(0, x_2)$ mais ici $m = 2$! Un problème parabolique est posé d’emblée sur une variété caractéristique [4]. Mais tout va (presque) bien [3, p.355] si on donne u et $\partial u/\partial x_2$ sur $x_2 = 0$: les dérivées suivantes en x_2 sont toutes déterminées, $\partial^2 u/\partial x_2^2 = \partial u/\partial x_1$,

$\partial^3 u/\partial x_2^3 = (\partial/\partial x_1)(\partial u/\partial x_2), \ldots \partial^{2k} u/\partial x_2^{2k} = \partial^k u/\partial x_1^k,\ \partial^{2k+1} u/\partial x_2^{2k+1} = (\partial^k/\partial x_1^k)(\partial u/\partial x_2,$

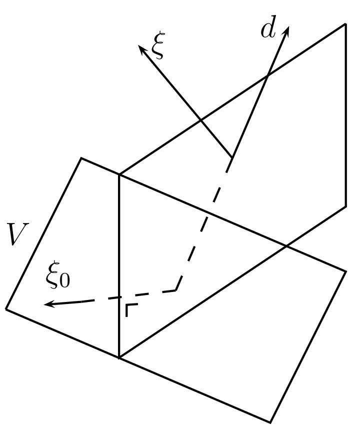
$$u(x_1, x_2) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\left.\frac{\partial^k u}{\partial x_1^k}\right|_{x_2=0} \frac{x_2^{2k}}{(2k)!} + \left(\frac{\partial^k}{\partial x_1^k}\right) \left.\frac{\partial u}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} \frac{x_2^{2k+1}}{(2k+1)!} \right]$$

1.2. **Condition nécessaire.**

équation (partie principale)	F	statut
$\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_1} + \beta \dfrac{\partial u}{\partial x_2}$	$\alpha\xi_1 + \beta\xi_2$	OUI
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$	$\xi_1^2 - c^2\xi_2^2$	OUI
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$	$\xi_1^2 + \xi_2^2$	NON (ell.)
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$	ξ_2^2	OUI (limite)
$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} - c^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}$	$\xi_1^2 + \xi_2^2 - c^2\xi_3^2$	OUI pour $d = [0, 0, 1]$ NON pour $d = [0, 1, 0]$
$\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \displaystyle\sum_2^n c_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$ matrices symétriques c_k	$\det(\xi_1 I - \sum_2^n \xi_k c_k)$	OUI, pour $d = [1, 0, \ldots, 0]$

Pour le dernier cas, cf. [6]

1.2.1. *Plans caractéristiques.*



Soit d la direction normale à l'hyperplan $V \subset \mathbb{R}^n$, et ne retenons que les dérivées partielles d'ordre maximal m. Nous cherchons à refaire le "coup" de l'équation des ondes à deux variables en considérant des solutions de la forme $\varphi(\xi \cdot x)$ de $0 = P(D)u = \displaystyle\sum_\alpha c_\alpha D^\alpha u = \sum_\alpha c_\alpha \frac{\partial^m u}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}}$, la somme portant sur des vecteurs d'entiers positifs avec $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = m$. En portant $\varphi(\xi \cdot x)$ ou, si on a un système, $\varphi(\xi \cdot x)v$ (φ reste une fonction scalaire, v est un vecteur [et les c_α sont des matrices carrées]), on obtient $\varphi^{(m)} P(\xi) v = 0$, d'où la contrainte $\det P(\xi) = 0$ sur ξ.

A chaque $\xi \in \mathbb{R}^n$ vérifiant cette équation correspond des *plans caractéristiques* $\xi \cdot x =$ constante. Il y en a beaucoup… On ordonne cette masse en exprimant ξ dans une base constituée de $n-1$ vecteurs de V et de d: $\xi = \xi_0 + \tau d$, $\xi_0 \in V$. L'équation pour ξ est alors une équation algébrique scalaire pour le seul réel τ: $\det P(\xi_0 + \tau d) = 0$. On écrit souvent $\xi - \tau d$, avec ξ quelconque, cela revient évidemment au même.

