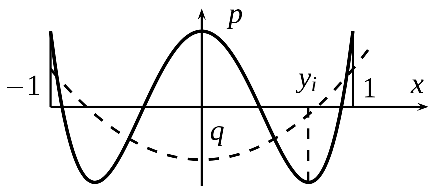
Spectral Methods in MATLAB,
Lloyd N. Trefethen (ed. SIAM, 2000).
Chapter 5: Polynomial Interpolation and Clustered Grids.

1. **Interpolation:** $1^{\text{ère}}$ **approche.**

(1) $f(x) - \text{Taylor}_{N-1}(x) = \dfrac{f^{(N)}(\xi)}{N!}\, x^N; \qquad f(x) - \text{interp}_{N-1}(x) = \dfrac{f^{(N)}(\xi')}{N!}\,(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N),$



Tchebycheff: la norme du maximum dans $[-1,1]$ de $p(x) := (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_N)$ est minimisée par le polynôme (non constant si $N \geqslant 1$) prenant les valeurs extrêmes de sa valeur absolue en $N+1$ points distincts $y_0, y_1, \dots, y_N$ de $[-1,1]$.

En effet, p' doit changer de signe en $N-1$ points de l'intervalle ouvert $(-1,1) \Rightarrow p$ change N fois de signe comme sur la figure. Supposons $q = x^N + \cdots$ meilleur que p, alors $p(y_i) - q(y_i)$ a le même signe que $p(y_i)$, donc présente également N changements de signe, ce qui est impossible car $p - q$ est de degré $< N$. □

Théorie spéciale des polynômes de Tchebycheff:

(2) $$p(x) = t_N(x) = \frac{T_N(x)}{2^{N-1}} = \frac{\cos(n \arccos x)}{2^{N-1}},$$

$T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1, T_3(x) = 4x^3 - 3x, \dots, \quad T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x).$

(3) $$x_j = \cos\left(\frac{(2j-1)\pi}{2N}\right), \qquad j = 1, 2, \dots, N.$$

2. **Amplitudes et enveloppes.**

Comment décrire l'allure de $p(x)$ sur $[a,b]$, ou sur un ensemble E du plan complexe, d'après la répartition d'un grand nombre de points $x_1, x_2, \dots, x_N$?

Réponse: si la densité de points est proche d'une densité limite ρ au sens que le nombre de points entre α et $\beta \approx N\int_\alpha^\beta \rho(x)\,dx$, alors

(4) $$p(x) = \exp \varphi_N(x) \approx \exp(N\varphi(x)), \quad \varphi(x) = \int_a^b \log(x-t)\,\rho(t)\,dt$$

En effet, $\varphi_N(x) = \sum_1^N \log(x - x_j) \approx \sum_{\text{intervalles}} N\rho(\text{interv.}) \log(x-t)$. □

φ est le potentiel complexe de la distribution ρ; $\phi = \text{Re}\,\varphi$. ϕ est le potentiel électrostatique bidimensionnel d'une charge -1 répartie sur E selon la distribution ρ.

Exemples.

E	ρ	φ
$\{0\}$	δ (Taylor)	$\log x$
$[-1,1]$	$\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}$ (Tchebycheff)	$\log \dfrac{x+\sqrt{x^2-1}}{2}$
$[-1,1]$	$\dfrac{1}{2}$ (équidistants)	$\dfrac{1-x}{2}\log(x-1) + \dfrac{1+x}{2}\log(x+1) - 1$
$[-A,A]$	$\dfrac{\sqrt{A^2-x^2}}{\pi A/2}$ ("semicircle")	$\log \dfrac{x+\sqrt{x^2-A^2}}{2} + \dfrac{1}{2A^2}(x-\sqrt{x^2-A^2})^2$

