**MECA 1901 : interrogation du 23 novembre 2008**
**Réponses commentées de l'exercice 1**

# Question 1

On considère un cube de matière déformé sous l'action de contraintes homogènes à l'équilibre. Dans sa configuration non déformée (représentée ci-dessous), le cube occupe le domaine $(O \leq x_i \leq L)$ dans le repère $(O, \boldsymbol{e}_i)$. Il s'agit d'un problème de petits déplacements. Le tenseur des déformations infinitésimales et le tenseur des contraintes ont pour expression :

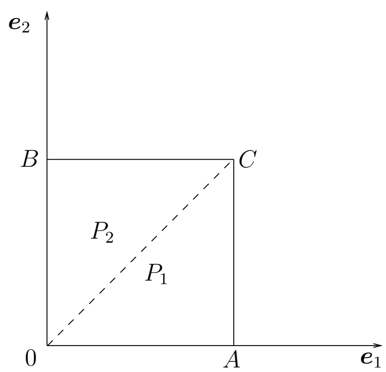
$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} a & b & 0 \\ b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ \gamma & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

où $0 < a, b \ll 1$.

1. Donner les dimensions physiques et unités de $a$ et $\alpha$ dans le Système International.
2. Déterminer $\gamma$ pour $\alpha$ et $\beta$ donnés. Justifier.
3. (a) Calculer le champ de déplacements du cube, sachant que le déplacement du point matériel à l'origine est nul, que le point matériel $A$ est maintenu sur l'axe $(O, \boldsymbol{e}_1)$ et que le point $C$ est maintenu dans le plan $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$.

   (b) Dessiner sur la figure ci-dessous le solide déformé.

   (c) Donner l'angle et l'axe de rotation infinitésimale pour un petit volume matériel situé à l'origine.
4. Calculer la longueur après déformation du segment $(O, C)$ de deux manières différentes.
5. Soit le plan matériel d'équation $x_1 = x_2$ qui divise virtuellement le cube en deux prismes à base triangulaire P1 et P2. Déterminer la résultante et le moment résultant des forces de contact excercées par le prisme P2 sur le prisme P1.



## Eléments de réponse

Sous-question 3

Rappelons tout d'abord que c'est le champ de déplacements qui fait le lien entre la configuration de référence (ou configuration initiale) et la configuration déformée courante. Par définition, le déplacement $\boldsymbol{u}$ d'un point matériel est le vecteur dont ce point est translaté lorsqu'on passe de la configuration de référence à la configuration déformée : le point matériel qui avait $\boldsymbol{x}$ pour vecteur position dans la configuration de référence se retrouve maintenant repéré par le vecteur $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{u}$. En connaissant le déplacement de tous les points matériels on peut donc déterminer la configuration déformée à partir de la configuration de référence.

(a) Le champ de déplacements se calcule en intégrant successivement les différentielles des composantes (1) du tenseur des rotations infinitésimales $\boldsymbol{\omega}$, (2) du tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$. Celles-ci sont données par les relations

$$d\omega_{ij} = \left( \frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k \tag{1}$$

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij})\, dx_j \tag{2}$$

Comme $\boldsymbol{\omega}$ est un tenseur antisymétrique ($\omega_{ij} = -\omega_{ji}$), on peut ne considérer que ses composantes hors-diagonale $\omega_{12}$, $\omega_{23}$ et $\omega_{31}$. La première des relations ci-dessus nous indique que leurs différentielles sont nulles et nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_{12} = \omega_{12}^0 \\ \omega_{23} = \omega_{23}^0 \\ \omega_{32} = \omega_{32}^0 \end{array} \right.$$

où $\omega_{ij}^0$ sont des constantes d'intégration qui ne peuvent pas encore être déterminées à ce stade-ci.