1.2.2. *Polynôme hyperbolique.* Un polynôme F homogène en n variables est dit ***hyperbolique*** par rapport à une direction $d \in \mathbb{R}^n$ si $F(d) \neq 0$ et si l'équation $F(\xi - \tau d) = 0$ a toutes ses racines ***réelles*** pour tout $\xi \in \mathbb{R}^n$ [1, 6].

1.2.3. *Obtention de la solution par superposition.* On a donc des solutions particulières de $P(D)u = 0$ de la forme $\varphi(\xi \cdot x) = \varphi(\xi_0 \cdot x + \tau d \cdot x)$ pour toute direction ξ_0 de V. On se propose de représenter u comme une superposition

$$u(x) = \int_{\substack{\xi_0 \in V \\ \|\xi_0\|=1}} \sum_{\substack{\text{racines } \tau_k \text{ de} \\ F(\xi_0 + \tau_k d) = 0}} \varphi_k(\xi_0 \cdot x + \tau_k d \cdot x) v_k(\xi_0) d\mu(\xi_0) \tag{1}$$

où $d\mu$ est une mesure naturelle sur la sphère. Pour $x \in V$, u et ses dérivées sont

$$D^\alpha u(x)|_{x \in V} = \int_{\substack{\xi_0 \in V \\ \|\xi_0\|=1}} \sum_{\substack{\text{racines } \tau_k \text{ de} \\ F(\xi_0 + \tau_k d) = 0}} (\xi_0 + \tau_k d)^\alpha \varphi_k^{(|\alpha|)}(\xi_0 \cdot x) v_k(\xi_0) d\mu(\xi_0) \tag{2}$$

que l'on doit adapter à u et à ses $m-1$ premières dérivées normales sur V. Constatons qu'il y a donc m fonctions données sur V et m fonctions inconnues $\varphi_1, \ldots, \varphi_m$. Pour un système, le nombre de fonctions scalaires est à multiplier par le nombre de composantes de u.

1.2.4. *Domaine d'influence, CFL..*

On montre que $u(x)$ et ses dérivées ne dépendent que des valeurs prises dans la base dans V du plus grand cône de sommet x et tangent aux plans caractéristiques passant par x. Si on trouve un facteur integrand Φ tel que ΦP soit une divergence divΨ, on discute $0 = \int_{\text{cône}} \Phi P = \int_{\partial\text{cône}} \Psi \cdot n$.

Exemple: si $P(u) = \partial u/\partial x_1 - \sum_2^n c_k \partial u/\partial x_k$, $u^T P(u) = (1/2)\,\text{div}\,[u^T u, -u^T c_2 u, \ldots, -u^T c_n u]$, et on intègre sur la surface du cône $u^T(n_1 - n_2 c_2 - \cdots - n_n c_n)u > 0$ si n_1 est $>$ la plus grande valeur propre de $n_2 c_2 + \cdots + n_n c_n$: u est nulle dans tout le cône si $u = 0$ sur la base.

Jadis on nommait "influence" un liquide qui
s'écoulait des astres sur la tête des hommes
et les ondoyait dans la naissance.
P. Quignard, *Petits traités*, LVI^e traité

Définition. *Soit un problème d'évolution bien posé dans $\mathbb{R}^{n-1} \times [0, T]$. Soit $t_2 > t_1$. Le* ***domaine d'influence*** *de (x, t_2) en $t = t_1$ est l'ensemble des (χ, t_1) où la donnée de u et des dérivées temporelles de u suffit à déterminer $u(x, t)$.* Pour

$$\frac{\partial u}{\partial t} - K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \tag{3}$$

(équation des télégraphistes, $K = 1/(\gamma r)$, $K/c^2 = \ell/r \Rightarrow c = 1/\sqrt{\gamma\ell}$), on pourrait encore donner une expression (compliquée, avec des fonctions de Bessel) montrant comment $u(x,t)$ dépend des données initiales, mais voici une autre façon de faire (Courant & Hilbert, vol. 2): *Si u est une solution $\mathscr{C}^2$ de* (3)*, et si u et $\partial u/\partial t$ sont nulles dans $[x-ct, x+ct]$ au temps $t=0$, alors $u(x,t)=0$.* En effet, multiplions (3) par $2\partial u/\partial t$ et intégrons sur le triangle T de sommets $(x-ct,0)$, $(x+ct,0)$ et (x,t) dans le plan (χ,τ):

