MECA 1901 – Mécanique des milieux continus Cours n°2

Brieux Delsaute et François Dupret

20/09/08

Repère – vecteur position

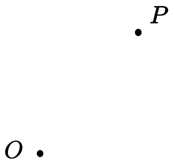
Repère – vecteur position

La position d'un point P de l'espace est entièrement spécifiée par la donnée :

Repère – vecteur position

La position d'un point P de l'espace est entièrement spécifiée par la donnée :

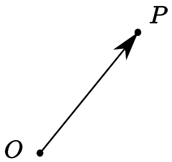
- d'une origine O



Repère – vecteur position

La position d'un point P de l'espace est entièrement spécifiée par la donnée :

- d'une origine O
- du vecteur position de P par rapport au point d'origine O : $\mathbf{x}^P = \overrightarrow{OP}$

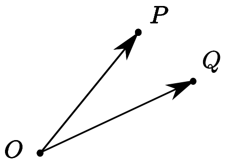


Repère – vecteur position

La position d'un point P de l'espace est entièrement spécifiée par la donnée :

- d'une origine O
- du vecteur position de P par rapport au point d'origine O : $\mathbf{x}^P = \overrightarrow{OP}$

De la même manière, la position d'un autre point Q est identifiée par son vecteur position $\mathbf{x}^Q = \overrightarrow{OQ}$



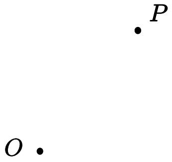
Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O

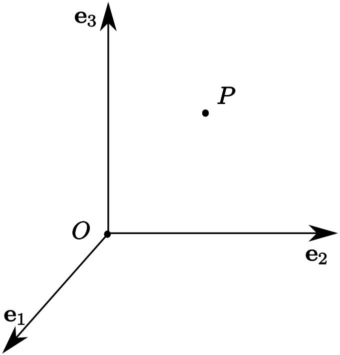


Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$

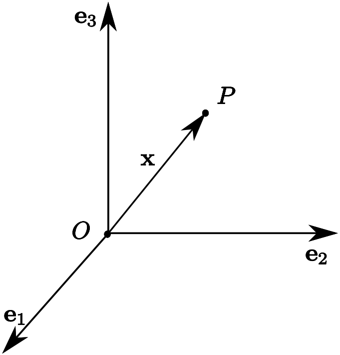


Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$



Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

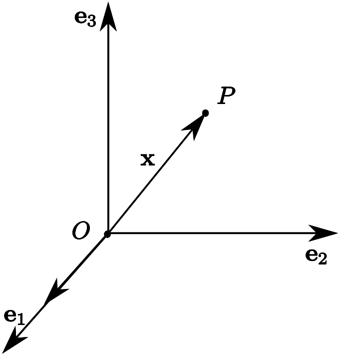
$\mathbf{x}$

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij})$

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$



Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

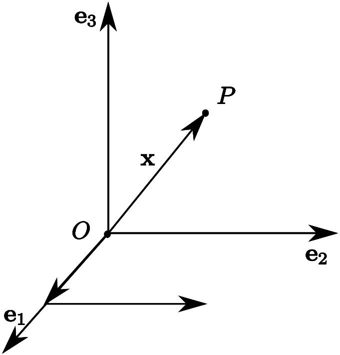
$$\mathbf{x} = x_1 \mathbf{e}_1$$

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$



Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2$$

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

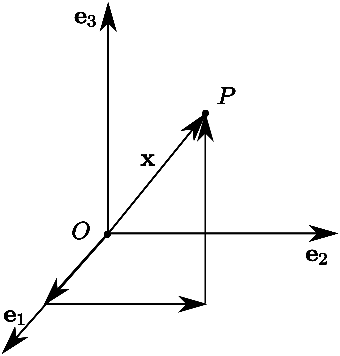
Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ $(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij})$