L'intégration des différentielles des composantes du champ de déplacements (2) donne

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & ax_1 + (b + \omega_{12}^0)x_2 - \omega_{31}^0 x_3 + u_1^0 \\ u_2 & = & (b - \omega_{12}^0)x_1 + ax_2 + \omega_{23}^0 x_3 + u_2^0 \\ u_3 & = & \omega_{31}^0 x_1 - \omega_{23}^0 x_2 + u_3^0 \end{array} \right.$$

où $u_1^0$, $u_2^0$ et $u_3^0$ sont des constantes qui peuvent être déterminées avec $\omega_{12}^0$, $\omega_{23}^0$ et $\omega_{31}^0$ en utilisant les conditions imposées sur les déplacements des points matériels $O$, $A$ et $C$ :

1. le déplacement du point matériel $O$ est nul

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1(0,0,0) = u_1^0 = 0 \\ u_2(0,0,0) = u_2^0 = 0 \\ u_3(0,0,0) = u_3^0 = 0 \end{array} \right.$$

2. le point matériel $A$ ne peut se déplacer que dans la direction $\boldsymbol{e}_1$

$$\left\{ \begin{array}{l} u_2(L,0,0) = (b - \omega_{12}^0)L = 0 \Rightarrow \omega_{12}^0 = b \\ u_3(L,0,0) = \omega_{31}^0 L = 0 \Rightarrow \omega_{31}^0 = 0 \end{array} \right.$$

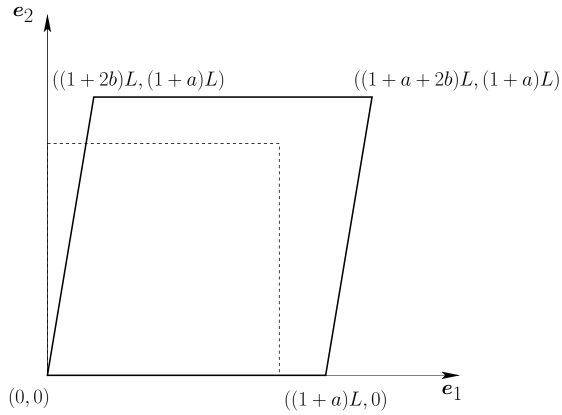
3. le point $C$ reste dans le plan $(O, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2)$, il ne peut donc pas se déplacer dans la direction $\boldsymbol{e}_3$
$$u_3(L, L, 0) = -\omega_{23}^0 L = 0 \Rightarrow \omega_{23}^0 = 0$$

Finalement, le champ de déplacements s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{lcl} u_1 & = & ax_1 + 2bx_2 \\ u_2 & = & ax_2 \\ u_3 & = & 0 \end{array} \right.$$

Remarquons que ce champ de déplacements est une fonction linéaire des coordonnées ce qui implique que les surfaces matérielles initialement planes restent planes et que les lignes matérielles initialement droites restent droites.

(b) Comme il n'y a pas de déplacement suivant la direction $\boldsymbol{e}_3$, il suffit de représenter la déformée d'une section matérielle perpendiculaire à cette direction. Pour cela on détermine les nouvelles positions des points matériels constituant la frontière du cube en *ajoutant vectoriellement* leurs déplacements à leurs vecteurs position dans la configuration de référence. Comme on a vu plus haut que les segments matériels droits restent droits après déformation on pouvait se contenter de déterminer les nouvelles positions des quatre sommets et de tracer les segments correspondants.




**Remarque :** beaucoup d'étudiants ayant trouvé le bon champ de déplacements n'ont pas pu dessiner correctement le cube dans sa configuration déformée.

(c) Le vecteur de rotation infinitésimale $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$ à un endroit $P$ donne la direction et l'angle de rotation d'un élément infinitésimal de matière à cet endroit depuis la configuration de référence jusqu'à la configuration déformée. Le sens de la rotation est précisé par la règle du tire-bouchon.
Il n'est pas nécessaire de calculer $\frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u}$ pour déterminer $\boldsymbol{\Omega}$ car on peut le déduire de $\boldsymbol{\omega}$ par la relation
$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2}\boldsymbol{\epsilon} : \boldsymbol{\omega} \quad \leftrightarrow \quad \Omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{kj}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le pseudo-tenseur de permutation qui ne doit pas être confondu avec le tenseur des déformations infinitésimales $\boldsymbol{\varepsilon}$. On obtient

$$\boldsymbol{\Omega} = -b\boldsymbol{e}_3$$

Le volume matériel situé à l'origine subit donc une rotation infinitésimale d'un angle $b$ (exprimé en radians) autour de la direction $-\boldsymbol{e}_3$.

**Remarque :** certains ont voulu utiliser les composantes hors-diagonale de $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour répondre à cette question. Ceci n'est pas possible car celles-ci représentent des rapprochements ou éloignements angulaires *relatifs* de segments élémentaires de matière qui sont initialement perpendiculaires entre eux. Elles ne permettent pas de déterminer les angles des rotations individuelles de ces segments.

