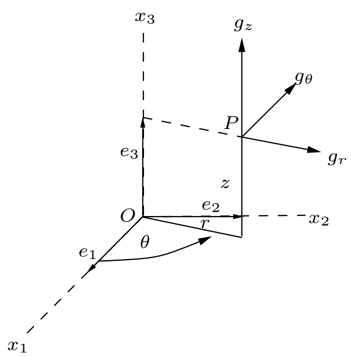
Mécanique des Milieux Continus
Les coordonnées curvilignes

Jusqu'à présent nous avons travaillé avec le système de coordonnées cartésiennes rectangulaires (x_1, x_2, x_3) ou (x_i) en abrégé. Cependant, pour de nombreuses applications pratiques, il est plus naturel et aisé de travailler avec un système de coordonnées *curvilignes* (en particulier, pour l'imposition des conditions aux frontières). Les deux systèmes de coordonnées curvilignes les plus courants sont le système *cylindrique* et le système *sphérique*.

1 Définition

Plutôt que de repérer la position d'un point P par ses coordonnées rectangulaires (x_i), nous pouvons utiliser des coordonnées curvilignes (α_i) telles que les coordonnées cylindriques (r, θ, z), ou les coordonnées sphériques (r, ϕ, θ) définies sur les figures ci-dessous. Ces coordonnées curvilignes sont reliées aux coordonnées rectangulaires par une relation biunivoque dans leur domaine d'application.

1.1 Coordonnées cylindriques



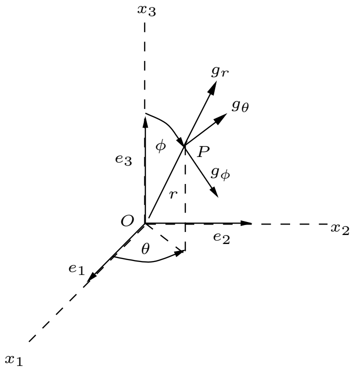
$$
\begin{aligned}
r &= (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} & x_1 &= r\ \cos\theta \\
\theta &= \arctan\frac{x_2}{x_1} & x_2 &= r\ \sin\theta \\
z &= x_3 & x_3 &= z
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

Domaine:

$$
\begin{aligned}
r &> 0 \\
0 \leq \theta &< 2\pi
\end{aligned}
$$

L'axe $r = 0$ est une ligne singulière pour le changement de coordonnées.

1.2 Coordonnées sphériques



$$\begin{aligned} r &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} & x_1 &= r\ \sin\phi\ \cos\theta \\ \phi &= \arctan \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{x_3} & x_2 &= r\ \sin\phi\ \sin\theta \\ \theta &= \arctan \frac{x_2}{x_1} & x_3 &= r\ \cos\phi \end{aligned} \tag{1.2}$$

Domaine:

$$\begin{array}{rcl} r & > & 0 \\ 0 < & \phi & < \pi \\ 0 \leq & \theta & \leq 2\pi \end{array}$$

Les axes $\phi = 0$ et $\phi = \pi$ sont des lignes singulières pour le changement de coordonnées.

2 Surfaces et lignes de coordonnées

Une *surface de coordonnées* est le lieu des points suivant lequel seules deux coordonnées curvilignes varient. Ainsi, en coordonnées cylindriques, ces surfaces sont données par des cylindres circulaires ($r = R$), des demi-plans issus de l'axe Ox_3 ($\theta = \Theta$), et des plans perpendiculaires à ce même axe ($z = Z$). En coordonnées sphériques, ces surfaces sont des sphères ($r = R$), des demi-plans ($\theta = \Theta$) et des cônes ($\phi = \Phi$). L'intersection de deux surfaces de coordonnées définit une *ligne de coordonnée*, suivant laquelle une seule coordonnée varie. En tout point P, il passe 3 surfaces de coordonnées et autant de lignes de coordonnées.

3 Vecteurs de base en un point P

3.1 Définition

Le *vecteur position* d'un point P relie l'origine O du système de coordonnées cartésiennes à ce point P. Il s'écrit

$$\overrightarrow{OP} = \underset{\sim}{x} = x_1\, \underset{\sim}{e}_1 + x_2\, \underset{\sim}{e}_2 + x_3\, \underset{\sim}{e}_3 \quad \text{ou} \quad x_i\, \underset{\sim}{e}_i \tag{3.3}$$

En coordonnées curvilignes, on définit les *vecteurs de base* au point P comme étant les 3 vecteurs unitaires tangents aux lignes de coordonnées passant par le point P et dirigés selon la direction de l'accroissement de la coordonnée curviligne correspondante. En vertu de la définition des lignes de coordonnées, ces vecteurs sont donnés par

$$\underline{g}_i = \frac{\dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \alpha_{\underline{i}}}}{\left\| \dfrac{\partial \underline{x}}{\partial \alpha_{\underline{i}}} \right\|}. \tag{3.4}$$

Pour rappel, un indice souligné indique qu'il n'y a pas lieu d'effectuer une sommation.