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$

Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$$

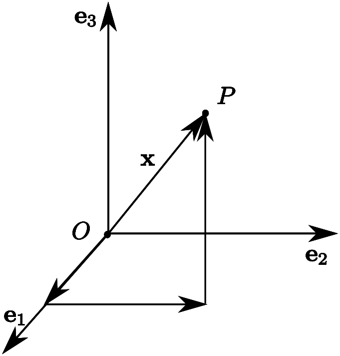


Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$



Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

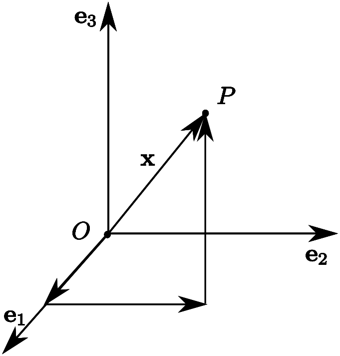
$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i$$

Repère orthonormé – coordonnées cartésiennes

Un repère orthonormé est caractérisé par

- une origine O
- 3 vecteurs de base orthonormés $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ et $\mathbf{e}_3$ ($\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$)

Ce repère particulier est désigné par $(O, \mathbf{e}_i)$



Les coordonnées cartésiennes de P sont les 3 composantes $x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e_i}$ du vecteur position de P dans la base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 = x_i\mathbf{e}_i$$

Les coordonnées cartésiennes ont les dimensions d'une longueur et sont exprimées en mètres dans le Système international d'unités (SI)

Les vecteurs de base sont adimensionnels.

Changements de repères

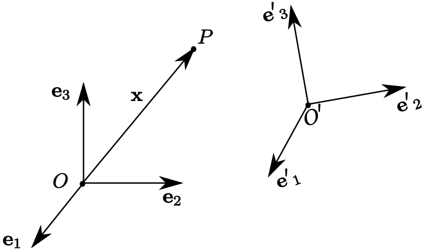
On considère deux repères cartésiens orthonormés $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}'_i)$

Changements de repères

On considère deux repères cartésiens orthonormés $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}'_i)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$, le vecteur position de P s'écrit

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i$$



Changements de repères

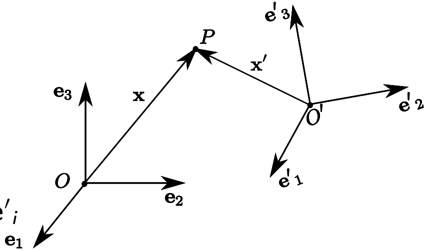
On considère deux repères cartésiens orthonormés $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}'_i)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$, le vecteur position de P s'écrit

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_i = \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i$$

Dans le repère $(O', \mathbf{e}'_i)$, le vecteur position de P s'écrit

$$\mathbf{x}' = x'_1\mathbf{e}'_1 + x'_2\mathbf{e}'_2 + x'_3\mathbf{e}'_3 \quad \text{avec} \quad x'_i = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{e}'_i$$



Changements de repères

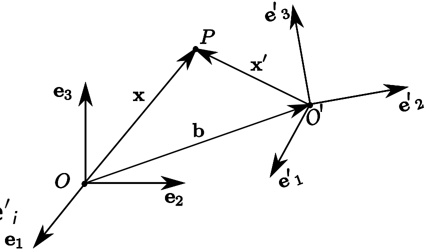
On considère deux repères cartésiens orthonormés $(O, \mathbf{e}_i)$ et $(O', \mathbf{e}'_i)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$, le vecteur position de P s'écrit

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3 \quad \text{avec} \quad x_i = \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_i$$

Dans le repère $(O', \mathbf{e'}_i)$, le vecteur position de P s'écrit

$$\mathbf{x}' = x'_1\mathbf{e'}_1 + x'_2\mathbf{e'}_2 + x'_3\mathbf{e'}_3 \quad \text{avec} \quad x'_i = \mathbf{x}'\cdot\mathbf{e'}_i$$



Les vecteurs position $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ sont reliés de manière évidente par les expressions

$$\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{x}' \iff \mathbf{x}' = -\mathbf{b} + \mathbf{x}$$

