

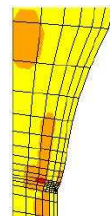


Université catholique de Louvain

Analyse numérique 2

MATH2180
2006-2007

Alphonse Magnus,
Institut de Mathématique Pure et Appliquée,
Université Catholique de Louvain,
Chemin du Cyclotron,2,
B-1348 Louvain-la-Neuve
(Belgium)
(0)(10)473157 , magnus@inma.ucl.ac.be,
[http ://www.math.ucl.ac.be/membres/magnus/](http://www.math.ucl.ac.be/membres/magnus/)



[http ://www.mema.ucl.ac.be/~vl/projects/hp-methods.html](http://www.mema.ucl.ac.be/~vl/projects/hp-methods.html)

Table des matières

Quelques références.	7
0.1. Livres et articles	7
0.2. Ressources réseau	8
0.2.1. Usenet, FAQ, KuLeuven, Matlab, Netlib.	8
0.2.2. Packages.	9
 Introduction.	 17
1. Solutions d'EDP, caractéristiques. [Courant & Hilbert]	17
1.1. Premiers exemples	17
1.2. Problème de Cauchy	20
1.3. Un exemple exemplaire : équation de la membrane	21
1.4. EDP d'ordre 2 : caractéristiques	22
 Chapitre 1. Équations elliptiques, formulations variationnelles.	 27
1. Équations elliptiques et problèmes aux limites.	27
1.1. Solution donnée sur une frontière	27
1.2. Formulations variationnelles : introduction	28
1.3. Méthode numérique associée à une formulation variationnelle	30
1.4. Espaces de fonctions continûment dérivables par morceaux	30
1.5. Traitement complet d'un problème à une dimension	33
1.5.1. Formulation classique.	33
1.5.2. Formulation variationnelle forte.	33
1.5.3. Formulation variationnelle semi-faible.	33
1.5.4. Formulation variationnelle faible, ou distributionnelle.	34
1.6. EDP elliptiques et formulations variationnelles en dimension > 1	34
1.6.1. Où se trouve la solution d'une EDP elliptique?	36
2. Formes coercives, problème de minimisation, méthode de Ritz-Galerkin.	37
2.1. Formulation variationnelle dans un espace vectoriel	37
2.2. Méthode de Ritz-Galerkin	42
3. Formes bilinéaires et opérateurs dans des espaces de Hilbert.	45
3.1. Espaces de Banach et de Hilbert	45
3.2. Le problème de l'existence de la solution. Théorème de Lax-Milgram.	47
4. Relations entre méthodes de projection : Galerkin, etc.	54
4.1. Galerkin	54
4.2. Ritz	54
4.3. Galerkin-Petrov	55
4.4. Moindres carrés	57
4.5. Collocation	57