- Coordonnées cylindriques

  Avec
  $$\underline{x} = r\cos\theta\,\underline{e}_1 + r\sin\theta\,\underline{e}_2 + z\,\underline{e}_3 \tag{3.5}$$
  on trouve
  $$\begin{aligned} \underline{g}_r &= \cos\theta\,\underline{e}_1 + \sin\theta\,\underline{e}_2 \\ \underline{g}_\theta &= -\sin\theta\,\underline{e}_1 + \cos\theta\,\underline{e}_2 \\ \underline{g}_z &= \underline{e}_3 \end{aligned} \tag{3.6}$$
  La décomposition de $\underline{x}$ dans cette nouvelle base vient directement:
  $$\underline{x} = r\,\underline{g}_r + z\,\underline{g}_z \tag{3.7}$$

- Coordonnées sphériques

  Avec
  $$\underline{x} = r\sin\phi\cos\theta\,\underline{e}_1 + r\sin\phi\sin\theta\,\underline{e}_2 + r\cos\phi\,\underline{e}_3 \tag{3.8}$$
  on trouve
  $$\begin{aligned} \underline{g}_r &= \sin\phi\cos\theta\,\underline{e}_1 + \sin\phi\sin\theta\,\underline{e}_2 + \cos\phi\,\underline{e}_3 \\ \underline{g}_\phi &= \cos\phi\cos\theta\,\underline{e}_1 + \cos\phi\sin\theta\,\underline{e}_2 - \sin\phi\,\underline{e}_3 \\ \underline{g}_\theta &= -\sin\theta\,\underline{e}_1 + \cos\theta\,\underline{e}_2 \end{aligned} \tag{3.9}$$
  La décomposition de $\underline{x}$ dans cette base s'écrit simplement
  $$\underline{x} = r\,\underline{g}_r \tag{3.10}$$

Importante remarque: En coordonnées cartésiennes, les coordonnées (x_i) d'un point sont aussi les composantes de son vecteur position $\underline{x}$. Ceci n'est plus vrai en coordonnées curvilignes! Il est faux d'écrire
$$\underline{x} = r\,\underline{g}_r + \theta\,\underline{g}_\theta + z\,\underline{g}_z$$
ou
$$\underline{x} = r\,\underline{g}_r + \phi\,\underline{g}_\phi + \theta\,\underline{g}_\theta$$
et seules les expressions (3.7) et (3.10) sont correctes.

3.2 Propriétés importantes

3.2.1 Base locale

$$\boxed{\text{Les vecteurs de base au point } P \text{ dépendent de la position du point } P.}$$

Ceci se voit clairement par inspection des expressions de ces vecteurs. A partir des équations (3.6) pour le système cylindrique et des équations (3.9) pour le système sphérique, on obtient facilement l'expression des dérivées partielles spatiales des vecteurs de base:

- Système cylindrique

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_z}{\partial r} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial \theta} = \underline{g}_\theta & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{g}_r & \dfrac{\partial \underline{g}_z}{\partial \theta} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial z} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_z}{\partial z} = 0
\end{array}$$

- Système sphérique

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_\phi}{\partial r} = 0 & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial r} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial \phi} = \underline{g}_\phi & \dfrac{\partial \underline{g}_\phi}{\partial \phi} = -\underline{g}_r & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial \phi} = 0 \\
\dfrac{\partial \underline{g}_r}{\partial \theta} = \underline{g}_\theta \sin\phi & \dfrac{\partial \underline{g}_\phi}{\partial \theta} = \underline{g}_\theta \cos\phi & \dfrac{\partial \underline{g}_\theta}{\partial \theta} = -\underline{g}_r \sin\phi - \underline{g}_\phi \cos\phi
\end{array}$$

3.2.2 Base orthonormée d'orientation directe

$$\boxed{\text{Les vecteurs de base au point } P \text{ forment une base orthonormée d'orientation directe.}}$$

Les matrices de changement de base depuis la base cartésienne rectangulaire $\underline{e}_i$ sont donc orthogonales, de déterminant $+1$, et dépendent de la position du point P:

- coordonnées cylindriques

$$\mathcal{A}(r,\theta,z) = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.11}$$

- coordonnées sphériques

$$\mathcal{A}(r,\phi,\theta) = \begin{bmatrix} \sin\phi\,\cos\theta & \sin\phi\,\sin\theta & \cos\phi \\ \cos\phi\,\cos\theta & \cos\phi\,\sin\theta & -\sin\phi \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix} \tag{3.12}$$

Importante remarque: En coordonnées curvilignes, les matrices de changement de base (3.11) et (3.12) ne peuvent pas être utilisées pour effectuer un changement de coordonnées comme cela est permis en coordonnées cartésiennes. Les changements de coordonnées se font en utilisant (1.1) ou (1.2).

3.2.3 Composantes des tenseurs

Tout tenseur (quel que soit son ordre) peut être exprimé par ses composantes dans le système de coordonnées cylindrique ou sphérique, comme on peut le faire dans le système de coordonnées rectangulaires. Puisque la base locale est orthonormée, nous pouvons appliquer les règles de multiplication des vecteurs unitaires et des dyades unitaires.

4 Opérations différentielles

4.1 L'opérateur $\underline{\nabla}$

Nous allons maintenant rechercher l'expression de l'opérateur $\underline{\nabla}$ en coordonnées curvilignes. En coordonnées rectangulaires, nous l'avions défini comme suit

$$\underline{\nabla} = \underline{e}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \underline{e}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \underline{e}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad \text{ou} \quad \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \tag{4.13}$$

Pour exprimer les opérateurs différentiels relatifs aux coordonnées cartésiennes (x_i) en fonction des opérateurs différentiels relatifs aux coordonnées curvilignes (α_i), on applique la règle de dérivation des fonctions composées:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}. \tag{4.14}$$

En appliquant cette règle, on trouve

- pour les coordonnées cylindriques

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + (0)\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= (\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + (0)\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= (0)\frac{\partial}{\partial r} + (0)\frac{\partial}{\partial \theta} + (1)\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.15}$$

- pour les coordonnées sphériques

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x_1} &= (\sin\theta\cos\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos\theta\cos\phi}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-\frac{\sin\phi}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial x_2} &= (\sin\theta\sin\phi)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos\theta\sin\phi}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\cos\phi}{r\sin\theta}\right)\frac{\partial}{\partial z} \\
\frac{\partial}{\partial x_3} &= (\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta} + (0)\frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned} \tag{4.16}$$

En injectant les expressions (3.6) et (4.15) dans l'expression (4.13) du gradient en coordonnées cartésiennes, on obtient l'expression de $\underline{\nabla}$ en coordonnées cylindriques:

$$\begin{aligned}
\underline{\nabla} &= \underline{e}_x \frac{\partial}{\partial x} + \underline{e}_y \frac{\partial}{\partial y} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \\
&= (\underline{e}_r \cos\theta - \underline{e}_\theta \sin\theta)\left((\cos\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) \\
&\quad + (\underline{e}_r \sin\theta + \underline{e}_\theta \cos\theta)\left((\sin\theta)\frac{\partial}{\partial r} + \left(+\frac{\cos\theta}{r}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}
\end{aligned}$$

et, après avoir simplifié, on trouve finalement

$$\boxed{\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\theta \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta} + \underset{\sim}{e}_z \frac{\partial}{\partial z}} \tag{4.17}$$

Un développement analogue utilisant les expressions (3.9) et (4.16) permet de trouver l'expression de $\underset{\sim}{\nabla}$ en coordonnées sphériques

$$\boxed{\underset{\sim}{\nabla} = \underset{\sim}{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underset{\sim}{e}_\phi \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \phi} + \underset{\sim}{e}_\theta \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial}{\partial \theta}} \tag{4.18}$$

4.2 Utilisation de l'opérateur nabla

Celle-ci doit être effectuée avec soin car les opérations différentielles portent à la fois sur les composantes les vecteurs de base qui, en coordonnées curvilignes, ne sont pas constants.

4.2.1 Gradient d'un champ scalaire f

Il suffit d'appliquer la formules (4.17) ou (4.18) suivant que f est exprimé en coordonnées cylindriques ou des coordonnées sphériques.