Vérifications

- Pour Tchebycheff: par (3), $j = 1/(2\pi) + (N/\pi)\arccos(x_j)$, donc, le nombre de points entre x et 1 est $1/(2\pi) + (N/\pi)\arccos x \approx N\int_x^1 \rho(t)\,dt \Rightarrow \rho(t) = 1/(\pi\sqrt{1-x^2})$.
  Pour vérifier directement la formule de φ, poser $t = \cos\theta$ et $x = (X+1/X)/2$. On obtient $\log(x-t) = \log(X/2) + \log(1-e^{i\theta}/X) + \log(1-e^{-i\theta}/X)$. Il reste $\log(X/2)$.
  Les équipotentielles $\phi =$ constante sont donc les lieux $|X| =$ const. Ce sont des ellipses de foyers ±1: $X = Re^{i\eta} \Rightarrow x = ((R+1/R)/2)\cos\eta + i((R-1/R)/2)\sin\eta$.
- Pour les points équidistants, une primitive de $\log(x-t)$ est $(t-x)\log(x-t)-t$.
- Pour la densité semi-circulaire, $\phi = \log(A/2) + x^2/A^2 - 1/2$ dans $[-A,A]$.

3. Interpolation de fonctions analytiques.

Prenons d'abord $f(x) = \dfrac{1}{x-s}$, avec $s \notin E$. On a alors ***exactement***

$$\frac{1}{x-s} - \mathrm{interp}_{N-1}(x) = \frac{1}{x-s}\,\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(s-x_1)(s-x_2)\dots(s-x_n)} = \frac{p(x)}{(x-s)p(s)}. \tag{5}$$

L'erreur d'interpolation se comporte donc comme $\exp[N(\max_E \phi(x) - \phi(s))]$. Plus généralement, Theorem 5 (p. 48): si f est analytique dans un domaine D contenant E, le maximum de l'erreur d'interpolation sur E est borné par une expression contenant

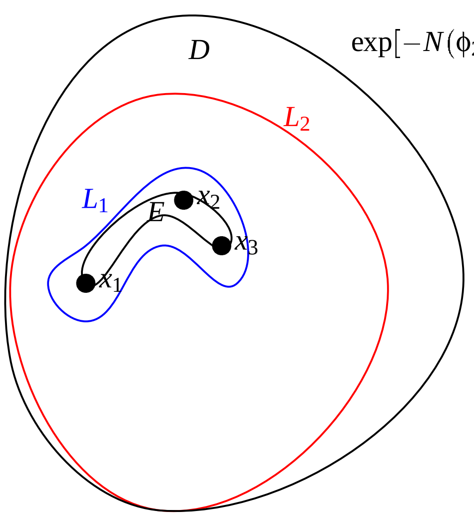
$$\exp[N(\max_E \phi \;-\; \min_C \phi)] \tag{6}$$

où C est un contour entourant E dans D.

En effet,

$$f(x) - \mathrm{interp}_{N-1}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_C f(t)\left[\frac{1}{t-x} - \text{interp. de } \frac{1}{t-x}\right]\,dt$$

(Cauchy). □



On a donc aussi

$$\exp[-N(\phi_2-\phi_1)] = \exp[-N/\mathrm{cap}(L_1,L_2)],$$

où ϕ_1 est la valeur de ϕ sur la plus petite équipotentielle L_1 contenant E, et ϕ_2 est la valeur de ϕ sur la plus grande équipotentielle L_2 contenue dans D.
$\mathrm{cap}(L_1,L_2)$ est la ***capacité du condensateur*** (bidimensionnel, ou cylindrique) d'armatures L_1 et $L_2 \Rightarrow$ avantage de minimiser cette capacité en veillant à ce que la frontière de E soit une équipotentielle!

C'est le cas pour Tchebycheff: $\phi_1 = -\log 2$, Theorem 6 (p. 48): err $\approx \exp[-N(\log 2 + \phi_2)]$.

Références: ouvrages de Walsh, Gaier, Hille, Szegő, Saff, Totik, Wallin,etc. aussi:
T. A. Driscoll & Lloyd N. Trefethen, *Schwarz-Christoffel Mapping*, Cambridge University Press, 2002.