Changements de repères – matrice de changement de base

On obtient les relations permettant d'exprimer les "nouvelles" coordonnées x'_i en fonction des "anciennes" coordonnées x_i en projetant l'expression du "nouveau" vecteur position $\mathbf{x}' = -\mathbf{b} + \mathbf{x}$ sur les vecteurs de la "nouvelle" base $(\mathbf{e}'_i)$

$$x'_i = \mathbf{x}' \cdot \mathbf{e}'_i = (-\mathbf{b} + \mathbf{x}) \cdot \mathbf{e}'_i = (-b_j \mathbf{e}_j + x_j \mathbf{e}_j) \cdot \mathbf{e}'_i$$

soit

$$x'_i = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j)(x_j - b_j)$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \begin{bmatrix} x_1 - b_1 \\ x_2 - b_2 \\ x_3 - b_3 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j]$ est appelée **matrice de changement de base** ou encore **matrice des cosinus directeurs**

Matrice de changement de base

1. La matrice de changement de base $\mathcal{A}$ permet d'écrire formellement l'expression des vecteurs de la base $(\mathbf{e}'_i)$ par rapport à la base $(\mathbf{e}_i)$ sous la forme

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

   En effet, **la ligne** i de $\mathcal{A}$ **contient les composantes du vecteur de base $\mathbf{e}'_i$ par rapport à la base** $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$
2. Les lignes de $\mathcal{A}$ sont orthonormées

Matrice de changement de base : propriétés

Definition

Une matrice carrée $\mathcal{A}$ est orthogonale si ses lignes sont orthonormées

On vérifie facilement que cette définition est équivalente aux suivantes :

- $\mathcal{A}$ est carrée et ses colonnes sont orthonormées
- $\mathcal{A}$ est carrée et $\mathcal{A}\mathcal{A}^T = \mathcal{I}$ ($\Longleftrightarrow \mathcal{A}^T\mathcal{A} = \mathcal{I}$)
- $\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T$

Propriété des matrices orthogonales : $\det(\mathcal{A}) = \pm 1$

Si $\mathcal{A}$ représente une matrice de changement de base entre deux repères orthonormés :

- $\det(\mathcal{A}) = +1$ si les deux repères ont la même orientation
- $\det(\mathcal{A}) = -1$ si les deux repères d'orientations contraires

Changements de repères – matrice de changement de base

On obtient les relations permettant d'exprimer les "anciennes" coordonnées x_i en fonction des "nouvelles" coordonnées x'_i en projetant l'expression de "l'ancien" vecteur position $\mathbf{x} = \mathbf{b} + \mathbf{x}'$ sur les vecteurs de "l'ancienne" base $(\mathbf{e}_i)$

$$x_i = \mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_i = (\mathbf{b} + \mathbf{x}') \cdot \mathbf{e}_i = (b_j \mathbf{e}_j + x_j \mathbf{e}'_j) \cdot \mathbf{e}_i$$

soit

$$x_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j) x'_j + b_i$$

Ces relations peuvent s'écrire sous forme matricielle comme

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}'_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_2 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}^T} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

Champs scalaires

Le champ scalaire typique est le champ de température T

Champs scalaires

Le champ scalaire typique est le champ de température T

- la température en un endroit P et à un instant t s'exprime par un nombre réel dans l'unité choisie (le Kelvin dans le SI)

Champs scalaires

Le champ scalaire typique est le champ de température T

- la température en un endroit P et à un instant t s'exprime par un nombre réel dans l'unité choisie (le Kelvin dans le SI)
- le champ de température est entièrement caractérisé par une fonction unique de la position P et du temps t : $T = T(P, t)$

Champs scalaires

Le champ scalaire typique est le champ de température T

- la température en un endroit P et à un instant t s'exprime par un nombre réel dans l'unité choisie (le Kelvin dans le SI)
- le champ de température est entièrement caractérisé par une fonction unique de la position P et du temps t : $T = T(P, t)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$ le champ de température est caractérisé par une fonction unique des 3 coordonnées cartésiennes x_i et du temps t

$$T = T^{(e)}(x_i, t)$$

Champs scalaires

Le champ scalaire typique est le champ de température T

- la température en un endroit P et à un instant t s'exprime par un nombre réel dans l'unité choisie (le Kelvin dans le SI)
- le champ de température est entièrement caractérisé par une fonction unique de la position P et du temps t : $T = T(P, t)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$ le champ de température est caractérisé par une fonction unique des 3 coordonnées cartésiennes x_i et du temps t

$$T = T^{(e)}(x_i, t)$$

La notation choisie ici est destinée à marquer une différence précise entre T, qui désigne la grandeur physique nommée température, mesurée à un endroit et un instant, et le symbole $T^{(e)}$ qui désigne la dépendance fonctionnelle de cette même température à l'égard des coordonnées x_i et du temps t.

