

MECA 1901
Mécanique des milieux continus

-

Recueil d'exercices

SEPTEMBRE 2007

Ce recueil d'exercices résolus est une œuvre originale protégée par le droit d'auteur. Il a été composé par Brieux Delsaute avec les contributions de François Dupret, Fabrice Loix, François Bioul et Nicolas Van Goethem.

Malgré le soin apporté à sa rédaction, il est possible que vous y déceliez l'une ou l'autre erreur. N'hésitez pas à nous en faire part directement par courrier électronique à l'adresse suivante : delsaute@mema.ucl.ac.be.

Les commentaires, critiques et suggestions sont également les bienvenus.

Calcul tensoriel

Exercice 1

Donner la dimension physique et les unités dans le Système International des grandeurs suivantes. Indiquer également l'unité dérivée le cas échéant.

- | | |
|----------------------------------------|---------------------------------------------------|
| 1. Distance d | 10. Moment de quantité de mouvement \mathcal{N} |
| 2. Intervalle de temps Δt | 11. Puissance P |
| 3. Masse m | 12. Energie \mathcal{E} |
| 4. Température θ | 13. Masse volumique ρ |
| 5. Intensité de courant i | 14. Pression p |
| 6. Superficie S | 15. Contrainte σ |
| 7. Vitesse v | 16. Charge électrique q |
| 8. Force F | 17. Débit-volume Q |
| 9. Quantité de mouvement \mathcal{P} | 18. Densité de flux de chaleur q |

Exercice 2

Vérifier la cohérence dimensionnelle des équations suivantes.

- $\mathcal{E} = mc^2$
- $p = \rho g(\Delta h)$ (pression hydrostatique sous une colonne de fluide de hauteur Δh)

Déterminer la dimension physique des constantes physiques intervenant dans les relations suivantes.

- $F_{12} = G \frac{M_1 M_2}{r_{12}^2}$ (Loi d'attraction gravitationnelle)
- $\mathcal{E} = h\nu$ (Energie d'un photon)

Exercice 3

Indiquer si les expressions suivantes sont correctes.

- $a_i + \alpha b_i = c_i$
- $\alpha + b_i c_i$
- $T_{ij} + a_i b_j$
- $T_{ii} + a_i$
- $T_{ii} + \alpha$
- $T_{ji} + \alpha a_i a_j$
- $T_{ijk} + a_i b_j - c_k$
- $T_{jki} + a_i b_j c_k$
- $T_{jji} + \alpha a_i$
- $T_{jjj} + \alpha$

Exercice 4

Ecrire sous forme matricielle les expressions suivantes.

- αu_i
- $u_i v_i$
- $a_{ij} n_j$

4. $\sigma_{ji}n_j$
5. $a_{ij}b_{jk}$
6. $a_{ik}b_{jl}c_{lk}$
7. $a_{ik}a_{jl}T_{kl}$

Exercice 5

Calculer les expressions suivantes.

1. δ_{ii}
2. $\delta_{ij}\delta_{ij}$
3. $\delta_{ij}\delta_{ik}\delta_{jk}$
4. $\delta_{ij}\delta_{jk}$
5. $\delta_{ij}A_{lik}$
6. $a_{ik}a_{jl}\delta_{kl}$, (a_{ij} sont les éléments d'une matrice orthogonale quelconque)
7. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}$
8. $\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijl}$

Exercice 6

Vérifier que $\epsilon_{ijm}\epsilon_{klm} = \epsilon_{imj}\epsilon_{kml} = \epsilon_{mij}\epsilon_{mkl} = \delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jk}$

Exercice 7

Exprimer chacune des opérations suivantes en terme d'opérations sur les composantes (α étant un scalaire ; \mathbf{u} et \mathbf{v} des vecteurs).

- | | |
|------------------------------|-----------------------------------|
| 1. \mathbf{v} | 4. $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ |
| 2. $\alpha \mathbf{v}$ | 5. $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ |
| 3. $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ | |

Exercice 8

Vérifier les identités suivantes (\mathbf{u} , \mathbf{v} , \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} étant des des vecteurs).

1. $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$
2. $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{0}$
3. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$

Exercice 9

Développer les expressions suivantes (α étant un scalaire ; \mathbf{u} , \mathbf{v} et \mathbf{n} des vecteurs ; \mathbf{S} et \mathbf{T} des tenseurs d'ordre 2) :

1. $\alpha \mathbf{v}$
2. $\mathbf{u} \mathbf{v}$
3. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$
4. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}$
5. $\mathbf{T} : \mathbf{S}$

Exercice 10

Etablir la relation biunivoque entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques associées.

Exercice 11

Etablir la relation biunivoque entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées sphériques associées.

Exercice 12

1. Montrer que la symétrie est une propriété tensorielle, c'est-à-dire que si $S_{ij} = S_{ji}$ pour tout i et tout j dans un repère orthonormé, cette propriété reste vraie dans n'importe quel repère orthonormé fixe par rapport au premier.
2. Montrer que l'antisymétrie est une propriété tensorielle.

Exercice 13

1. Montrer qu'un tenseur T_{ij} quelconque se décompose de manière unique en une partie symétrique et une partie antisymétrique.
2. Soit S_{ij} un tenseur d'ordre deux symétrique, A_{ij} un tenseur d'ordre deux antisymétrique. Prouver que $A_{ij}S_{ij} = 0$.
3. Soit S_{ij} un tenseur d'ordre deux symétrique et T_{ij} , un tenseur quelconque. Montrer que $T_{ij}S_{ij} = T_{ij}^s S_{ij}$ où T_{ij}^s représente la partie symétrique de T_{ij} .

Exercice 14

1. Montrer que la trace T_{ii} d'un tenseur quelconque T_{ij} est un scalaire.
2. On définit la partie sphérique du tenseur T_{ij} comme étant $T_{ij}^{sph} = \frac{1}{3}T_{mm}\delta_{ij}$ et sa partie déviatoire comme étant $T_{ij}^d = T_{ij} - T_{ij}^{sph}$. Montrer que la trace de la partie déviatoire T_{ij}^d est nulle.

Exercice 15

Montrer que si $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ et $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$ alors on a $\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \dot{\omega}_{kj}$ et $\dot{\omega}_{ij} = -\epsilon_{ijk} \dot{\Omega}_k$.

Exercice 16

1. Montrer que

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

Ceci définit le produit mixte des vecteurs \mathbf{a} , \mathbf{b} et \mathbf{c} .

2. Montrer que

$$\det(T_{ij}) = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} T_{il} T_{jm} T_{kn}$$

Exercice 17

Soient \mathbf{T} un tenseur, \mathbf{a} et \mathbf{b} des vecteurs, α et β des scalaires invariants. Evaluer les expressions suivantes dans un repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) :

1. $\nabla\alpha$
2. $\nabla \cdot \mathbf{a}$
3. $\nabla \times \mathbf{a}$
4. $\nabla \mathbf{a}$
5. $\nabla \cdot \mathbf{T}$
6. $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a}$
7. $\Delta\alpha = \nabla \cdot (\nabla\alpha)$
8. $\Delta\mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla\mathbf{a})$

Exercice 18

Soient \mathbf{T} un tenseur, \mathbf{a} et \mathbf{b} des vecteurs, α et β des scalaires. Vérifier les identités suivantes :

1. $\nabla(\alpha\beta) = (\nabla\alpha)\beta + \alpha(\nabla\beta)$
2. $\nabla \cdot (\alpha\mathbf{a}) = (\nabla\alpha) \cdot \mathbf{a} + \alpha(\nabla \cdot \mathbf{a})$
3. $\nabla \times (\alpha\mathbf{a}) = (\nabla\alpha) \times \mathbf{a} + \alpha(\nabla \times \mathbf{a})$
4. $\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b})$
5. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla \cdot (\nabla\mathbf{a})$
6. $\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = 2\mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{a}) + 2\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a})$
7. $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{b} \cdot (\nabla\mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla\mathbf{b})$

Exercice 19

1. Prouver que si \mathbf{a} est un champ vectoriel, on a toujours $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$.
2. Prouver que si α est un champ scalaire, on a toujours $\nabla \times (\nabla\alpha) = \mathbf{0}$.

Exercice 20

Déterminer l'expression de l'opérateur nabla en coordonnées-composantes cylindriques.

Exercice 21

Développer les expressions suivantes en coordonnées-composantes cylindriques (α scalaire, \mathbf{v} vecteur).

1. $\nabla\alpha$
2. $\nabla \cdot \mathbf{v}$

Exercice 22

On donne dans l'espace Euclidien à 3 dimensions un repère cartésien orthonormé (O, \mathbf{e}_i) . On considère également deux autres repères cartésiens orthonormés : le premier (O', \mathbf{e}'_i) est obtenu par une rotation des vecteurs de base \mathbf{e}_i d'un angle de $\pi/4$ autour de \mathbf{e}_3 , le second (O'', \mathbf{e}''_i) est obtenu par cette même rotation des vecteurs de base suivie d'une translation $\mathbf{b} = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2$ de l'origine O .

1. Changement de coordonnées.
 Ecrire les formules de changement de coordonnées lorsque l'on passe du repère (O, \mathbf{e}_i) aux repères (O', \mathbf{e}'_i) et (O'', \mathbf{e}''_i) .
 Ecrire les formules de changement de coordonnées lorsque l'on passe des repères (O', \mathbf{e}'_i) et (O'', \mathbf{e}''_i) au repère (O, \mathbf{e}_i) .
2. (a) Quelles sont, dans les repères (O', \mathbf{e}'_i) et (O'', \mathbf{e}''_i) , les équations du plan dont l'équation dans le repère (O, \mathbf{e}_i) est $x_1 + x_2 = 1$.
 (b) Même question pour le champ scalaire d ayant pour représentation $d^{(e)}(x_i) = x_1 + x_2 - 1$ dans le repère (O, \mathbf{e}_i) .
3. Transformation de composantes
 Ecrire sous forme matricielle la formule de transformation de composantes lorsque l'on passe du repère (O, \mathbf{e}_i) au repère (O', \mathbf{e}'_i) . Vérifier que la matrice calculée possède bien les propriétés de matrices de changement de bases orthonormées. Que vaut la matrice de transformation de composantes lorsque l'on passe du repère (O, \mathbf{e}_i) au repère (O'', \mathbf{e}''_i) ?
4. Quelles sont, dans les repères (O', \mathbf{e}'_i) et (O'', \mathbf{e}''_i) , les composantes du vecteur qui, dans le repère (O, \mathbf{e}_i) , est $(v_1, v_2, v_3) = (x_2, x_1, 0)$?

Exercice 23

On considère dans l'espace Euclidien à trois dimensions le champ scalaire de température $T(P, t)$ (P désignant un point quelconque de l'espace et t désignant le temps). On travaille avec les deux repères (O, \mathbf{e}_i) et (O', \mathbf{e}'_i) définis à l'exercice précédent.

Dans le repère (O, \mathbf{e}_i) le champ T a pour représentation

$$T^{(e)}(x_i, t) = -\alpha(x_1 + x_2)^2 - \frac{\alpha}{9}(-x_1 + x_2)^2$$

où α est une constante ayant les unités appropriées. L'expression du champ T dans ce repère ne dépendant pas du temps, ce champ y est dit "stationnaire".