$$\begin{aligned} 0 &= 2\frac{\partial u}{\partial \tau}\left[\frac{\partial u}{\partial \tau} - K\frac{\partial^2 u}{\partial \chi^2} + \frac{K}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2}\right] \\ &= 2\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 - 2K\frac{\partial}{\partial \chi}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \chi}\right) + K\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}\right)^2\right) + \frac{K}{c^2}\frac{\partial}{\partial \tau}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right) \end{aligned}$$

et on intègre sur tout le triangle T. Les intégrales des trois derniers termes se résolvent immédiatement en intégrales sur la frontière de T:

$$0 = 2\int_T \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\chi d\tau - 2K\int_0^t \left[\frac{\partial u}{\partial \tau}\frac{\partial u}{\partial \chi}\right]_{\chi_-}^{\chi_+} d\tau + K\int_{x-ct}^{x+ct}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial \chi}\right)^2 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2\right]_0^{\tau_+} d\chi,$$

où $\chi_\pm = x \pm c(t-\tau)$ sont les abscisses de ∂T en $t=\tau$, et $\tau_+ = t - |x-\chi|/c$ l'ordonnée correspondant à χ. Soit s l'abscisse curviligne le long de ∂T, on a $d\chi = c|d\tau| = ds/\sqrt{1+c^{-2}}$ (on ne s'occupe pas de la partie $\tau=0$, puisque u et ses dérivées y sont nulles), on a enfin

$$0 = 2\int_T \left(\frac{\partial u}{\partial \tau}\right)^2 d\chi d\tau + \frac{K}{\sqrt{1+c^{-2}}}\int_{\partial T}\left[\frac{\partial u}{\partial \chi} \pm \frac{1}{c}\frac{\partial u}{\partial \tau}\right]^2 ds.$$

u est donc nulle dans tout T, donc en (x,t): les valeurs initiales hors de $[x-ct, x+ct]$ n'ont aucune influence sur $u(x,t)$. □Remarque: si $c\to\infty$, (3) tend vers l'équation de la chaleur, équation ***parabolique***: les caractéristiques ne rencontrent plus l'axe des x (qui est en fait une courbe caractéristique!), la vitesse de propagation devient infinie (n'importe quel $u(\chi,0)$ a une influence sur $u(x,t)$, $\forall t>0$).

Considérations intéressantes dans [10]

Equation discrétisée: $P(\Delta)u_h = 0$, où Δ est un opérateur aux différences raisonnable (consistance). Soit $V = \{x_1 = 0\}$, $\Delta_1 u(x_1, x_2, \ldots, x_n) =$

$$\frac{u(x_1+h_1, x_2,\ldots,x_n) - \dfrac{u(x_1,x_2+h_2,\ldots,x_n)+u(x_1,x_2-h_2,\ldots,x_n)+\cdots+u(x_1,\ldots,x_n+h_n)+u(x_1,\ldots,x_n-h_n)}{2(n-1)}}{h_1},$$

$$\Delta_k u(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \frac{u(x_1,x_2,\ldots,x_k+h_k,\ldots,x_n) - u(x_1,x_2,\ldots,x_k-h_k,\ldots,x_n)}{2h_k} \text{ (Friedrichs)},$$

donne une récurrence pour u_h en x_1, $x_1+h_1,\ldots,x_1+mh_1$). Solution (récurrence à coefficients constants) en puissances de ρ, en supposant des modes de Fourier $\exp(i\xi_2 x_2 + \cdots + i\xi_n x_n)$ dans les variables spatiales:

$$P\left(i\frac{\rho - \dfrac{\cos\xi_2 h_2 + \cdots + \cos\xi_n h_n}{n-1}}{h_1}, \frac{\sin\xi_2 h_2}{h_2}, \ldots, \frac{\sin\xi_n h_n}{h_n}\right) = 0$$