Champs scalaires – invariance

Les objets de la Mécanique des milieux continus sont “invariants”, en ce sens qu’ils restent identiques pour tout changement entre deux repères fixes l’un par rapport à l’autre.

Champs scalaires – invariance

Les objets de la Mécanique des milieux continus sont “invariants”, en ce sens qu'ils restent identiques pour tout changement entre deux repères fixes l'un par rapport à l'autre.

- En particulier, la température en un point et à un instant donnés est un nombre qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier.

Champs scalaires – invariance

Les objets de la Mécanique des milieux continus sont "invariants", en ce sens qu'ils restent identiques pour tout changement entre deux repères fixes l'un par rapport à l'autre.

- En particulier, la température en un point et à un instant donnés est un nombre qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier.
- En cas de changement de repère, le champ de température T sera représenté par une nouvelle fonction représentant la dépendance fonctionnelle de la température à l'égard des "nouvelles "coordonnées x'_i et du temps t

$$T = T'^{(e)}(x'_i, t)$$

Champs scalaires – invariance

Les objets de la Mécanique des milieux continus sont “invariants”, en ce sens qu'ils restent identiques pour tout changement entre deux repères fixes l'un par rapport à l'autre.

- En particulier, la température en un point et à un instant donnés est un nombre qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier.
- En cas de changement de repère, le champ de température T sera représenté par une nouvelle fonction représentant la dépendance fonctionnelle de la température à l'égard des “nouvelles “coordonnées x'_i et du temps t

$$T = T'^{(e)}(x'_i, t)$$

Champs scalaires – invariance

- Cette nouvelle fonction s'obtient en exprimant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles coordonnées à chaque instant et en introduisant ces relations dans l'expression de $T^{(e)}$

$$T = T'^{(e)}(x'_i, t) = T^{(e)}(a_{ji}x'_j + b_i, t)$$

Champs scalaires – invariance

- Cette nouvelle fonction s'obtient en exprimant les anciennes coordonnées en fonction des nouvelles coordonnées à chaque instant et en introduisant ces relations dans l'expression de $T^{(e)}$

$$T = T'^{(e)}(x_i', t) = T^{(e)}(a_{ji}x_j' + b_i, t)$$

- Inversement, nous avons

$$T = T^{(e)}(x_i, t) = T'^{(e)}(a_{ij}(x_j - b_j), t)$$

Champs vectoriels

Le champ vectoriel typique est le champ de vitesse $\mathbf{v}$

Champs vectoriels

Le champ vectoriel typique est le champ de vitesse $\mathbf{v}$

- la vitesse en un endroit P et à un instant t s'exprime par 3 nombres réels dans les unités choisies (ms^{-1} dans le SI)

Champs vectoriels

Le champ vectoriel typique est le champ de vitesse $\mathbf{v}$

- la vitesse en un endroit P et à un instant t s'exprime par 3 nombres réels dans les unités choisies (ms^{-1} dans le SI)
- le champ de vitesse est entièrement caractérisé par une fonction vectorielle unique de la position P et du temps t : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P, t)$

Champs vectoriels

Le champ vectoriel typique est le champ de vitesse $\mathbf{v}$

- la vitesse en un endroit P et à un instant t s'exprime par 3 nombres réels dans les unités choisies (ms^{-1} dans le SI)
- le champ de vitesse est entièrement caractérisé par une fonction vectorielle unique de la position P et du temps t : $\mathbf{v} = \mathbf{v}(P, t)$

Dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$ le champ de vitesse est caractérisé par 3 fonctions des 3 coordonnées cartésiennes x_i et du temps t

$$\mathbf{v} = v_i^{(e)}(x_j, t)\mathbf{e}_i$$

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique
- Comme les vecteurs de base changent lorsque l'on change de repère, il est clair que les projections d'un même vecteur sur ces vecteurs de base vont également changer de sorte que le vecteur reste invariant

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique
- Comme les vecteurs de base changent lorsque l'on change de repère, il est clair que les projections d'un même vecteur sur ces vecteurs de base vont également changer de sorte que le vecteur reste invariant

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i$$

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique
- Comme les vecteurs de base changent lorsque l'on change de repère, il est clair que les projections d'un même vecteur sur ces vecteurs de base vont également changer de sorte que le vecteur reste invariant

$$\mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i = v'_j \mathbf{e}'_j$$

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique
- Comme les vecteurs de base changent lorsque l'on change de repère, il est clair que les projections d'un même vecteur sur ces vecteurs de base vont également changer de sorte que le vecteur reste invariant

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i &= v'_j \mathbf{e}'_j \\ &= v_i a_{ji} \mathbf{e}'_j \end{aligned}$$

Champs vectoriels – invariance

- La vitesse en un endroit P et à un instant t donnés est un vecteur qui ne changera pas si l'on passe à un nouveau repère fixe par rapport au premier étant donné que le vecteur vitesse relatif à des observateurs liés à ces repères restera identique
- Comme les vecteurs de base changent lorsque l'on change de repère, il est clair que les projections d'un même vecteur sur ces vecteurs de base vont également changer de sorte que le vecteur reste invariant

$$\begin{aligned} \mathbf{v} = v_i \mathbf{e}_i &= v'_j \mathbf{e}'_j \\ &= v_i a_{ji} \mathbf{e}'_j \end{aligned}$$

Donc

$$v'_i = a_{ij} v_j$$

et inversement

$$v_i = a_{ji} v'_j$$

Application (exercice 22)

On donne dans l'espace Euclidien à 3 dimensions un repère cartésien orthonormé $(O, \mathbf{e}_i)$.

On considère également deux autres repères cartésiens orthonormés :

- le repère $(O', \mathbf{e}'_i)$ est obtenu par une rotation des vecteurs de base $\mathbf{e}_i$ d'un angle de $\pi/4$ autour de $\mathbf{e}_3$,
- le repère $(O'', \mathbf{e}''_i)$ est obtenu par cette même rotation des vecteurs de base suivie d'une translation $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ de l'origine O.

1. **Changement de coordonnées**
   Ecrire les formules de changement de coordonnées pour passer du repère $(O, \mathbf{e}_i)$ aux repères $(O', \mathbf{e}'_i)$ et $(O'', \mathbf{e}''_i)$.

   Ecrire les formules de changement de coordonnées pour passer des repères $(O', \mathbf{e}'_i)$ et $(O'', \mathbf{e}''_i)$ au repère $(O, \mathbf{e}_i)$.

2. Quelles sont, dans les repères $(O', \mathbf{e}'_i)$ et $(O'', \mathbf{e}''_i)$, les équations du plan dont l'équation dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$ est $x_1 + x_2 = 1$.

   Même question pour le champ scalaire d ayant pour représentation $d^{(e)}(x_i) = x_1 + x_2 - 1$ dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$.
3. **Transformation de composantes**
   Ecrire sous forme matricielle la formule de transformation de composantes lorsque l'on passe du repère $(O, \mathbf{e}_i)$ au repère $(O', \mathbf{e}'_i)$.

   Vérifier que la matrice calculée possède bien les propriétés de matrices de changement de bases orthonormées.

   Que vaut la matrice de transformation de composantes lorsque l'on passe du repère $(O, \mathbf{e}_i)$ au repère $(O'', \mathbf{e}''_i)$?

4. Quelles sont, dans les repères $(O', \mathbf{e}'_i)$ et $(O'', \mathbf{e}''_i)$, les composantes du vecteur qui, dans le repère $(O, \mathbf{e}_i)$, est $(v_1, v_2, v_3) = (x_2, x_1, 0)$?