1. Quelle est la représentation $T'^{(e)}(x'_i, t)$ du scalaire $T(P, t)$ dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) ? Le champ T y est-il stationnaire ?
2. Calculer les composantes du gradient de $T(P, t)$, d'une part dans le repère (O, \mathbf{e}_i) et, d'autre part, dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) . Montrer que les triplets obtenus dans (O, \mathbf{e}_i) et dans (O', \mathbf{e}'_i) représentent un même vecteur.
3. Dans le cas d'un matériau non isotrope, la loi de Fourier reliant le flux de chaleur \mathbf{q} au gradient de température ∇T est

$$\mathbf{q} = -\mathbf{K} \cdot \nabla T$$

où \mathbf{K} est le tenseur de conductivité thermique supposé homogène et stationnaire.

Calculer les composantes de la densité de flux de chaleur dans le repère (O, \mathbf{e}_i) et dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) pour

$$[K_{ij}] = K \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les K_{ij} sont les composantes de \mathbf{K} dans le repère (O, \mathbf{e}_i) et K est une constante ayant les unités appropriées.

Que valent les composantes de \mathbf{K} , dans les deux repères, pour un matériau présentant une conductivité thermique isotrope k ?

- Donner les invariants du tenseur symétrique \mathbf{K} .

Exercice 24

On donne dans l'espace Euclidien à 3 dimensions un repère cartésien orthonormé (O, \mathbf{e}_i) . On considère d'une part le champ (scalaire) de température $T(P)$, où P désigne un point quelconque de l'espace. Ce champ est stationnaire dans le repère donné et sa représentation y est donnée par :

$$T^{(e)}(x_i) = \alpha(x_1^2 + x_2^2) - \beta x_3$$

les constantes α et β ayant les dimensions appropriées. D'autre part, on considère le champ (vectoriel) de vitesse $\mathbf{v}(P)$ dont la représentation dans le repère (O, \mathbf{e}_i) est :

$$\begin{aligned} v_1^{(e)}(x_i) &= A \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} - B x_2 \\ v_2^{(e)}(x_i) &= A \frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} + B x_1 \\ v_3^{(e)}(x_i) &= C x_3 \end{aligned}$$

les constantes A , B et C ayant les dimensions physiques appropriées.

- Changement de coordonnées.
Ecrire la formule de changement de coordonnées lorsque l'on passe du système de coordonnées cartésien au système de coordonnées cylindrique.
Ecrire la formule de changement de coordonnées lorsque l'on passe du système de coordonnées cylindrique au système de coordonnées cartésien.
- Donner la représentation $T^{(e)}(r, \theta, z)$ du scalaire $T(P)$ dans le système de coordonnées cylindrique.
- Transformation de composantes
Ecrire sous forme matricielle la formule de transformation de composantes lorsque l'on passe de la base cartésienne (\mathbf{e}_i) à la base locale cylindrique $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Vérifier que la matrice calculée possède bien les propriétés de matrices de changement de bases orthonormées.
- Déterminer les composantes (v_r, v_θ, v_z) du champ vectoriel $\mathbf{v}(P)$ dans la base cylindrique.

Exercice 25

Calculer

- la surface et le volume d'un cylindre circulaire droit, de rayon R et de hauteur L .
- la surface et le volume d'une sphère de rayon R .

Exercice 26

Intégrer

- le champ $\boldsymbol{\tau} = r\mathbf{e}_r$ sur le disque de rayon R .
- le champ $\boldsymbol{\tau} = r\mathbf{e}_\theta$ sur le disque de rayon R .
- le champ $\boldsymbol{\tau} = \cos \phi \mathbf{e}_r$ sur la sphère de rayon R .

Solution exercice 1

On donne successivement la dimension, les unités et l'unité dérivée éventuelle.

- | | |
|-------------------------------------|-------------------------------------------------|
| 1. L, m | 10. ML^2t^{-1} , $kg\ m^2\ s^{-1}$ |
| 2. t, s | 11. $ML^2\ t^{-3}$, $kg\ m^2\ s^{-3}$, W |
| 3. M, kg | 12. $ML^2\ t^{-2}$, $kg\ m^2\ s^{-2}$, J |
| 4. T, K | 13. ML^{-3} , $kg\ m^{-3}$ |
| 5. I, A | 14. $ML^{-1}t^{-2}$, $kg\ m^{-1}\ s^{-2}$, Pa |
| 6. L^2 , m^2 | 15. $ML^{-1}t^{-2}$, $kg\ m^{-1}\ s^{-2}$, Pa |
| 7. Lt^{-1} , ms^{-1} | 16. It, As, C |
| 8. MLt^{-2} , $kg\ m\ s^{-2}$, N | 17. $L^3\ t^{-1}$, $m^3\ s^{-1}$ |
| 9. MLt^{-1} , $kg\ m\ s^{-1}$ | 18. $M\ t^{-3}$, $kg\ s^{-3}$ |

Solution exercice 2

- $[\mathcal{E}] = ML^2t^{-2}$
 $[mc^2] = [m][c]^2 = (M)(Lt^{-1})^2 = ML^2t^{-2}$
- $[p] = ML^{-1}t^{-2}$
 $[\rho g(\Delta h)] = [\rho][g][\Delta h] = (ML^{-3})(Lt^{-2})(L) = ML^{-1}t^{-2}$
- $[G] = \frac{[F_{12}][r_{12}]^2}{[M_1][M_2]} = \frac{(MLt^{-2})(L)^2}{(M)(M)} = L^3M^{-1}t^{-2}$
- $[h] = \frac{[\mathcal{E}]}{[\nu]} = \frac{ML^2t^{-2}}{t^{-1}} = ML^2t^{-1}$

Solution exercice 3

- Correcte, i indice libre
- Correcte, i indice muet
- Correcte, i et j indices libres
- Fausse
- Correcte, i indice muet
- Correcte, i et j indices libres
- Fausse
- Correcte, i, j et k indices libres
- Correcte, i indice libre, j indice muet
- Fausse

Solution exercice 4

- $\alpha \mathcal{U} = \alpha \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}$
- $\mathcal{U}^T \mathcal{V} = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{aligned}
 3. \mathcal{AN} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \\
 4. \Sigma^T \mathcal{N} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \\
 5. \mathcal{AB} &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\
 6. \mathcal{AC}^T \mathcal{B}^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}^T \\
 7. \mathcal{ATA}^T &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

Solution exercice 5

1. $\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3$
2. $\delta_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i,j=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ij} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} \delta_{ii} = \delta_{11} \delta_{11} + \delta_{22} \delta_{22} + \delta_{33} \delta_{33} = 3$
3. $\delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \sum_{i,j,k=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ik} \delta_{jk} = \delta_{11} \delta_{11} \delta_{11} + \delta_{22} \delta_{22} \delta_{22} + \delta_{33} \delta_{33} \delta_{33} = 3$
4. $\delta_{ij} \delta_{jk} = \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \delta_{jk} = \delta_{ik}$
5. $\delta_{ij} A_{lik} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij} A_{lik} = A_{ljk}$ (substitution de l'indice i par l'indice j)
6. $a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} = a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$ (l'inverse d'une matrice orthogonale est sa transposée)
7. 6
8. $2\delta_{kl}$

Solution exercice 6

Les deux membres sont non nuls seulement si $i \neq j$ et $k \neq l$. Dans ce cas :

- soit il y a deux paires d'indices égaux :
 - si $i = k$ et $j = l$, la valeur des deux membres est 1 ;
 - si $i = l$ et $j = k$, la valeur des deux membres est -1.
- soit il y a une seule paire d'indices égaux ; par exemple, si $i = k$, $j \neq l$, alors les deux membres sont nuls.

Solution exercice 7

1. v_i
2. αv_i , car $\alpha \mathbf{v} = \alpha(v_i \mathbf{e}_i) = (\alpha v_i) \mathbf{e}_i$
3. $u_i + v_i$
4. $u_i v_i$, car $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i \cdot v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i$
5. $\epsilon_{ijk} u_j v_k$, car $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i \times v_j \mathbf{e}_j) = u_i v_j (\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j) = u_i v_j \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_k = \epsilon_{ijk} u_j v_k \mathbf{e}_i$ et donc $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$

Solution exercice 8

1. $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k = -\epsilon_{ikj} u_j v_k = -(\mathbf{v} \times \mathbf{u})_i$.
2. $(\mathbf{u} \times \mathbf{u})_i = \epsilon_{ijk} u_j u_k = -\epsilon_{ikj} u_j u_k$. Puisque les indices j et k sont muets les deux derniers membres sont opposés et donc l'expression est nécessairement nulle.
3. $(\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}))_i = \epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} b_l c_m = \epsilon_{kij} \epsilon_{klm} a_j b_l c_m = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j b_l c_m = a_j b_i c_j - a_j b_j c_i$
4. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = a_i \epsilon_{ijk} b_j c_k = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k = \epsilon_{jki} a_i b_j c_k = \epsilon_{kij} a_i b_j c_k$

Solution exercice 9

1. $\alpha \mathbf{v} = \alpha(v_i \mathbf{e}_i) = (\alpha v_i) \mathbf{e}_i$
2. $\mathbf{u} \mathbf{v} = (u_i \mathbf{e}_i)(v_j \mathbf{e}_j) = (u_i v_j) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$
3. $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = (v_i \mathbf{e}_i) \cdot (u_j \mathbf{e}_j) = (v_i u_j) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) = (v_i u_j) \delta_{ij} = v_i u_i$
4. $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \cdot (n_k \mathbf{e}_k) = (T_{ij} n_k \mathbf{e}_i (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k)) = (T_{ij} n_k \mathbf{e}_i \delta_{jk}) = (T_{ij} n_j) \mathbf{e}_i$
5. $\mathbf{T} : \mathbf{S} = (T_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) : (S_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = T_{ij} S_{kl} (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) : (\mathbf{e}_k \mathbf{e}_l) = T_{ij} S_{kl} (\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k) (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_l) = T_{ij} S_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} = T_{ij} S_{ji}$

Solution exercice 10

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta &= \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ z &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

Solution exercice 11

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \phi &= \arctan \frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3} \\ \theta &= \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \sin \phi \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \phi \sin \theta \\ x_3 &= r \cos \phi \end{aligned}$$

Solution exercice 12

1. Soit le tenseur \mathbf{S} dont les composantes dans un repère orthonormé particulier sont telles que $S_{ij} = S_{ji}$. Soient S'_{ij} les composantes de \mathbf{S} dans un autre repère orthonormé. Par définition de tenseur on a $S'_{ij} = a_{ik}a_{jl}S_{kl}$. On veut prouver que $S'_{ij} = S'_{ji}$.
On vérifie que

$$S'_{ji} = a_{jk}a_{il}S_{kl} = a_{jk}a_{il}S_{lk}$$

puisque $S_{kl} = S_{lk}$, et donc $S'_{ji} = a_{jl}a_{ik}S_{kl} = S'_{ij}$ en substituant les indices muets k et l .

2. Même raisonnement.

Solution exercice 13

1. Existence : tout tenseur T_{ij} admet une décomposition triviale en une partie symétrique et une partie antisymétrique

$$T_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji}) + \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji}) = T_{ij}^s + T_{ij}^a.$$

Unicité : supposons que $T_{ij} = T_{ij}^s + T_{ij}^a = T_{ij}^{\prime s} + T_{ij}^{\prime a}$ soient deux décompositions différentes de T_{ij} . Alors, par différence on obtient une décomposition du tenseur nul

$$0 = (T_{ij}^s - T_{ij}^{\prime s}) + (T_{ij}^a - T_{ij}^{\prime a})$$

en une partie symétrique et une partie antisymétrique. On voit directement que ces deux parties ne peuvent être qu'égales au tenseur nul lui-même et qu'en conséquence $T_{ij}^a = T_{ij}^{\prime a}$ et $T_{ij}^s = T_{ij}^{\prime s}$.