Chapitre 2. Méthode des éléments finis.	58
1. Introduction et définition.	58
2. Ensembles unisolvants, interpolation.	59
3. Éléments unidimensionnels.	61
3.1. Interpolation linéaire par morceaux	61
3.2. Interpolation polynomiale de Lagrange	62
3.3. Interpolation polynomiale d’Hermite	63
3.4. Interpolation cubique d’Hermite par morceaux	63
4. Éléments bidimensionnels.	76
4.1. Éléments rectangulaires	78
4.1.1. Éléments produits	78
4.1.2. L’élément “ serendipity ”.	79
4.1.3. Hermite bicubique	80
4.2. Éléments triangulaires	81
4.2.1. Élément linéaire (Courant)	81
4.2.2. Triangle à six points	84
4.2.3. Autres éléments triangulaires d’interpolation	84
4.2.4. Triangle d’Hermite	85
4.2.5. Triangle d’Argyris	86
5. Résumé de ce chapitre.	87
Chapitre 3. Espaces de Sobolev, convergence.	88
1. Introduction et définitions.	88
1.1. Produit scalaire de Sobolev	88
1.2. Espaces de Sobolev	89
1.2.1. Définition	89
1.2.2. Identification à un espace de fonctions	89
2. Propriétés des espaces de Sobolev.	90
2.1. Formes définies sur $H^m(\Omega)$	90
2.2. Formes bilinéaires et opérateurs; dérivées faibles	94
2.3. Traces	96
3. Coercivité de $\int_{\Omega} \mathbf{grad} u \cdot \mathbf{grad} v \, d\mathbf{x}$ dans $H_0^1(\Omega)$	99
4. Erreur d’approximation de la méthode de Ritz.	101
5. Méthodes d’éléments finis non conformes, “crimes variationnels”.	103
6. Estimation <i>a posteriori</i> ; méthodes adaptatives.	108
Chapitre 4. Méthodes numériques d’obtention de l’approximation de Ritz.	110
1. Élaboration et résolution des équations. Conditionnement.	110
2. Un exemple de traitement en matlab	113
Chapitre 5. Schémas de différences finies : problèmes elliptiques.	122
1. Opérateurs de prolongement et de restriction.	122
1.1. Normes	122
2. Approximation d’opérateurs. Consistance.	122
2.1. Définition	123
2.2. Discrétisations du laplacien	124
3. Solubilité des équations discrètes. Stabilité numérique.	125

3.1. Spectres de laplaciens discrétisés	126
3.2. Déterminant, constante de Catalan.	127
3.3. Consistance et stabilité numérique \Rightarrow convergence	127
4. Méthodes itératives de résolution numérique. Méthodes multigrilles.	128
4.1. Méthode de Jacobi	128
4.2. Méthodes multigrilles	129
5. Matrices d'inverses positives. Convergence.	138
5.1. Matrices positives, M -matrices	138
5.2. Application au laplacien	139
5.3. Processus stochastique	140
6. Autres méthodes de traitement du laplacien.	142
6.1. Transformation conforme (2D)	142
6.2. Equations intégrales sur la frontière, fonction de Green	143
6.3. Développements multipolaires	144
7. Décomposition de domaine, complément de Schur, substructuring.	146
8. Conditionnement et méthodes itératives, préconditionnement.	147
Chapitre 6. Schémas de différences finies : problèmes d'évolution.	151
1. Equation de la chaleur ; de la diffusion.	151
1.1. Equation de la chaleur	151
1.2. Solution par noyau de Poisson	152
1.3. Equation de la diffusion ; diffusion des euros	152
1.3.1. Effect of adding fresh coins.	153
1.4. Modes et séries de Fourier	155
1.5. Exemples de stabilité et instabilité numérique	155
2. Consistance et stabilité pour problèmes d'évolution $\partial u/\partial t + Mu = f$	157
2.1. Problèmes bien posés. Opérateur solution.	157
2.2. Consistance et stabilité de discrétisations de problèmes d'évolution	159
3. Théorème d'équivalence de Lax.	159
4. Classe des équations paraboliques.	160
4.1. Examen de quelques schémas	161
4.2. Schémas à deux niveaux de temps	161
4.3. Schémas à plus de deux niveaux de temps	164
5. Equations hyperboliques.	168
5.1. Caractéristiques, domaine d'influence	168
5.2. Théorème	172
5.3. Stabilité numérique	174
5.4. Quelques comptes rendus de recherches récentes	176
5.4.1. Méthodes adaptatives.	177
5.4.2. Galerkin discontinu	178
5.4.3. Hyperbolicité.	180
5.4.4. Condition nécessaire	181
5.4.5. Obtention de la solution par superposition.	182
5.4.6. Transport, advection, diffusion.	183
5.4.7. Problème 1D	183
5.4.8. Cas général	184
5.4.9. References.	185