Solution: $\rho = (\cos\xi_2 h_2 + \cdots + \cos\xi_n h_n)/(n-1) - ih_1\tau\sqrt{\dfrac{\sin^2\xi_2 h_2}{h_2^2} + \cdots \dfrac{\sin^2\xi_n h_n}{h_n^2}}$, où τ est une des racines réelles de $P=0$ associées à la direction des $n-1$ derniers arguments de P. On aura donc $|\rho| \leqslant 1$ si

$$h_1 \leqslant \frac{1}{|\tau|_{\max}} \min \sqrt{\frac{1-\left(\dfrac{\cos\xi_2 h_2+\cdots+\cos\xi_n h_n}{n-1}\right)^2}{\dfrac{\sin^2\xi_2 h_2}{h_2^2}+\cdots+\dfrac{\sin^2\xi_n h_n}{h_n^2}}} \text{ OK si } \quad h_1 \leqslant \frac{h_{\min}}{|\tau|_{\max}\sqrt{n-1}}.$$

(Utiliser $(\sum_2^n \cos\xi_k h_k)^2 \leqslant (n-1)(\sum_2^n \cos^2\xi_k h_k) = (n-1)^2 - (n-1)\sum_2^n \sin^2\xi_k h_k$, donc le numérateur est toujours supérieur à $(n-1)^{-1}\sum_2^n \sin^2\xi_k h_k$ et la condition est vérifiée si h_1 est $\leqslant$ à l'expression avec le nouveau numérateur.)

1.3. **Un théorème.** difficile de Gårding [2]. La solution d'un problème hyperbolique est nulle dans un borné donné de $\mathbb{R}^n$ si elle est nulle, avec ses dérivées d'ordre $< m$, dans un borné assez grand de V. On dit qu'un problème est intrinsèquement hyperbolique si sa solution tend vers zéro dans un borné de $\mathbb{R}^n$ lorsqu'elle tend vers zéro, avec ses dérivées d'ordre $< m$, dans des bornés de V.

Théorème: avec $V = \{x_1 = 0\}$, le problème $P(u) = 0$ est intrinsèquement hyperbolique si et seulement si les racines en τ de $F(\tau, \xi_2, \ldots, \xi_n) = 0$ ont des parties imaginaires bornées pour tout $[\xi_2, \ldots, \xi_n] \in \mathbb{R}^{n-1}$. Ici, F est P où on remplace chaque $\partial/\partial x_k$ par $i\xi_k$.

Exemple: $\dfrac{\partial u}{\partial x_1} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$, $F = i\tau + \xi_2^2$, non. $\dfrac{\partial u}{\partial x_2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = 0$, $F = \tau^2 + i\xi_2$, non plus, tiens. Télégraphistes: $F = \tau^2 - ic^2\tau/K - c^2\xi^2$ OK: τ a toujours une partie imaginaire $\leqslant c^2/K$.

2. **Transport, advection, diffusion.**

2.1. **Advection.**

Equations de type $\partial u/\partial t + \operatorname{div}(au) = f$ où u est par exemple une concentration, et a un vecteur donné. Evidemment hyperbolique: l'équation est une dérivée directionnelle dans la direction $[1, a]$.

2.2. **Advection-diffusion.**

Mais le cas intéressant est la présence discrète d'un opérateur elliptique (diffusion):

$$L_\varepsilon u = (\varepsilon E + A)u = f \tag{4}$$

2.2.1. *Problème 1D.* Sangalli [8] traite d'abord le problème

$$L_\varepsilon u = -\varepsilon u'' + u' \tag{5}$$

sur $(0, 2\pi)$ avec $u(0) = u(2\pi) = 0$. On cherche une norme telle que L_ε soit bien conditionné pour tout ε, c'est-à-dire

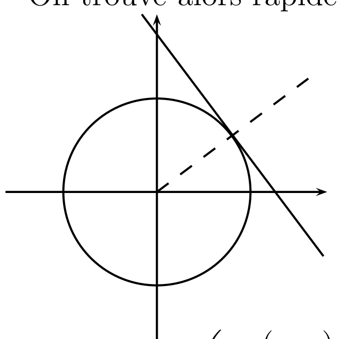
$$0 < \gamma \leqslant \sup_{v\in V} \frac{a_\varepsilon(u,v)}{\|u\|_U \|v\|_V} \leqslant \delta < \infty. \tag{6}$$

Ici, $a_\varepsilon(u,v) = \displaystyle\int_0^{2\pi} [\varepsilon u'v' + u'v]dx.$

Ça ne marche évidemment pas avec la norme habituelle de H_0^1, $\|u\|^2_{H_0^1} = \int u'^2$ puisque la constante de coercivité $\dfrac{a(u,u)}{\|u\|^2} = \varepsilon$.