2. On considère le produit contracté $\mathbf{A} : \mathbf{S}$ des tenseurs \mathbf{A} et \mathbf{S} :

$$\begin{aligned} A_{ij}S_{ji} &= -A_{ji}S_{ji} \\ &= -A_{ji}S_{ij} \end{aligned}$$

par l'antisymétrie de \mathbf{A} , et par la symétrie de \mathbf{S} respectivement. Les indices i et j étant muets, on peut les échanger dans le second membre (par exemple) et écrire

$$A_{ij}S_{ji} = -A_{ij}S_{ji}.$$

d'où

$$A_{ij}S_{ji} = 0.$$

(le seul scalaire égal à son opposé est 0).

3. A partir des deux résultats précédents on trouve :

$$T_{ij}S_{ji} = (T_{ij}^s + T_{ij}^a)S_{ji} = T_{ij}^sS_{ji} + 0.$$

Solution exercice 14

1. $T'_{ii} = a_{ik}a_{il}T_{kl} = \delta_{kl}T_{kl} = T_{kk}$
2. La trace de la partie déviatoire est

$$T_{ii}^d = T_{ii} - T_{ii}^{sph} = T_{ii} - \frac{1}{3}T_{mm}\delta_{ii} = T_{ii} - T_{mm} = 0.$$

(On remarque que le tenseur T_{ij} et sa partie sphérique T_{ij}^{sph} ont une même trace)

Solution exercice 15

1. $\dot{\omega}_{ij}$ est l'opposé de la partie antisymétrique de $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ tandis que d_{ij} en est la partie symétrique :

$$\frac{\partial v_j}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{d_{ij}} - \frac{1}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)}_{\dot{\omega}_{ij}}.$$

En outre, puisque ϵ_{ijk} et d_{jk} sont respectivement antisymétrique et symétrique sur les indices j et k on a $\epsilon_{ijk}d_{jk} = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj} &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\dot{\omega}_{kj} - \underbrace{\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}d_{kj}}_{=0} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}(\dot{\omega}_{kj} - d_{kj}) \\ &= -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \\ &= \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\ &= \dot{\Omega}_i \end{aligned}$$

2. $-\epsilon_{ijk}\dot{\Omega}_k = -\epsilon_{ijk}\frac{1}{2}\epsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\epsilon_{kji}\epsilon_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}(\delta_{jl}\delta_{im} - \delta_{jm}\delta_{il})\frac{\partial v_m}{\partial x_l} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$

Solution exercice 16

1. Par la formule du déterminant on a

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

tandis que le développement du second terme donne

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk}a_ib_jc_k &= \epsilon_{123}a_1b_2c_3 + \epsilon_{231}a_2b_3c_1 + \epsilon_{312}a_3b_1c_2 + \epsilon_{321}a_3b_2c_1 + \epsilon_{132}a_1b_3c_2 + \epsilon_{213}a_2b_1c_3 \\ &= a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3 \end{aligned}$$

Les deux premiers termes sont donc bien égaux. Pour vérifier l'égalité avec le troisième terme, voir l'exercice 8.4.

2. Si (i, j, k) est une permutation paire de $(1, 2, 3)$, on a $\epsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn} = \det(T_{ij})$. Si (i, j, k) est une permutation impaire de $(1, 2, 3)$, on a $\epsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn} = -\det(T_{ij})$. Dès lors on a bien

$$\det(T_{ij}) = \frac{1}{6}\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn}T_{il}T_{jm}T_{kn}$$

Solution exercice 17

1. $\nabla\alpha = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\alpha = \frac{\partial\alpha}{\partial x_i}\mathbf{e}_i = \alpha_{,i}\mathbf{e}_i$
2. $\nabla \cdot \mathbf{a} = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) \cdot (a_j \mathbf{e}_j) = \left(\mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial(a_j \mathbf{e}_j)}{\partial x_i}\right) = \left(\mathbf{e}_i \cdot \left(\frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_j + a_j \underbrace{\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial x_i}}_{=0}\right)\right) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \frac{\partial a_j}{\partial x_i} = \delta_{ij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} =$

$$\frac{\partial a_i}{\partial x_i} = a_{i,i}$$

3. $(\nabla \times \mathbf{a})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} a_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk} a_{k,j}$
4. $\nabla \mathbf{a} = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (a_j \mathbf{e}_j) = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = a_{j,i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$
5. $\nabla \cdot \mathbf{T} = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (T_{jk} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) = (\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \delta_{ij} \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_i} \mathbf{e}_k = \frac{\partial T_{jk}}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = T_{jk,j} \mathbf{e}_k$
6. $\mathbf{a} \cdot \nabla \mathbf{a} = (a_i \mathbf{e}_i) \cdot \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \right) = a_i (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = a_j \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = a_j a_{k,j} \mathbf{e}_k$
7. $\Delta \alpha = \nabla \cdot (\nabla \alpha) = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \right) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x_i \partial x_i} = \alpha_{,ii}$
8. $\Delta \mathbf{a} = \nabla \cdot (\nabla \mathbf{a}) = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot \left(\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \right) = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} \mathbf{e}_k = \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_i} \mathbf{e}_k = a_{k,ii} \mathbf{e}_k$

Solution exercise 18

1.

$$\begin{aligned} (\nabla (\alpha\beta))_i &= \frac{\partial(\alpha\beta)}{\partial x_i} \\ &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} \beta + \alpha \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\alpha \mathbf{a}) &= \frac{\partial\alpha}{\partial x_i} a_i + \alpha \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \\ &= (\nabla \alpha) \cdot \mathbf{a} + \alpha (\nabla \cdot \mathbf{a}) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\alpha \mathbf{a}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial(\alpha a_k)}{\partial x_j} \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial\alpha}{\partial x_j} a_k + \epsilon_{ijk} \alpha \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \\ &= ((\nabla \alpha) \times \mathbf{a})_i + (\alpha (\nabla \times \mathbf{a}))_i \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) &= \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon_{ijk} a_j b_k) \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} b_k + \epsilon_{ijk} a_j \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \\ &= b_k \epsilon_{kij} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_j \epsilon_{jik} \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \\ &= b_k (\nabla \times \mathbf{a})_k - a_j (\nabla \times \mathbf{b})_j \\ &= \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \end{aligned}$$

5.

$$\begin{aligned} (\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \right) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} \\ &= \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x_i} - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} \\ &= (\nabla (\nabla \cdot \mathbf{a}))_i - (\nabla \cdot (\nabla \mathbf{a}))_i \end{aligned}$$

6. On développe les trois termes séparément

$$\begin{aligned}
 (\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}))_i &= \frac{\partial(a_j a_j)}{\partial x_i} \\
 &= \frac{\partial a_j}{\partial x_i} a_j + a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\
 &= 2a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \\
 (2\mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{a}))_i &= 2a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \\
 (2\mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{a}))_i &= 2\epsilon_{ijk} a_j \epsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \\
 &= 2\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} a_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \\
 &= 2(\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) a_j \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \\
 &= 2 \left(a_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i} - a_j \frac{\partial a_i}{\partial x_j} \right)
 \end{aligned}$$

et on constate que l'identité est vérifiée.

7.

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\epsilon_{klm} a_l b_m) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{klm} \left(\frac{\partial(a_l b_m)}{\partial x_j} \right) \\
 &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j} b_m + a_l \frac{\partial b_m}{\partial x_j} \right) \\
 &= (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \left(\frac{\partial a_l}{\partial x_j} b_m + a_l \frac{\partial b_m}{\partial x_j} \right) \\
 &= \frac{\partial a_i}{\partial x_j} b_j + a_i \frac{\partial b_j}{\partial x_j} - \frac{\partial a_j}{\partial x_j} b_i - a_j \frac{\partial b_i}{\partial x_j} \\
 &= (\mathbf{b} \cdot (\nabla \mathbf{a}))_i + (\mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}))_i - (\mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}))_i - (\mathbf{a} \cdot (\nabla \mathbf{b}))_i
 \end{aligned}$$

Solution exercice 19

1.

$$\begin{aligned}
 (\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a})) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} \\
 &= -\epsilon_{jik} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_j \partial x_i}
 \end{aligned}$$

Puisque les indices i et j sont muets, les deux derniers membres sont opposés et donc nuls.

2.

$$\begin{aligned}
 (\nabla \times (\nabla a))_i &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial a}{\partial x_k} \right) \\
 &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a}{\partial x_j \partial x_k} \\
 &= -\epsilon_{ikj} \frac{\partial^2 a}{\partial x_k \partial x_j}
 \end{aligned}$$

Puisque les indices j et k sont muets, les deux derniers membres sont opposés et donc nuls.

Solution exercice 20

Nous devons trouver les nouvelles composantes α , β et γ de l'opérateur ∇ dans le système de coordonnées cylindriques :

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_r \alpha(r, \theta, z) + \mathbf{e}_\theta \beta(r, \theta, z) + \mathbf{e}_z \gamma(r, \theta, z)$$

Nous procédons en 2 étapes :

- (a) Changement des coordonnées des composantes $\frac{\partial}{\partial x_i}$

Définition du système de coordonnées cylindriques :

$$\begin{aligned} r &= (x_1^2 + x_2^2)^{\frac{1}{2}} & x_1 &= r \cos \theta \\ \theta &= \arctg\left(\frac{x_2}{x_1}\right) & x_2 &= r \sin \theta \\ z &= x_3 & x_3 &= z \end{aligned}$$

Composition de dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial \alpha_j}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial \alpha_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} &= \frac{\partial r}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} &= \frac{\partial r}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} &= \frac{\partial r}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x_3} \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$

- (b) Changement de composantes :

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Après expression des dérivées $\frac{\partial}{\partial x_i}$ en fonction des coordonnées (r, θ, z) , suivie du changement de composantes, on obtient finalement :

$$\nabla = \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

Solution exercice 21

1.

$$\nabla T = \left(\mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) T = \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) T'$$

2.