Chapitre 7. Problèmes d'évolution : conditions de stabilité numérique.	187
1. Norme matricielle.	188
2. Quelques conditions suffisantes.	189
2.1. Norme $\leq 1 + \text{const.}\Delta t$	189
2.2. Matrices symétriques, normales	189
2.3. Formes de Jordan et de Schur	189
3. Condition nécessaire de von Neumann.	190
4. Théorème de Kreiss.	190
4.1. Préparation	190
4.2. Le théorème de Kreiss	191
4.3. Preuve	191
Chapitre 8. Méthodes (pseudo) spectrales.	195
1. Fonctions propres d'opérateurs autoadjoints.	195
2. Calcul en représentation spectrale.	196
2.1. Ritz-Galerkin	196
2.2. Un problème de Trefethen	198
2.3. Méthode des tau	201
3. Calcul en représentation ponctuelle.	201
3.1. Méthode de collocation	202
3.2. Représentation matricielle des opérateurs différentiels	202
4. Exemples de conditions de stabilité numérique :	204
Index	205



Le cours passe en revue les principales méthodes de résolution numérique des équations aux dérivées partielles. Il se situe entre des cours consacrés à la théorie de ces équations et de leurs solutions

cf. > UCL > Enseignement et formation > Programme d'études 2006-2007 <http://www.ucl.ac.be/enseignement/formation/programme-etudes-2006-2007>

INMA 2345 Equations différentielles ordinaires : problèmes aux limites [30], Q2, 3 créd., D. Bonheure,

MAT 1321 Analyse fonctionnelle et équations aux dérivées partielles, [45-45], Q1 , 8 créd., M. Willem,

MATH 2421 Analyse convexe et méthodes variationnelles [30-0], Q1, 3 créd., M. Willem,

MATH 2490 Problèmes aux limites pour les EDO et EDP [45-0], Q1, 4,5 créd., J. Mawhin,

MAPA 3037 Méthodes topologiques et variationnelles en analyse [30], Q1 + Q2, 2 créd., P. Habets, M. Willem.

et des cours orientés vers des applications spécifiques

INMA2715 Calcul scientifique sur ordinateurs parallèles [30-30], Q2, 5 créd. , R. Keunings, (pas en 2006-2007)

Meca MECA 2120 Introduction aux méthodes d'éléments finis[†] [30-30], Q1, 5 créd., V. Legat,

MECA 2170 Conception assistée par ordinateur en génie mécanique [30-30] , Q1, 5 créd., V. Legat,

MECA 2620 Simulation des phénomènes de transfert dans les procédés industriels [30-10], Q1 , 4 créd. , F. Dupret,

MECA 2660 Méthodes numériques en mécanique des fluides [30-22,5], Q2 , 5 créd., G. Winckelmans,

PHY2371 Simulation numérique en physique [22.5h+30h exercices] ,Q2, 5 crédits, Eric Deleersnyder, Bernard Piraux

Cela ne veut pas dire qu'il faut avoir suivi un ou des cours théoriques (cependant vivement recommandés, bien entendu), on établira (ou rappellera, plus ou moins bien) l'essentiel des bases théoriques nécessaires.

Au fait, le présent cours vaut 4,5 créd.

[†] Voir, à ce sujet,

<http://www.mema.ucl.ac.be/teaching/meca2120/index.html>

extrait de

<http://www.meca.ucl.ac.be/memawww/members/vl/figure.gif>

Ce cours a été créé par le Professeur *Jean Meinguet* qui assura son enseignement jusqu'en 1995. Au fil des années, l'accent fut mis sur les recherches contemporaines en méthodes de résolution de divers problèmes d'analyse fonctionnelle appliquée.

En 1973, le Professeur *Jean Descloux*, de l'École Polytechnique Fédérale de Lausanne, vint donner à Louvain-la-Neuve un cours sur l'analyse mathématique de la méthode des *éléments finis*, méthode qui commençait alors à être convenablement formalisée^{††}. Les notes du Professeur Descloux forment encore l'essentiel de la première partie du présent cours.

^{††} Parmi les pionniers de la méthode, citons *Fraeijs de Veubeke*, professeur à Liège et Louvain. Par ailleurs, notre Université reçut également les visites de *P. Ciarlet* et *P. Raviart* (Paris).