Examinons le problème à partir des séries de Fourier de u et v: $u(x) = \dfrac{a_0}{2} + \sum_1^\infty a_k \cos kx + b_k \sin kx$, $v(x) = \dfrac{c_0}{2} + \sum_1^\infty c_k \cos kx + d_k \sin kx$, et essayons des normes $\|u\|^2 = \sum_1^\infty f_k^2(a_k^2+b_k^2)$, $\|v\|^2 = \sum_1^\infty g_k^2(c_k^2+d_k^2)$. Inutile de considérer a_0 et c_0 puisque les constantes non nulles ne sont pas dans H_0^1. La norme habituelle de H^1 correspond à $f_k = g_k = k$. Pour H^m, $f_k = g_k = k^m$, valable même si m n'est pas entier.

On trouve alors rapidement [8] $a_\varepsilon(u,v) = \pi \sum_1^\infty [\varepsilon k^2(a_kc_k + b_kd_k) + k(-a_kd_k + b_kc_k)]$.



Pour u donné, cherchons v qui maximise $a_\varepsilon(u,v)/\|v\|$, ou encore une forme linéaire en les g_kc_k et g_kd_k, de coefficients $(\varepsilon k^2 a_k + kb_k)/g_k$ et $(\varepsilon k^2 b_k - ka_k)/g_k$, sur un cercle. L'optimum est évidemment réalisé lorsque le gradient est aligné sur le rayon vecteur, donc, $(\varepsilon k^2 a_k + kb_k)/g_k = \lambda g_k c_k$, $(\varepsilon k^2 b_k - ka_k)/g_k = \lambda g_k d_k$, où λ^2 vaut $\|v\|^{-2}\sum_1^\infty g_k^{-2}[(\varepsilon k^2 a_k + kb_k)^2 + (\varepsilon k^2 b_k - ka_k)^2]$ (effectuer la sommes des carrés). On trouve finalement

$$\left(\frac{a_\varepsilon(u,v)}{\|u\|\ \ \|v\|}\right)^2 = \pi^2 \frac{\sum_1^\infty g_k^{-2}[(\varepsilon k^2 a_k + kb_k)^2 + (\varepsilon k^2 b_k - ka_k)^2]}{\sum_1^\infty f_k^2(a_k^2+b_k^2)}.$$

Analyse mode par mode: on minimise et on maximise sur $a^2+b^2=1$

$$\frac{\pi^2}{f_k^2 g_k^2}\begin{bmatrix} a & b\end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \varepsilon k^2 & -k \\ k & \varepsilon k^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \varepsilon k^2 & k \\ -k & \varepsilon k^2\end{bmatrix}}_{\begin{bmatrix} \varepsilon^2 k^4 + k^2 & 0 \\ 0 & \varepsilon^2 k^4 + k^2\end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a \\ b\end{bmatrix},$$

donc $\pi^2 f_k^{-2} g_k^{-2}$ fois $\sigma^2_{\min}$ et $\sigma^2_{\max}$ de $\begin{bmatrix} \varepsilon k^2 & k \\ -k & \varepsilon k^2\end{bmatrix}$, bref, il suffit de prendre par exemple $f_k^2 = g_k^2 = \sqrt{\varepsilon^2 k^4 + k^2}$. Si on avait pris la norme usuelle de H^1, $f_k^2 = g_k^2 = k^2$, on aurait le rapport mode par mode $\varepsilon^2 + k^{-2}$, proche de 1 aux basses fréquences (très bien), mais tendant vers ε^2 aux hautes fréquences (ouch).

L'auteur de [8] prend, entre autres exemples, le choix équivalent $f_k^2 = g_k^2 = \varepsilon k^2 + k$, montrant ainsi qu'il s'agit d'un mélange subtil des normes de H^1 et $H^{1/2}$.