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\
 &= \mathbf{e}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\
 &\quad + \mathbf{e}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mathbf{e}_r \cdot \left(v_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} + v_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} + v_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} \right) \\
 &\quad + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \mathbf{e}_\theta \cdot \left(v_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + v_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad + \frac{\partial v_z}{\partial z} + \mathbf{e}_z \cdot \left(v_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} + v_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} + v_z \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} \right)
 \end{aligned}$$

Or

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_\theta & 0 \\ 0 & -\mathbf{e}_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve donc finalement :

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot \mathbf{v} &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + 0 + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} \underbrace{\mathbf{e}_\theta \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta}}_{=1} + \frac{\partial v_z}{\partial z} + 0 \\
 &= \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}
 \end{aligned}$$

Solution exercice 22

1. Les changements de coordonnées entre les deux repères cartésiens (O, \mathbf{e}_i) et (O', \mathbf{e}'_i) se calculent par les relations

$$x'_i = (\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j)(x_j - b_j) = a_{ij}(x_j - b_j)$$

$$x_i = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}'_j)x'_j + b_i = a_{ji}x'_j + b_i$$

où la matrice $\mathcal{A} = [a_{ij}] = [\mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j]$ est la matrice des cosinus directeurs. Ces relations s'écrivent sous forme matricielle comme suit :

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} x_1 - b_1 \\ x_2 - b_2 \\ x_3 - b_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

On trouve directement que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}'_3 \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{4} & \sin \frac{\pi}{4} & 0 \\ -\sin \frac{\pi}{4} & \cos \frac{\pi}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et on obtient

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - 1 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

ainsi que la relation inverse

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. (a) En substituant les expressions des x_i en fonction des x'_i dans l'équation du plan $x_1 + x_2 = 1$, on obtient respectivement dans les deux repères les équations suivantes :

$$x'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x''_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

- (b) L'invariance du champ scalaire $d(P)$ s'écrit formellement

$$d'(x'_i) = d(x_j(x'_i)) = d(a_{ij}x'_i + b_j)$$

soit

$$d'(x'_1, x'_2, x'_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x'_1 - x'_2) \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x'_1 + x'_2) \right) - 1 = \sqrt{2} x'_1 - 1$$

$$d''(x''_1, x''_2, x''_3) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x''_1 - x''_2) + 1 \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x''_1 + x''_2) + 1 \right) - 1 = \sqrt{2} x''_1 + 1$$

3. Les changements de composantes d'un vecteur \mathbf{v} entre les deux repères cartésiens (O, \mathbf{e}_i) et (O', \mathbf{e}'_i) sont donnés par les relations

$$v'_i = a_{ij}v_j$$

$$v_i = a_{ji}v'_j$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix}$$

Les résultats sont identiques pour v''_i .

4. L'invariance du champ vectoriel $\mathbf{v}(P)$ sécrivant

$$v'_i(x'_j) = a_{ik}v_k(x_l(x'_j)) = a_{ik}v_k(a_{jl}x'_j + b_l)$$

on procède en deux étapes :

(a) Changement de coordonnées des composantes v_i

$$v_1(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'_1 + x'_2)$$

$$v_2(x'_1, x'_2, x'_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x'_1 - x'_2)$$

$$v_3(x'_1, x'_2, x'_3) = 0$$

$$v_1(x''_1, x''_2, x''_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''_1 + x''_2) + 1$$

$$v_2(x''_1, x''_2, x''_3) = \frac{\sqrt{2}}{2}(x''_1 - x''_2) + 1$$

$$v_3(x''_1, x''_2, x''_3) = 0$$

(b) Changement de composantes

$$\begin{bmatrix} v'_1(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v'_2(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v'_3(x'_1, x'_2, x'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v_2(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v_3(x'_1, x'_2, x'_3) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v''_1(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v''_2(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v''_3(x''_1, x''_2, x''_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v_2(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v_3(x''_1, x''_2, x''_3) \end{bmatrix}$$

On trouve donc finalement :

$$\begin{bmatrix} v'_1(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v'_2(x'_1, x'_2, x'_3) \\ v'_3(x'_1, x'_2, x'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_1 \\ -x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} v''_1(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v''_2(x''_1, x''_2, x''_3) \\ v''_3(x''_1, x''_2, x''_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x''_1 + \sqrt{2} \\ -x''_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solution exercice 23

1. On obtient la représentation $T^{(e)}(x'_i, t)$ du scalaire $T(P, t)$ en exprimant dans $T^{(e)}(x_i, t)$ les x_i en fonction des x'_i

$$T^{(e)}(x'_i, t) = T^{(e)}(x_j(x'_i), t) = -2\alpha x_1'^2 - \frac{2}{9}\alpha x_2'^2$$

Comme le temps n'apparaît pas dans cette expression, le champ T est stationnaire dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) .

2. Les composantes de ∇T dans les repères (O, \mathbf{e}_i) et (O', \mathbf{e}'_i) sont

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_1} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{20}{9}\alpha x_1 - \frac{16}{9}\alpha x_2 \\ -\frac{16}{9}\alpha x_1 - \frac{20}{9}\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T'^{(e)}}{\partial x'_1} \\ \frac{\partial T'^{(e)}}{\partial x'_2} \\ \frac{\partial T'^{(e)}}{\partial x'_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha x'_1 \\ -\frac{4}{9}\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

respectivement.

On vérifie qu'il s'agit bien des composantes d'un même vecteur en effectuant successivement la transformation des coordonnées

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_1}(x'_1, x'_2, x'_3) \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_2}(x'_1, x'_2, x'_3) \\ \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_3}(x'_1, x'_2, x'_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}\alpha x'_1 + \sqrt{2}\frac{2}{9}\alpha x'_2 \\ -2\sqrt{2}\alpha x'_1 - \sqrt{2}\frac{2}{9}\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et le changement de composantes $a_{ij}v_j$

$$\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2\sqrt{2}\alpha x'_1 + \sqrt{2}\frac{2}{9}\alpha x'_2 \\ -2\sqrt{2}\alpha x'_1 - \sqrt{2}\frac{2}{9}\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4\alpha x'_1 \\ -\frac{4}{9}\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. Dans le repère (O, \mathbf{e}_i) les composantes q_i du vecteur densité de flux de chaleur \mathbf{q} s'obtiennent par

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial T^{(e)}}{\partial x_j}$$

soit

$$\begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{20}{9}\alpha x_1 - \frac{16}{9}\alpha x_2 \\ -\frac{16}{9}\alpha x_1 - \frac{20}{9}\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 4\alpha x_1 \\ 4\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) les composantes q'_i de \mathbf{q} s'obtiennent par

$$q'_i = -K'_{ij} \frac{\partial T'^{(e)}}{\partial x'_j}$$

Les composantes K'_{ij} du tenseur \mathbf{K} dans le repère (O', \mathbf{e}'_i) se calculent par la relation d'invariance

$$K'_{ij} = a_{ik}a_{jl}K_{kl}$$

qui s'écrit matriciellement

$$[K'_{ij}] = [a_{ik}][K_{kl}][a_{jl}]^T$$

ou encore

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K'_{11} & K'_{12} & K'_{13} \\ K'_{21} & K'_{22} & K'_{23} \\ K'_{31} & K'_{32} & K'_{33} \end{bmatrix} &= \mathcal{A} \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \mathcal{A}^T \\ &= K \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & +\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & -4 & 0 \\ -4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

On remarque que dans ce repère les composantes du tenseur \mathbf{K} sont représentées par une matrice diagonale. (En fait, on peut montrer que pour tout tenseur symétrique il existe au moins

une repère dans lequel ses composantes forment une matrice diagonale.) Les composantes K'_{ij} maintenant déterminées on trouve pour les q'_i

$$\begin{bmatrix} q'_1 \\ q'_2 \\ q'_3 \end{bmatrix} = -K \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4\alpha x'_1 \\ -\frac{4}{9}\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} 4\alpha x'_1 \\ 4\alpha x'_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Pour un matériau présentant une conductivité thermique isotrope k , le tenseur \mathbf{K} a pour expression

$$\mathbf{K} = k \boldsymbol{\delta} \quad (K_{ij} = k \delta_{ij})$$

4. Les invariants d'un tenseur d'ordre 2 sont les fonctions de ses composantes qui reste invariante sous les changements de repères. On peut montrer que tous les invariants d'un tenseur symétrique peuvent être exprimés en fonction de trois invariants principaux

$$\begin{aligned} I_1 &= \text{tr } \mathbf{K} = K_{ii} = 5 + 5 + 1 = 11 \\ &= K'_{ii} = 9 + 1 + 1 = 11 \\ I_2 &= \frac{1}{2}((K_{ii})^2 - K_{ij}K_{ji}) = \frac{1}{2}(11^2 - (25 + 16 + 16 + 25 + 1)) = 19 \\ &= \frac{1}{2}((K'_{ii})^2 - K'_{ij}K'_{ji}) = \frac{1}{2}(11^2 - (81 + 1 + 1)) = 19 \\ I_3 &= \det \mathbf{K} = \epsilon_{ijk}T_{1i}T_{2j}T_{3k} = 25 - 16 = 9 \\ &= \epsilon_{ijk}T'_{1i}T'_{2j}T'_{3k} = 9 \end{aligned}$$

Solution exercice 24

1. Changement de coordonnées

Les relations de changement de coordonnées entre le système de coordonnées cartésien lié au repère (O, \mathbf{e}_i) et le système de coordonnées cylindriques sont définies comme suit :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta &= \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ z &= x_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

2. Invariance d'un champ scalaire

L'invariance du champ scalaire $T(P)$ s'écrit

$$T'(\alpha_i) = T(x_j(\alpha_i))$$

C'est-à-dire

$$T'(r, \theta, z) = T(r \cos \theta, r \sin \theta, z) = \alpha(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta) - \beta z = \alpha r^2 - \beta z$$

3. Changement de composantes

On calcule la matrice des cosinus directeurs $\mathcal{A}(r, \theta, z)$ telle que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix} = \mathcal{A}(r, \theta, z) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

On trouve alors :

$$\mathcal{A}(r, \theta, z) = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vu que les bases sont orthonormées, on a :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T(r, \theta, z) \begin{bmatrix} \mathbf{e}_r \\ \mathbf{e}_\theta \\ \mathbf{e}_z \end{bmatrix}$$

Partant de la formule d'invariance du vecteur \mathbf{v} :

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z$$

et en y remplaçant les vecteurs de base cartésiens par les vecteurs de base cylindriques, on trouve finalement :

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathcal{A}(r, \theta, z) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Il suffit alors d'inverser cette relation pour trouver la formule de transformation inverse :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = \mathcal{A}^T(r, \theta, z) \begin{bmatrix} v_r \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix}$$

On remarque que la matrice de transformation de composantes est orthogonale, et est égale à la matrice de changement de base (car les bases sont orthonormées).

4. Changement de composantes : application

L'invariance du champ vectoriel $\mathbf{v}(P)$ sécrivant

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{e}_1 + v_2 \mathbf{e}_2 + v_3 \mathbf{e}_3 = v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z$$

on procède en deux étapes :

(a) Changement de coordonnées des composantes v_i

$$\begin{aligned} v_1(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = z) &= \frac{A}{r} \cos \theta - B r \sin \theta \\ v_2(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = z) &= \frac{A}{r} \sin \theta + B r \cos \theta \\ v_3(x_1 = r \cos \theta, x_2 = r \sin \theta, x_3 = z) &= C z \end{aligned}$$

(b) Changement de composantes

$$\begin{bmatrix} v_r(r, \theta, z) \\ v_\theta(r, \theta, z) \\ v_z(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \\ v_2(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \\ v_3(r \cos \theta, r \sin \theta, z) \end{bmatrix}$$

On trouve donc finalement :

$$\begin{bmatrix} v_r(r, \theta, z) \\ v_\theta(r, \theta, z) \\ v_z(r, \theta, z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A}{r} \\ B r \\ C z \end{bmatrix}$$

Solution exercice 25

1.

$$\int_{\text{Cylindre}} dS = 2 \int_{\text{Base}} dS + \int_{\text{Surface latérale}} dS$$

Sachant que l'élément d'aire dS , de normale \mathbf{e}_z , est $r d\theta dr$ on trouve

$$\int_{\text{Base}} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} r d\theta dr = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta = \pi R^2$$

Ensuite, sachant que l'élément d'aire dS , de normale \mathbf{e}_r , est $R d\theta dz$ on obtient

$$\int_{\text{Surface latérale}} dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} R d\theta dz = R \int_0^L dz \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi RL$$

En conséquence l'aire du cylindre est $2\pi R^2 + 2\pi RL$.