Sous-question 4

Nous savons déjà que le segment matériel $(O, C)$ reste droit après déformation. La première manière consiste à déterminer les coordonnées du point matériel $C$ dans la configuration déformée, le point $O$ ne se déplacant pas, et à appliquer le théorème de Pythagore. On trouve

$$\|(O, C')\| = L\sqrt{(1 + a + 2b)^2 + (1 + a)^2} = \sqrt{2}L\sqrt{(1 + a + b)^2 + b^2}$$

La deuxième manière, approchée celle-ci, consiste à utiliser le tenseur $\boldsymbol{\varepsilon}$ pour calculer l'allongement relatif du segment $(O, C)$, puis sa longeur finale. Comme le segment $(O, C)$ n'est aligné avec aucun des vecteurs de base, il faut définir un nouveau repère $(O, \boldsymbol{e_i'})$ dont l'un des vecteurs, par exemple $\boldsymbol{e_1'}$ est aligné avec le segment $(O, C)$. Pour fixer les idées, disons que ce repère est obtenu en effectuant une rotation d'un angle $\frac{\pi}{4}$ du premier repère autour de $\boldsymbol{e}_3$ et en gardant la même origine. Dans ce repère, la composante $\varepsilon_{11}{}'$ nous donne l'allongement *relatif* de $(O, C)$ :

$$\varepsilon_{11}{}' \simeq \frac{\|(O, C')\| - \|(O, C)\|}{\|(O, C)\|} \qquad \text{avec}\|(O, C)\| = \sqrt{2}L$$

On trouve :

$$\varepsilon_{11}{}' = a_{1k}a_{1l}\varepsilon_{kl} = a + b$$

où les $a_{ij}$ sont les éléments de la matrice de changement de base appropriée. Finalement, on obtient

$$\|(O, C')\| \simeq \sqrt{2}L(1 + a + b)$$

Les réponses fournies par les deux méthodes sont différentes ce qui ne doit pas nous surprendre puique la seconde méthode est une approximation. On observe cependant que les deux solutions sont très proches, puisque $b \ll 1 \Rightarrow b^2 \simeq 0$ (pour rappel, on est en petits déplacements).

Sous-question 5

La résultante des forces de contact exercées par $P_2$ sur $P_1$ est donnée par

$$\boldsymbol{F}_c = \int_S \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n})dS$$

où $\boldsymbol{n} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e_1} + \frac{\sqrt{2}}{2}\boldsymbol{e_2}$ est la normale unitaire *sortante* à $P_1$.
Pour calculer cette intégrale, il est plus commode de se placer dans le repère $(O, \boldsymbol{e}_i')$ défini à la sous-question précédente car l'équation du plan contenant la surface $S$ y est simplement $x_2' = 0$. Dans ce repère, l'intégrale avec ses bornes de variation s'écrit

$$\boldsymbol{F}_c = \int_0^L \int_0^{\sqrt{2}L} \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n}) dx_1{}' dx_3{}'$$

On trouve finalement : $\boldsymbol{F}_c = (\alpha - \beta)\sqrt{2}L^2\boldsymbol{e}_2{}'$.

Le moment résultant s'écrit

$$\boldsymbol{M}_c = \int_S \boldsymbol{x} \times \boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{n}) dS$$

où $\boldsymbol{x}$ est le vecteur position. Dans le repère $(O, \boldsymbol{e}_i')$ le vecteur position d'un point de $S$ a pour expression $\boldsymbol{x} = x_1'\boldsymbol{e_1'} + x_3{}'\boldsymbol{e_3'}$ puisque $x_2' = 0$. On trouve

$$\boldsymbol{M}_c = (\alpha - \beta)L^3\boldsymbol{e}_3{}' - (\alpha - \beta)\sqrt{2}\frac{L^3}{2}\boldsymbol{e}_1{}'$$

. **Remarques :**
- la plupart des étudiants ont oublié la composante suivant $x_3'$ du vecteur position pour calculer du moment résultant ;
- les réponses étaient acceptées dans les deux repères ;
- on pouvait intégrer en restant dans le repère initial, mais cela nécessitait de paramétrer les bornes de l'intégrale.