4.2.2 Gradient d'un champ vectoriel $\underset{\sim}{v}$

Il faut tenir compte du fait que les opérateurs de dérivation dans les formules (4.15) et (4.16) doivent être appliqués tant aux composantes de $\underset{\sim}{v}$ qu'aux vecteurs de base du système de coordonnées curvilignes choisi. Après de longs calculs, on obtient finalement

- Coordonnées cylindriques

$$\begin{array}{lll}
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{r\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{rz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial r} \\
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta r} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta\theta} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta z} = \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u_z}{\partial \theta} \\
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{zr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial z} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{z\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial z} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{zz} = \dfrac{\partial u_z}{\partial z}
\end{array}$$

- Coordonnées sphériques

$$\begin{array}{lll}
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{rr} = \dfrac{\partial u_r}{\partial r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{r\phi} = \dfrac{\partial u_\phi}{\partial r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{r\theta} = \dfrac{\partial u_\theta}{\partial r} \\
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\phi r} = \frac{1}{r}\dfrac{\partial u_r}{\partial \phi} - \dfrac{u_\phi}{r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\phi\phi} = \frac{1}{r}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \dfrac{u_r}{r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\phi\theta} = \frac{1}{r}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \\
(\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta r} = \frac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial u_r}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta\phi} = \frac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial u_\phi}{\partial \theta} - \dfrac{u_\theta}{r\tan\phi} & (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{u})_{\theta\theta} = \frac{1}{r\sin\phi}\dfrac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \dfrac{u_r}{r} + \dfrac{u_\phi}{r\tan\phi}
\end{array}$$

4.2.3 Divergence d'un champ vectoriel $\underset{\sim}{v}$

La divergence d'un champ vectoriel est égal à la trace du gradient de ce champ:

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v} = \text{ tr } (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v}) \tag{4.19}$$

ce qui en notation indicielle s'écrit

$$\underset{\sim}{\nabla} \cdot \underset{\sim}{v} = (\underset{\sim}{\nabla}\underset{\sim}{v})_{ii} \tag{4.20}$$

On obtient donc

- en coordonnées cylindriques

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}} \tag{4.21}$$

- en coordonnées sphériques

$$\boxed{\underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\phi}{r\tan\phi} + 2\frac{v_r}{r}} \tag{4.22}$$

4.2.4 Rotationnel d'un champ vectoriel $\underline{v}$

Le produit vectoriel se définit comme suit:

$$\underline{\nabla} \times \ \underline{v} = \underline{\underline{\underline{\epsilon}}} : (\underline{\nabla}\underline{v})^T \tag{4.23}$$

où $\underline{\underline{\underline{\epsilon}}}$ est le pseudo-tenseur de permutation. Il est défini de manière identique dans tout système de coordonnées:

$$(\underline{\underline{\underline{\epsilon}}})_{ijk} = \epsilon_{ijk}$$

où ϵ_{ijk} est le symbole de permutation. En notation indicielle, cette définition s'écrit

$$(\underline{\nabla} \times \underline{v})_i = \epsilon_{ijk}((\underline{\nabla}\underline{v})^T)_{kj} = \epsilon_{ijk}(\underline{\nabla}\underline{v})_{jk} \tag{4.24}$$

et nous constatons qu'en coordonnées cartésiennes, nous retrouvons bien la formulation classique

$$(\underline{\nabla} \times \underline{v})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

- Coordonnées cylindriques

  En utilisant les résultats de la section (4.2.2) nous calculons

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = ((\underline{\nabla}\underline{v})_{\theta z} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{z\theta})\underline{g}_r + ((\underline{\nabla}\underline{v})_{zr} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{rz})\underline{g}_\theta + ((\underline{\nabla}\underline{v})_{r\theta} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{\theta r})\underline{g}_z$$

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \underline{v} = (\frac{1}{r}\frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z})\underline{g}_r + (\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\underline{g}_\theta + (\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r})\underline{g}_z} \tag{4.25}$$

- Coordonnées sphériques

  De la même façon, on calcule

$$\underline{\nabla} \times \underline{v} = ((\underline{\nabla}\underline{v})_{\phi\theta} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{\theta\phi})\underline{g}_r + ((\underline{\nabla}\underline{v})_{\theta r} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{r\theta})\underline{g}_\phi + ((\underline{\nabla}\underline{v})_{r\phi} - (\underline{\nabla}\underline{v})_{\phi r})\underline{g}_\theta$$

$$\boxed{\underline{\nabla} \times \underline{v} = (\frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - \frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r})\underline{g}_r + (\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r} - \frac{\partial v_z}{\partial r})\underline{g}_\phi + (\frac{\partial v_\phi}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{v_\phi}{r})\underline{g}_\theta} \tag{4.26}$$