Sachant que l'élément de volume dV vaut $r d\theta dr dz$ en coordonnées cylindriques on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\text{Cylindre}} dV &= \int_{\text{Cylindre}} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^L r d\theta dr dz \\ &= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz = \pi R^2 L \end{aligned}$$

On peut vérifier que r est le jacobien de la transformation $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \theta, z)$

2. Sachant que l'élément d'aire dS , de normale \mathbf{e}_r , est $R^2 \sin \phi d\theta d\phi$ on trouve

$$\int_{\text{Sphère}} dS = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \sin \phi d\theta d\phi = R^2 \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = 4\pi R^2$$

Sachant que l'élément de volume dV vaut $r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr$ en coordonnées cylindriques on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\text{Sphère}} dV &= \int_{\text{Sphère}} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi d\theta d\phi dr \\ &= \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \phi d\phi \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}$$

On peut vérifier que $r^2 \sin \phi$ est le jacobien de la transformation $(x_1, x_2, x_3) \rightarrow (r, \phi, \theta)$

Solution exercice 26

1. $\int_0^R \int_0^{2\pi} (r\mathbf{e}_r) r d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \mathbf{e}_r d\theta dr$. Comme \mathbf{e}_r dépend de θ , on ne peut le sortir de l'intégrale. Pour effectuer facilement ce calcul, on exprime \mathbf{e}_r dans la base cartésienne : $\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2$. Comme les \mathbf{e}_i ne dépendent pas de la position, on peut les sortir des intégrales

$$\int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \cos \theta d\theta dr \mathbf{e}_1 + \int_0^R \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta dr \mathbf{e}_2 = \mathbf{0}$$

On pouvait prévoir ce résultat en raison de la symétrie radiale du champ $\boldsymbol{\tau}$ ($\boldsymbol{\tau}(r, \theta) = -\boldsymbol{\tau}(r, \theta + \pi)$).

2. Une argumentation semblable au cas précédent nous indique que le résultat est le vecteur nul $\mathbf{0}$.

$$\begin{aligned}
3. & \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \phi \mathbf{e}_r R^2 \sin \phi d\theta d\phi \\
&= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \phi (\sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \phi \mathbf{e}_3) R^2 \sin \phi d\theta d\phi \\
&= R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \cos \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_1 + R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin^2 \phi \sin \theta d\theta d\phi \mathbf{e}_2 + \\
&\quad R^2 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \cos^2 \phi \sin \phi d\theta d\phi \mathbf{e}_3 \\
&= 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + \frac{4\pi R^2}{3} \mathbf{e}_3
\end{aligned}$$

De nouveau, par des arguments de symétrie, on pouvait prédire que les composantes selon \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 seraient nulles.

Cinématique et dynamique des milieux continus

Exercice 1

Un fluide s'écoule dans la région située entre deux demi-plans infranchissables perpendiculaires entre eux. On considère le repère cartésien orthonormé (O, \mathbf{e}_i) tel que les deux demi-plans soient $(x_1 = 0, x_2 \geq 0)$ et $(x_1 \geq 0, x_2 = 0)$, et que la région occupée par le fluide soit $(x_1 \geq 0, x_2 \geq 0)$. Dans ce repère, la description lagrangienne du mouvement du fluide nous est donnée par les équations

$$\begin{cases} x_1^{(l)}(X_i, t) = X_1 e^{\alpha t} \\ x_2^{(l)}(X_i, t) = X_2 e^{-\alpha t} \\ x_3^{(l)}(X_i, t) = X_3 \end{cases}$$

Les X_i sont les coordonnées d'une particule dans la configuration de référence, et les x_i sont les coordonnées de la particule au temps t . La constante $\alpha > 0$ a les dimensions physiques appropriées. On travaille dans le Système International d'unités.

1. A quel instant t_0 correspond la configuration de référence ?
2. Quelle est la description lagrangienne des composantes $v_i^{(l)}$ du vecteur vitesse ?
3. Quelle est la description eulérienne des composantes $v_i^{(e)}$ de ce même vecteur vitesse ?
4. Quelles sont les composantes d_{ij} du tenseur des taux de déformation ?
5. Au temps $t = 10$ s, on dessine dans le fluide, au moyen d'un colorant, une petite croix en $(x_1 = 10m, x_2 = 1m, x_3 = 0m)$. Celle-ci est formée par deux petits segments perpendiculaires de $1cm$ de longueur et formant des angles de $\pi/4$ avec les vecteurs de base \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 . Quels seront, 0.1 seconde plus tard, les longueurs de ces segments et l'angle qu'ils formeront entre eux ?
6. Soient (X_i) les coordonnées d'un point matériel P dans la configuration R_0 . Soit (ξ_i) les coordonnées de ce même point au temps τ . Prenons R_τ comme configuration de référence. Quelles sont les équations qui décrivent le mouvement par rapport à cette configuration ?
7. Soit $T^{(e)}(x_i, t) = Ax_1 + 3Bx_2t$, la description eulérienne du champ de température où les constantes $A, B > 0$ ont les dimensions physiques appropriées. Déterminer la variation instantanée de la température pour un observateur accompagnant la particule de coordonnées (X_A^*) dans la configuration de référence. Enfin, déterminer la variation instantanée de la température à l'endroit fixe de coordonnées (x_i^*) .

Exercice 2

Dans un repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) , on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{aligned}v_1 &= at \\v_2 &= bx_1 \\v_3 &= c\end{aligned}$$

a, b et c étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

1. Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_{10}, x_{20}, x_{30}) à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.
2. Calculer sous forme paramétrique les lignes de courant de l'écoulement à l'instant arbitraire t_0 .
3. Déterminer à l'instant t , l'équation de la ligne d'émission issue du point de coordonnées $(0, 0, 0)$.
4. Calculer le champ de vitesse en représentation lagrangienne, en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.
5. Calculer l'accélération des points matériels en représentation eulérienne.
6. Calculer l'accélération des points matériels en représentation lagrangienne. Comparer les solutions obtenues en partant des résultats trouvés en 4 et 5.

Exercice 3

Dans un repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) , on considère le mouvement d'un fluide, dont la description eulérienne est

$$\begin{aligned}v_1 &= ax_2 \\v_2 &= bx_1 \\v_3 &= c\end{aligned}$$

a, b et c étant des constantes de dimensions physiques appropriées.

Déterminer sous forme paramétrique la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_{10}, x_{20}, x_{30}) à l'instant $t = 0$. Donner la description lagrangienne du mouvement en prenant pour configuration de référence la configuration occupée en $t = 0$.

Mêmes questions pour le champ de vitesse suivant :

$$\begin{aligned}v_1 &= \frac{x_1}{t} \\v_2 &= \frac{x_2}{t} \\v_3 &= 0\end{aligned}$$

Exercice 4

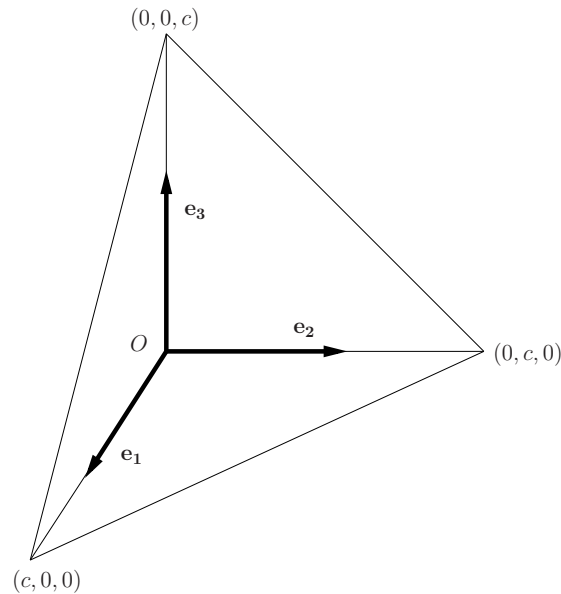
Soit un milieu continu dont l'état de contrainte est homogène et stationnaire (c.-à-d. un milieu dont l'état de contrainte est identique en tout point et à tout instant dans le repère choisi).

On considère à l'intérieur de ce milieu un tétraèdre matériel, tel que représenté sur la figure ci-dessous dans le repère cartésien orthonormé (O, \mathbf{e}_i) . Les arêtes parallèles aux axes ont la longueur c donnée.

Un expérimentateur a réalisé quelques mesures sur ce tétraèdre et a ainsi constaté que

1. la composante normale de la force exercée sur la face inférieure (c.-à-d. la face pour laquelle $x_3 = 0$) par la matière extérieure au tétraèdre est D ,
2. la composante normale de la force exercée sur la face de gauche (c.-à-d. la face pour laquelle $x_2 = 0$) par la matière extérieure au tétraèdre est E ,
3. la composante normale de la force exercée sur la face arrière (c.-à-d. la face pour laquelle $x_1 = 0$) par la matière extérieure au tétraèdre est F ,
4. la force exercée sur la face inclinée par la matière extérieure au tétraèdre est $\mathbf{G} = G_1 \mathbf{e}_1 + G_2 \mathbf{e}_2 + G_3 \mathbf{e}_3$.

Déterminer les composantes du tenseur des contraintes dans le repère donné.



Exercice 5

Un cube solide est maintenu immobile sous tension dans un repère inertiel (O, \mathbf{e}_i) . Dans sa configuration sans tension le cube occupe le domaine $(0 \leq x_i \leq a)$. Il s'agit d'un problème de petits déplacements où le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations infinitésimales ont pour expression

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -4Kx_1^2 & 0 \\ -4Kx_1^2 & 8Kx_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 3Kx_1x_2 \end{bmatrix}$$

et

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -3\varepsilon x_1x_2 & -4\varepsilon x_1^2 & 0 \\ -4\varepsilon x_1^2 & 5\varepsilon x_1x_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

les constantes positives K et ε étant données.

1. Donner les dimensions physiques des constantes K et ε .
2. Déterminer la densité des forces à distance.
3. Quels sont le tenseur de rotations infinitésimales et le vecteur de déplacement, si le sommet situé sur l'origine O est maintenu fixe, le sommet de coordonnées $(a, 0, 0)$ est maintenu le long de (O, \mathbf{e}_1) et le sommet de coordonnées $(0, a, 0)$ est maintenu dans le plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$?
4. Dans quelle région du cube une petite fibre de direction $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ s'est-elle rétrécie lors de la mise sous contraintes ?
5. Quels sont la résultante et le moment résultant des forces de contact exercées (i) sur la face du cube $x_3 = 0$, (ii) sur toute la surface du cube ?

Exercice 6

On étudie l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η constantes entre deux cylindres concentriques de rayon R_1 et R_2 et de hauteur L . Les cylindres tournent autour de leur axe suivant les vitesses angulaires uniformes respectives $\dot{\Omega}_1$ et $\dot{\Omega}_2$.

Le domaine de l'écoulement est $D = \{R_1 \leq r \leq R_2, 0 \leq z \leq L\}$ et le champ de vitesse a pour expression

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= Ar + \frac{B}{r} \\ v_z &= 0 \end{aligned}$$

avec $A = \frac{R_2^2\dot{\Omega}_2 - R_1^2\dot{\Omega}_1}{R_2^2 - R_1^2}$ et $B = -\frac{R_1^2R_2^2(\dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1)}{R_2^2 - R_1^2}$.