2.2.2. *Cas général.* On a maintenant [9]

$$\mathcal{L}_\varepsilon u := -\varepsilon \Delta u + \boldsymbol{c}\boldsymbol{\cdot}\nabla u = f \tag{7}$$

dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, avec $u = 0$ sur la frontière de ω.

Essayons la même chose sur un rectangle $L_1 \times L_2$:

$$u(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} a_k e^{ik\omega\cdot x} = \sum_{k_1=-\infty}^{\infty}\sum_{k_2=-\infty}^{\infty} a_{k_1,k_2} e^{i(k_1\omega_1 x_1 + k_2\omega_2 x_2)}, \quad v(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} b_k e^{ik\omega\cdot x},$$

avec $\omega_1 = 2\pi/L_1, \omega_2 = 2\pi/L_2$, $a_{-k} = \overline{a_k}, b_{-k} = \overline{b_k}$, $\|u\|^2 = \sum f_k^2|a_k|^2$, $\|v\|^2 = \sum g_k^2|b_k|^2$.

$$\begin{aligned} a_\varepsilon(u,v) &= L_1L_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}^2} a_k\overline{b_k}[\varepsilon(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega_2^2) + i(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)] \\ &= L_1L_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (a_k\overline{b_k} + \overline{a_k}b_k)\varepsilon(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2) + i(a_k\overline{b_k} - \overline{a_k}b_k)(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2) \end{aligned}$$

$$= 2L_1L_2 \sum_{k\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_+} (\mathrm{Re}\ a_k \mathrm{Re}\ b_k + \mathrm{Im}\ a_k \mathrm{Im}\ b_k)\varepsilon(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2) + (\mathrm{Re}\ a_k \mathrm{Im}\ b_k - \mathrm{Im}\ a_k \mathrm{Re}\ b_k)(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2$$

max. en

$$\begin{aligned} g_k^{-1}[\mathrm{Re}\ a_k\varepsilon(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2) - \mathrm{Im}\ a_k(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)] &= \lambda g_k \mathrm{Re}\ b_k, \\ g_k^{-1}[\mathrm{Im}\ a_k\varepsilon(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2) + \mathrm{Re}\ a_k(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)] &= \lambda g_k \mathrm{Im}\ b_k, \end{aligned}$$

ou $\lambda g_k b_k = [\varepsilon a_k(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2) + i a_k(k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)]/g_k$, où $\lambda^2 = \sum g_k^{-2}|a_k|^2[\varepsilon^2(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega^2)^2 + (k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)^2]/\|v\|^2$, et

$$\left(\frac{a_\varepsilon(u,v)}{\|u\|\ \|v\|}\right)^2 = \frac{L_1^2L_2^2\sum_{k\in\mathbb{Z}^2} g_k^{-2}|a_k|^2[\varepsilon^2(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega_2^2)^2 + (k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)^2]}{\|u\|^2 = \sum f_k^2|a_k|^2},$$

d'où un choix optimal $f_k^2 = g_k^2 = \sqrt{\varepsilon^2(k_1^2\omega_1^2 + k_2^2\omega_2^2)^2 + (k_1\omega_1 c_1 + k_2\omega_2 c_2)^2}$.

On renforce donc l'importance des ondes planes $\exp(i(k_1\omega_1 x_1 + k_2\omega_2 x_2))$ se propageant dans la direction $\boldsymbol{c}$.

3. **References.**

[1] Bauschke, Heinz H.; Güler, Osman; Lewis, Adrian S.; Sendov, Hristo S. Hyperbolic polynomials and convex analysis. *Canad. J. Math.* **53** (2001), no. 3, 470–488. `http://www.uoguelph.ca/~hbauschk/Research/17.pdf`

[2] Richard Beals, book review of *Some points of analysis and their history*, by Lars Gårding, University Lecture Series, vol. **11**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, *BULLETIN (New Series) OF THE AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY* Volume **35**, Number 2, April 1998, Pages 157-160 `http://www.ams.org/bull/1998-35-02/S0273-0979-98-00742-3/S0273-0979-98-00742-3.pdf`