Note : cet écoulement est appelé écoulement de Couette.

Le champ de contraintes associé à cet écoulement est

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p(r) & \frac{C}{r^2} & 0 \\ \frac{C}{r^2} & -p(r) & 0 \\ 0 & 0 & -p(r) \end{bmatrix}, \quad \text{avec } p(r) = \rho\left(\frac{A^2r^2}{2} + 2AB \ln r - \frac{B^2}{2r^2}\right) + p_0,$$

avec $C = 2\eta \frac{R_1^2 R_2^2 (\dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1)}{(R_2^2 - R_1^2)^2}$ et p_0 , une pression de référence.

Pour cet écoulement, répondre aux questions suivantes.

1. Interpréter le champ de vitesse et dire s'il s'agit d'un écoulement stationnaire. Donner les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission. Calculer l'accélération.
2. Calculer le gradient de vitesse $\nabla \mathbf{v}$, les vitesses de déformation \mathbf{d} , les vitesses de rotation $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ et la vitesse de rotation $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$. Interpréter ces grandeurs.
3. Vérifier que les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement sont satisfaites sous leurs formes globales pour le volume matériel remplissant tout l'espace entre les deux cylindres.
Que vaut la puissance des forces de contact exercées sur ce volume matériel de fluide ?
4. Vérifier que les lois de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de quantité de mouvement sont satisfaites sous leurs formes locales.
5. Calculer le débit volume à travers la section $\theta = 0$

Exercice 7

On étudie l'écoulement d'un fluide de masse volumique ρ et de viscosité η constantes dans un cylindre de rayon R et de longueur L .

Le domaine de l'écoulement est $D = \{0 \leq r \leq R, 0 \leq z \leq L\}$ et le champ de vitesse a pour expression

$$\begin{aligned} v_r &= 0 \\ v_\theta &= 0 \\ v_z &= A (R^2 - r^2) \end{aligned}$$

avec $A = \frac{2\dot{Q}}{\pi R^4}$ où \dot{Q} est une constante.

Note : cet écoulement est appelé écoulement de Poiseuille.

Le champ de contraintes associé à cet écoulement est

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p(z) & 0 & -\frac{B}{2}r \\ 0 & -p(z) & 0 \\ -\frac{B}{2}r & 0 & -p(z) \end{bmatrix}, \quad \text{avec } p(z) = -Bz + p_0,$$

B étant une constante et p_0 étant une pression de référence.

Répondre aux questions de l'exercice précédent.

Le volume matériel à considérer est celui qui est contenu à un certain instant entre deux sections du cylindre espacées de la distance d .

La section à travers laquelle on demande de donner le débit volume est $z = C^{\text{ste}}$.

Exercice 8

Un barreau cylindrique droit, de section circulaire, constitué d'un matériau élastique isotrope, est soumis à l'action de contraintes exercées en ses deux extrémités. Nous considérons un problème de petits déplacements ; les représentations lagrangiennes et eulériennes sont confondues. On donne un repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) par rapport auquel la position du barreau avant déformation est la suivante :

- La section du barreau est un cercle de rayon R dont le centre se trouve sur l'axe (O, \mathbf{e}_3) .
- Une des bases du cylindre est située dans le plan $x_3 = 0$, et la seconde dans le plan $x_3 = L$.

On considère 3 cas de champs de contraintes dans le barreau, à partir desquels les tenseurs des déformations infinitésimales ε_{ij} sont calculés (avec S et α des constantes positives ayant les unités appropriées) :

1. Traction Simple :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{\nu S}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{S}{E} \end{bmatrix}$$

2. Flexion pure :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha x_1 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{\alpha \nu}{E} x_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\alpha \nu}{E} x_1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\alpha}{E} x_1 \end{bmatrix}$$

3. Torsion simple (dans la base locale cylindrique) :

$$[\sigma_{ij}^c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r \\ 0 & \alpha r & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}^c] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\nu}{E} \alpha r \\ 0 & \frac{1+\nu}{E} \alpha r & 0 \end{bmatrix}$$

Pour chacune des expériences de mise sous contrainte :

1. Déterminer les contraintes principales et les directions principales associées. Tracer les cercles de Mohr correspondants.

2. Pour un matériau *fragile* il y a rupture si

$$(\text{contrainte normale de traction}) \geq \sigma_f$$

avec σ_f la *contrainte de rupture*.

Déterminer l'endroit où s'initiera l'éventuelle rupture et sa surface de propagation.

3. Pour un matériau *ductile* le critère de Tresca annonce des déformations plastiques (c.-à-d. irréversibles) si

$$(\text{contrainte de cisaillement maximum}) \geq \frac{\sigma_Y}{2}$$

avec σ_Y la *contrainte d'entrée en plasticité*.

Déterminer l'endroit où s'initiera l'éventuelle entrée en plasticité.

4. Déterminer le champ de déplacements du barreau sachant que $u_i(0,0,0) = 0$ et que $\omega_{ij}(0,0,0) = 0$.

Marche à suivre

Le transposé des gradients de déformation peut se décomposer en ses parties symétrique et antisymétrique, ce qui en cartésien s'écrit :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ &= \varepsilon_{ij} + \omega_{ij} \end{aligned}$$

Les tenseurs ε_{ij} et ω_{ij} sont respectivement le tenseur des déformations infinitésimales et le tenseur des rotations infinitésimales.

- (a) Pour calculer le champ de déplacements u_i qui dérive de ε_{ij} , on établit d'abord les différentielles des composantes du tenseur des rotations infinitésimales :

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

- (b) On calcule les composantes du tenseur des rotations infinitésimales à partir de ces différentielles et des conditions imposées.

- (c) Les différentielles des composantes du champ de déplacements u_i sont trouvées par

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

- (d) On intègre finalement les du_i avec les conditions proposées.

5. Déterminer en tout point la direction et l'intensité de la rotation locale $\Omega_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \omega_{kj}$.

Exercice 9

Un anneau d'épaisseur e est soumis à l'action de contraintes. La section de l'anneau est délimitée par deux cercles concentriques de rayon intérieur R_i et extérieur R_e . On considère un problème de petits déplacements.

On travaille dans un système de coordonnées-composantes cylindriques (r, θ, z) , avec pour origine le centre de l'anneau. On donne le champ de contraintes dans la pièce, à partir duquel le tenseur des déformations infinitésimales ε_{ij} est calculé (avec A, B, C, D et E des constantes positives ayant les unités appropriées) :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{A}{r^2} + B & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{A}{r^2} + C & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{D}{r^2} + E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{r^2} + E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1. En sachant que l'anneau n'est pas soumis à des forces de volume et qu'il est immobile après déformation, exprimer la constante C en fonction de A et B .
2. (a) Déterminer en chaque point les contraintes principales et les directions principales associées.
 (b) Pour un matériau *fragile*, déterminer l'endroit où s'initiera l'éventuelle rupture et la direction de sa surface de propagation.
 (c) Pour un matériau *ductile*, déterminer l'endroit où s'initiera l'éventuelle entrée en plasticité.
3. (a) Quelle est la résultante des forces de contact exercées sur la surface $r = R_e$.
 (b) Quel est le moment résultant des forces de contact exercées sur la surface $r = R_e$.
 (c) On effectue une coupe fictive dans l'anneau selon le plan $\theta = \pi$. Quelle est la résultante des forces de contact exercée par la partie de la pièce située du côté $\theta \leq \pi$ sur la partie située du côté $\theta \geq \pi$?
4. Soient deux fibres matérielles formant une croix située dans un plan $z = cste$ et centrée en :

$$\begin{cases} r = \frac{R_e + R_i}{2} \\ \theta = \pi \end{cases}$$

Sachant qu'avant déformation les bras de la croix sont alignés respectivement avec les vecteurs $\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta$, quels sont les allongements de ces deux fibres ainsi que la variation de l'angle qu'elles forment en leur point d'intersection ?

5. Déterminer le champ de déplacements de l'anneau, ainsi que les valeurs des rayons intérieur et extérieur de la pièce après déformation (en ne tenant pas compte des modes de déplacement rigides).

Exercice 10

Un fluide est en mouvement dans la région qui entoure une sphère de rayon R centrée en l'origine O d'un système de coordonnées-composantes sphériques. La description eulérienne du champ de vitesses est

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U(1 - \frac{R}{r}) \cos \phi \\ -U(1 - \frac{2R}{r}) \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

et le tenseur des contraintes est

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{S}{r^2} \cos \phi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Les constantes S et U ont les dimensions physiques appropriées.

1. Quelles sont les dimensions physiques et les unités de U et S dans le Système International d'unités ?
2. Quelle est la vitesse à grande distance du centre de la sphère ? Interpréter.
3. Montrer que le fluide ne traverse pas la surface de la sphère.
4. Déterminer s'il peut s'agir d'un fluide incompressible et indilatable.
5. Quelle est la densité des forces de contact exercées par le fluide sur la sphère et son moment par rapport à l'origine ?
Quelles sont la résultante et le moment résultant de ces forces de contact ?
6. Déterminer si le fluide glisse (sans frottement) ou colle (sans glissement) sur la surface de la sphère.
7. Que vaut, en représentation eulérienne, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, ϕ, θ) , la variation par unité de temps de sa distance au plan fixe d'équation $\phi = \pi/2$?
8. Au temps $t = 0$, dans le plan $\phi = \pi/2$, on trace une petite croix de colorant. On demande quelle orientation lui donner pour que ses bras, perpendiculaires en $t = 0$, le restent approximativement en leur point d'intersection dans les courts instants qui suivent.

Solution exercice 1

1. A l'instant de référence t_0 , on doit avoir

$$x_i^{(l)}(X_j, t_0) = X_i$$

soit

$$\begin{aligned} X_1 e^{\alpha t_0} &= X_1 \\ X_2 e^{-\alpha t_0} &= X_2 \\ X_3 &= X_3 \end{aligned}$$

Ceci est vrai si et seulement si

$$e^{\alpha t_0} = e^{-\alpha t_0} = 1$$

et donc $t_0 = 0$.

2. Le champ de vitesse \mathbf{v} est la dérivée matérielle du vecteur position \mathbf{x} :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{D\mathbf{x}}{Dt} \\ &= \frac{\partial \mathbf{x}^{(l)}}{\partial t} \end{aligned}$$

La représentation lagrangienne du champ "vecteur position" étant

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= x_1^{(l)} \mathbf{e}_1 + x_2^{(l)} \mathbf{e}_2 + x_3^{(l)} \mathbf{e}_3 \\ &= X_1 e^{\alpha t} \mathbf{e}_1 + X_2 e^{-\alpha t} \mathbf{e}_2 + X_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1^{(l)} \mathbf{e}_1 + v_2^{(l)} \mathbf{e}_2 + v_3^{(l)} \mathbf{e}_3 \\ &= \frac{\partial x_1^{(l)}}{\partial t} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2^{(l)}}{\partial t} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3^{(l)}}{\partial t} \mathbf{e}_3 \\ &= \alpha X_1 e^{\alpha t} \mathbf{e}_1 - \alpha X_2 e^{-\alpha t} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

ou en représentation matricielle

$$\begin{bmatrix} v_1^{(l)} \\ v_2^{(l)} \\ v_3^{(l)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha X_1 e^{\alpha t} \\ -\alpha X_2 e^{-\alpha t} \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. La représentation eulérienne du champ de vitesse peut être trouvée à partir de sa représentation lagrangienne. En effet, à l'instant t , passe au point de l'espace de coordonnées (x_1, x_2, x_3) , le point matériel ayant les coordonnées lagrangiennes

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 e^{-\alpha t} \\ x_2 e^{\alpha t} \\ x_3 \end{bmatrix}$$

dont les composantes du vecteur vitesse ont été calculées au point précédent. En substituant les X_i , on obtient

$$\begin{bmatrix} v_1^{(e)} \\ v_2^{(e)} \\ v_3^{(e)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ -\alpha x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On voit que les composantes eulériennes de la vitesse ne dépendent pas du temps : le champ de vitesse est dit stationnaire, c'est-à-dire qu'en un endroit fixe de l'espace le vecteur vitesse ne dépend pas du temps.

4. Le tenseur des taux de déformation $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{v})$ a pour composantes dans le repère cartésien $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$

$$[d_{ij}] = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right] = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. On effectue un changement de repère de telle manière que les deux segments qui forment la croix soient dirigés suivant les nouveaux vecteurs de base \mathbf{e}'_i . De tels \mathbf{e}'_i sont par exemple

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}'_1 \\ \mathbf{e}'_2 \\ \mathbf{e}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

La composante diagonale d'_{ii} du tenseur des taux de déformation d'_{ij} dans le repère (O, \mathbf{e}'_i) représente l'allongement relatif par unité de temps d'une fibre matérielle dirigée suivant le vecteur \mathbf{e}'_i . La composante non diagonale d'_{ij} représente la moitié du rapprochement angulaire par unité de temps de deux fibres matérielles alignées suivant \mathbf{e}'_i et \mathbf{e}'_j . Les composantes d'_{ij} se calculent par la formule

$$d'_{ij} = a_{ik} a_{jl} d_{kl}$$

c.-à-d.

$$[d'_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

On constate que, puisque les composantes diagonales d'_{11} et d'_{22} sont nulles, les bras de la croix ne subissent pas d'allongement ; 0.1 seconde plus tard, les longueurs de ces segments sont toujours égales à 1 cm. Par contre il y a un rapprochement angulaire des deux bras orientés suivant \mathbf{e}'_1 et \mathbf{e}'_2 d'amplitude

$$\delta\phi_{12} = 2d'_{12}\delta t = -0.2\alpha \text{ rad.}$$

Le rapprochement étant négatif, il s'agit en fait d'un éloignement des deux bras parallèles aux \mathbf{e}'_1 et \mathbf{e}'_2 . L'angle final est donc

$$\phi_{12} = \frac{\pi}{2} + 0.2\alpha \text{ rad.}$$

Remarque : tous les calculs sont faits approximativement, en se limitant à des développements en série jusqu'au premier ordre.

6. Les "nouvelles" coordonnées de référence (ξ_i) sont reliées aux "anciennes" (X_i) par

$$\begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_1 e^{\alpha\tau} \\ X_2 e^{-\alpha\tau} \\ X_3 \end{bmatrix}$$

ou inversement

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 e^{-\alpha\tau} \\ \xi_2 e^{\alpha\tau} \\ \xi_3 \end{bmatrix}.$$

En injectant cette dernière relation dans la représentation lagrangienne du mouvement, on obtient la représentation lagrangienne du mouvement associée à la configuration de référence prise à l'instant τ

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_1 e^{\alpha(t-\tau)} \\ \xi_2 e^{-\alpha(t-\tau)} \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

7. (a) La variation instantanée de la température pour un observateur accompagnant la particule de coordonnées (X_A^*) dans la configuration de référence est la dérivée matérielle de T pour le point matériel de coordonnées lagrangiennes (X_A^*) . En représentation lagrangienne la dérivée matérielle a pour expression

$$\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T^{(l)}}{\partial t}$$

On trouve directement l'expression lagrangienne du champ T

$$T^{(l)}(X_i, t) = AX_1 e^{\alpha t} + 3BtX_2 e^{-\alpha t}$$

et donc

$$\left. \frac{DT}{Dt} \right|_{X_A=X_A^*} = \left. \frac{\partial T^{(l)}}{\partial t} \right|_{X_A=X_A^*} = \alpha AX_1^* e^{\alpha t} + 3BX_2^* e^{-\alpha t} (1 - \alpha t)$$

(b) La variation instantanée de la température à l'endroit fixe de coordonnées (x_i^*) est

$$\left. \frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} \right|_{x_i=x_i^*} = 3Bx_2^*$$

Remarque : si on désire connaître la variation instantanée de T pour le *point matériel* qui occupe la position (x_i^*) à l'instant t , il faut utiliser l'expression de la dérivée matérielle en représentation eulérienne

$$\begin{aligned} \left. \frac{DT}{Dt} \right|_{x_i=x_i^*} &= \left(\frac{\partial T^{(e)}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(e)} \cdot \nabla T^{(e)} \right) \Big|_{x_i=x_i^*} \\ &= \alpha Ax_1^* + 3Bx_2^* (1 - \alpha t) \end{aligned}$$

Remarque : ce dernier résultat et celui obtenu en (a) peuvent évidemment être obtenus l'un à partir de l'autre en effectuant le changement approprié entre les (x_i^*) et les (X_A^*) .

Solution exercice 2

1. Pour trouver l'expression paramétrique de la trajectoire de la particule se trouvant au point de coordonnées (x_{10}, x_{20}, x_{30}) à l'instant $t = 0$, nous devons résoudre le problème suivant (problème de Cauchy) :

$$\frac{dx_i}{dt} = v_i$$

avec $x_i = x_{i0}$ pour $t = 0$.

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoud facilement :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = at \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}t^2 + x_{10} \\ x_2 = \frac{ab}{6}t^3 + b x_{10}t + x_{20} \\ x_3 = ct + x_{30} \end{cases}$$

Vu qu'on impose $(X_1, X_2, X_3) = (x_{10}, x_{20}, x_{30})$, la représentation lagrangienne du mouvement est alors :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}t^2 + X_1 \\ x_2 = \frac{ab}{6}t^3 + b X_1 t + X_2 \\ x_3 = ct + X_3 \end{cases}$$

2. Les lignes de courant sont l'enveloppe du champ de vitesse à un instant déterminé. En d'autres mots il s'agit des courbes tangentes aux vecteurs vitesse à un temps t_0 fixé. Pour calculer ces lignes de courant, on va figer (ou "photographier") le champ de vitesse à l'instant donné t_0 , et ensuite calculer les trajectoires pour ce champ de vitesse fictif égal au champ de vitesse réel au temps particulier t_0 .

Remarque : pour un champ de vitesse stationnaire (ce qui n'est pas le cas ici) les lignes de courant et les trajectoires seront confondues.

On obtient alors un système d'équations différentielles qui se résoud facilement, où t_0 est considéré comme une constante, tandis que s est le paramètre qui décrit la courbe (et qui est un temps fictif) :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{ds} = at_0 \\ \frac{dx_2}{ds} = bx_1 \\ \frac{dx_3}{ds} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = at_0 s + x_{10} \\ x_2 = \frac{abt_0}{2}s^2 + b x_{10}s + x_{20} \\ x_3 = cs + x_{30} \end{cases}$$

avec $x_i = x_{i0}$ pour $s = 0$.

3. La ligne d'émission est la ligne générée par émission continue de points matériels à partir d'une position donnée de l'espace. Notons x_i^* le point d'émission, et considérons la ligne émise depuis le temps t_0 jusqu'au temps t .

Cette ligne a pour équation pour ($t \geq t_0$) :

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$$

avec X_A tel que pour un certain temps τ ($t_0 \leq \tau \leq t$) on a $x_i^* = x_i^{(l)}(X_A, \tau)$.

En d'autres mots on va rechercher les coordonnées lagrangiennes X_A des points matériels qui à un certain temps τ passent par le point d'émission.

Remarque : pour un champ de vitesse stationnaire les lignes d'émission et les trajectoires seront confondues.

Dans notre cas :

$$\begin{bmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ x_3^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}\tau^2 + X_1 \\ \frac{ab}{6}\tau^3 + bX_1\tau + X_2 \\ c\tau + X_3 \end{bmatrix}$$

On trouve donc les coordonnées lagrangiennes du point matériel qui au temps τ a pour coordonnées $x_i^* = 0$:

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{a}{2}\tau^2 \\ \frac{ab}{3}\tau^3 \\ -c\tau \end{bmatrix}$$

Il suffit à présent d'injecter cette expression des X_A en fonction de τ dans l'expression des trajectoires :

$$\begin{cases} x_1 = \frac{a}{2}(t^2 - \tau^2) \\ x_2 = \frac{ab}{6}t^3 + \frac{ab}{3}\tau^3 - \frac{ab}{2}\tau^2t \\ x_3 = c(t - \tau) \end{cases}$$

Il s'agit de l'expression paramétrique de la ligne d'émission (de paramètre τ) au temps t (Fig. 1).

4. Deux possibilité s'offrent à nous pour calculer l'expression lagrangienne du champ de vitesse. La première solution est de dériver l'expression lagrangienne du vecteur position par rapport au temps :

$$\mathbf{v} = \frac{D\mathbf{x}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{x}^{(l)}}{\partial t}$$

La seconde solution est d'exprimer les x_j en fonction des X_A dans l'expression eulérienne du champ de vitesse :

$$v_i^{(l)}(X_A, t) = v_i^{(e)}(x_j^{(l)}(X_A, t), t)$$

Dans les 2 cas nous trouvons :

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} at \\ \frac{ab}{2}t^2 + bX_1 \\ c \end{bmatrix}$$

5. L'accélération \mathbf{a} d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression eulérienne du champ de vitesse :

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(e)}}{\partial t} + (\nabla \mathbf{v}^{(e)})^T \cdot \mathbf{v}^{(e)}$$

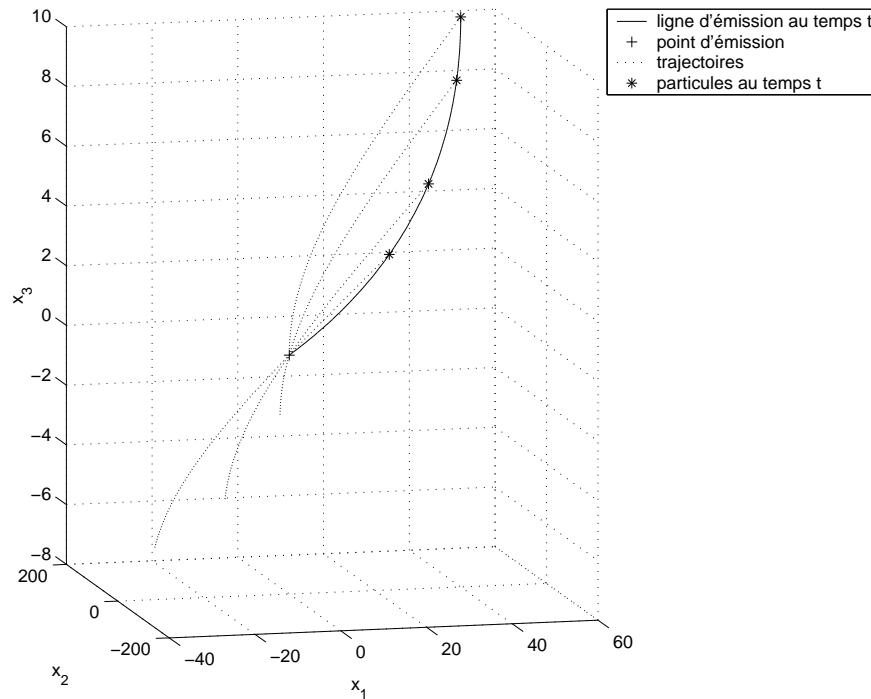


FIG. 1 – Ligne d'émission en $t = 10$ s, avec pour temps d'initialisation de l'émission $t_0 = 0$ s (les paramètres a , b et c ont été fixés à 1).