[3] Armand Borel, Gennadi M. Henkin, and Peter D. Lax: Jean Leray (1906–1998), *NOTICES OF THE AMS* VOLUME **47**, NUMBER 3 (2000) 350–359 `http://www.ams.org/notices/200003/mem-leray.pdf`

[4] Cagnac, Francis: Problème de Cauchy sur un conoïde caractéristique. *Annales de la faculté des sciences de Toulouse* Sér. 5, 2 no. 1 (1980), p. 11-19 `http://www.numdam.org/item?id=AFST_1980_5_2_1_11_0`

[5] Lars Gårding, Hyperbolic Equations in the Twentieth Century `http://smf.emath.fr/Publications/SeminairesCongres/1998/3/pdf/smf_sem-cong_3_37-68.pdf` Résumé: Le sujet débute avec la théorie de Huygens qui considère les fronts d'onde comme des enveloppes d'ondes plus régulières, et se poursuit par les travaux de Euler, d'Alembert et Riemann. Les singularités des fronts d'onde nont pas été comprises avant la théorie de la "partie finie" de Hadamard au début de ce siècle. Les contributions de Herglotz, Petrovsky et dans les années quarante, la théorie des distributions de Laurent Schwartz ont éclairé l'étude des singularités des solutions des EDP hyperboliques. On passe en revue les solutions au problème de Cauchy données par Hadamard,

Schauder, Petrovsky et l'auteur. Plus récemment, l'analyse microlocale de M.Sato et L. Hörmander a permis de grandes avancées dans la compréhension de la propagation des singularités. L'analyse fonctionnelle, les distributions et l'analyse microlocale seront certainement des outils importants du prochain siècle.

[6] Lewis, A. S.; Parrilo, P. A.; Ramana, M. V. The Lax conjecture is true. *Proc. Amer. Math. Soc.* **133** (2005), no. 9, 2495–2499 (electronic). `http://arxiv.org/abs/math.OC/0304104`
This paper answers affirmatively a 47-year-old conjecture posed by Lax. A homogeneous polynomial on $\mathbb{R}^n$ of degree d is called hyperbolic with respect to a vector e if $p(e) \neq 0$ and for all vectors $x \in \mathbb{R}^n$ the univariate polynomial $t \mapsto p(x - te)$ of degree d has only real roots. The conjecture that Lax posed in 1958 states that hyperbolic polynomials in three variables (that is, $n = 3$) are determinants of linear combinations of three symmetric matrices. The authors observe that there is a one-to-one correspondence between the hyperbolic polynomials and the real zero polynomials $q(y, z)$ on $\mathbb{R}^2$ defined by the property that the univariate polynomial $t \mapsto q(ty, tz)$ has all real roots. Then they use a result by Helton and Vinnikov that all real zero polynomials are of the form $\det(I + yB + zC)$ for some symmetric matrices B and C. Reviewed by Hristo S. Sendov

[7] Benoît Perthame, Equations de transport non linéaires et systèmes hyperboliques. Théorie et méthodes numériques 2003-2004 `http://www.dma.ens.fr/~perthame/cours_hyp.pdf`
1 Exemples d'équations de transport et de systèmes hyperboliques 7
2 Caractéristiques, chocs, détentes 21
3 Méthode de viscosite pour les LCS 37
4 Méthodes des volumes finis et decentrement (equations linéaires) 45
5 Méthodes des volumes finis pour les L. C. S. 63
6 Exemples de système 2×2 : élastodynamique et p-système 73

[8] G. Sangalli, Numerical evaluation of F.E.M. with application to the 1-D advection-diffusion problem, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, Vol. **12** (2), pp. 205-228, 2002. `http://www-dimat.unipv.it/sangalli/infsup1d-math.pdf`

[9] G. Sangalli, Analysis of the advection-diffusion operator using fractional order norms, *Numer. Math.*, Vol. **97** (4), pp. 779–796, 2004. `http://www-dimat.unipv.it/sangalli/adv-diff-analysis.pdf`

[10] Alexander P. Veselov Huygens principle, November 6, 2002, Abstract: A short review on Huygens principle prepared for the *Encyclopedia of Nonlinear Science*. `http://www.maths.gla.ac.uk/~xl/seminar/Veselov.pdf`