Le gradient de \mathbf{v} est le suivant :

$$\nabla \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On trouve alors directement :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + 0 \\ 0 + bv_1 \\ 0 + 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ abt \\ 0 \end{bmatrix}$$

6. L'accélération \mathbf{a} d'un point matériel se calcule comme suit à partir de l'expression lagrangienne du champ de vitesse :

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(l)}}{\partial t}$$

On trouve directement :

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ abt \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les résultats obtenus à partir des 2 représentations du champ de vitesse sont équivalents. *Remarque : de plus dans ce cas-ci l'expression de l'accélération ne dépend pas des coordonnées, c'est pourquoi on obtient exactement les mêmes expressions.*

Solution exercice 3

(a) Il existe plusieurs méthodes pour résoudre ce problème de Cauchy.

La première consiste à dériver les 2 premières équations par rapport au temps de manière à obtenir 2 équations du second ordre découplées :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1 \\ \frac{dx_3}{dt} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{d^2x_1}{dt^2} = a\frac{dx_2}{dt} = abx_1 \\ \frac{d^2x_2}{dt^2} = b\frac{dx_1}{dt} = abx_2 \\ x_3 = ct + C_3 \end{cases}$$

La solution de ces équations du second ordre est connue :

$$\begin{aligned} x_1 &= C_1 e^{\sqrt{ab}t} + D_1 e^{-\sqrt{ab}t} \\ x_2 &= C_2 e^{\sqrt{ab}t} + D_2 e^{-\sqrt{ab}t} \end{aligned}$$

Ces solutions générales doivent vérifier les équations de départ :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = ax_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = bx_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = \sqrt{\frac{b}{a}} C_1 \\ D_2 = -\sqrt{\frac{b}{a}} D_1 \end{cases}$$

ainsi que les conditions initiales :

$$\begin{cases} x_1(0) = x_{10} \\ x_2(0) = x_{20} \\ x_3(0) = x_{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{1}{2} (\sqrt{\frac{a}{b}} x_{20} + x_{10}) \\ D_1 = \frac{1}{2} (-\sqrt{\frac{a}{b}} x_{20} + x_{10}) \\ C_3 = x_{30} \end{cases}$$

La seconde méthode consiste à écrire le problème matriciellement (nous ne tenons pas compte de la variable x_3) :

$$\begin{bmatrix} \frac{dx_1}{dt} \\ \frac{dx_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Les valeurs propres de la matrice sont $\lambda_1 = \sqrt{ab}$ et $\lambda_2 = -\sqrt{ab}$, tandis que ses vecteurs propres sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} \mathbf{e}_1 + \sqrt{\frac{b}{a+b}} \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{v}_2 &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} \mathbf{e}_1 - \sqrt{\frac{b}{a+b}} \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

On construit alors la matrice Q dont chaque colonne est composée des composantes de chacun des vecteurs propres :

$$Q = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{a}{a+b}} & \sqrt{\frac{a}{a+b}} \\ \sqrt{\frac{b}{a+b}} & -\sqrt{\frac{b}{a+b}} \end{bmatrix}$$

On réalise alors le changement de variable suivant : $z = Q^{-1}x$, et on résoud :

$$\begin{bmatrix} \frac{dz_1}{dt} \\ \frac{dz_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

La solution à ce problème est immédiate :

$$\begin{aligned} z_1 &= C_1^* e^{\lambda_1 t} \\ z_2 &= C_2^* e^{\lambda_2 t} \end{aligned}$$

et il suffit ensuite de réaliser le changement de variable inverse $x = Qz$:

$$\begin{aligned} x_1 &= \sqrt{\frac{a}{a+b}} C_1^* e^{\sqrt{ab}t} + \sqrt{\frac{a}{a+b}} C_2^* e^{-\sqrt{ab}t} \\ x_2 &= \sqrt{\frac{b}{a+b}} C_1^* e^{\sqrt{ab}t} - \sqrt{\frac{b}{a+b}} C_2^* e^{-\sqrt{ab}t} \end{aligned}$$

et d'imposer les conditions initiales.

Dans les 2 cas on trouve donc finalement la réponse suivante :

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} x_{20} + x_{10} \right) e^{\sqrt{ab}t} + \frac{1}{2} \left(-\sqrt{\frac{a}{b}} x_{20} + x_{10} \right) e^{-\sqrt{ab}t} \\ x_2 &= \frac{1}{2} \left(x_{20} + \sqrt{\frac{b}{a}} x_{10} \right) e^{\sqrt{ab}t} + \frac{1}{2} \left(x_{20} - \sqrt{\frac{b}{a}} x_{10} \right) e^{-\sqrt{ab}t} \\ x_3 &= ct + x_{30} \end{aligned}$$

(b) La résolution se fait par séparation des variables :

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = \frac{x_1}{t} \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{t} \\ \frac{dx_3}{dt} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{dx_1}{x_1} = \frac{dt}{t} \\ \frac{dx_2}{x_2} = \frac{dt}{t} \\ x_3 = x_{30} \end{cases}$$

Finalement, en intégrant chacun des membres séparément on trouve :

$$\begin{cases} \ln x_1 = \ln t + C_1 \\ \ln x_2 = \ln t + C_2 \\ x_3 = x_{30} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{x_{10}}{t_0} t \\ x_2 = \frac{x_{20}}{t_0} t \\ x_3 = x_{30} \end{cases}$$

La condition initiale pour $t = 0$ pose problème car le champ de vitesse est alors infini. On suppose donc que $t_0 > 0$.

Solution exercice 4

Le tenseur des contraintes étant symétrique, il n'y a que six composantes à déterminer : les composantes diagonales σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} et, par exemple, les composantes hors-diagonale σ_{21} , σ_{31} , σ_{32} . On trouve ces composantes en utilisant la définition du tenseur des contraintes

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}$$

et les informations disponibles relatives aux résultantes des forces de contact exercées sur les quatre faces du tétraèdre.

1. La face inférieure ($x_3 = 0$) a pour normale unitaire sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$. La densité des forces de contact exercées sur cette face est

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_3) = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (-\mathbf{e}_3) = -\sigma_{31}\mathbf{e}_1 - \sigma_{32}\mathbf{e}_2 - \sigma_{33}\mathbf{e}_3 \quad (1)$$

En notant \mathbf{D} la résultante des forces de contact exercées sur cette face et en tenant compte que l'état de contrainte est homogène on peut écrire

$$\mathbf{D} = S\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_3) \quad (2)$$

où $S = \frac{c^2}{2}$ est l'aire de la face. La composante normale de \mathbf{D} est connue, elle vaut

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D} \cdot (-\mathbf{e}_3) = D \quad (3)$$

soit encore, en utilisant (1) et (2)

$$\mathbf{D} \cdot (-\mathbf{e}_3) = S\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_3) \cdot (-\mathbf{e}_3) = S\sigma_{33} = \frac{c^2}{2}\sigma_{33} \quad (4)$$

En identifiant les expressions (3) et (4) on trouve que

$$\sigma_{33} = \frac{D}{S} = \frac{2D}{c^2}$$

Le même raisonnement appliqué pour la face de gauche ($x_2 = 0$) et pour la face arrière ($x_1 = 0$) donne les deux autres composantes diagonales

$$\sigma_{22} = \frac{2E}{c^2}$$

$$\sigma_{11} = \frac{2F}{c^2}$$

2. Les composantes hors-diagonale sont ensuite déterminées à partir de la résultante exercée sur la face restante du tétraèdre (la face inclinée par rapport aux axes). Différentes argumentations permettent de trouver l'aire et la normale unitaire sortante de la face inclinée. On peut par exemple utiliser le produit vectoriel de deux côtés vectoriels de la face inclinée : il s'agit du vecteur orthogonal à ces deux côtés (et donc aussi orthogonal à la face) ayant pour norme l'aire du parallélogramme construit sur ces deux vecteurs et orienté suivant la règle de la main droite. Le produit vectoriel des côtés $c\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_3$ et $c\mathbf{e}_2 - c\mathbf{e}_3$ donne le vecteur

$$(c\mathbf{e}_1 - c\mathbf{e}_3) \times (c\mathbf{e}_2 - c\mathbf{e}_3) = c^2(\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3)$$

Sa norme $c^2\sqrt{3}$ vaut le double de l'aire S' de la face :

$$S' = \frac{c^2\sqrt{3}}{2}$$

et sa direction est $\mathbf{n}' = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{e}_3$ (on vérifie facilement qu'elle est bien orientée vers l'extérieur de la face).

La résultante des forces de contact exercées sur la face est

$$\mathbf{G} = S'\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}') = S'\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}' = G_1\mathbf{e}_1 + G_2\mathbf{e}_2 + G_3\mathbf{e}_3$$

et donne le système algébrique suivant

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{11} + \sigma_{21} + \sigma_{31}) &= \frac{G_1}{S'} = \frac{2G_1}{c^2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{21} + \sigma_{22} + \sigma_{32}) &= \frac{G_2}{S'} = \frac{2G_2}{c^2\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_{31} + \sigma_{32} + \sigma_{33}) &= \frac{G_3}{S'} = \frac{2G_3}{c^2\sqrt{3}} \end{aligned}$$

Tenant compte des composantes diagonales déterminées précédemment on obtient un système de trois équations faisant intervenir les trois composantes hors-diagonale recherchées

$$\begin{aligned} \sigma_{21} + \sigma_{31} &= \frac{2G_1}{c^2} - \frac{2F}{c^2} \\ \sigma_{21} + \sigma_{32} &= \frac{2G_2}{c^2} - \frac{2E}{c^2} \\ \sigma_{31} + \sigma_{32} &= \frac{2G_3}{c^2} - \frac{2D}{c^2} \end{aligned}$$

On trouve finalement

$$\begin{aligned} \sigma_{21} = \sigma_{12} &= \frac{(G_1 - F) + (G_2 - E) - (G_3 - D)}{c^2} \\ \sigma_{31} = \sigma_{13} &= \frac{(G_1 - F) - (G_2 - E) + (G_3 - D)}{c^2} \\ \sigma_{32} = \sigma_{23} &= \frac{-(G_1 - F) + (G_2 - E) + (G_3 - D)}{c^2} \end{aligned}$$

Solution exercice 5

1. La dimension physique du tenseur des contraintes est celle d'une densité surfacique de force, soit $ML^{-1}t^{-2}$. On en déduit que $[K] = ML^{-3}t^{-2}$. Les unités correspondantes dans le Système International sont $\text{kg m}^{-3} \text{s}^{-2}$.

Le tenseur des déformations infinitésimales est adimensionnel. On en déduit que $[\epsilon] = L^{-2}$.

2. La forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement est

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$$

Comme le corps est au repos, le vecteur accélération $\frac{D\mathbf{v}}{Dt}$ est nul, et on obtient l'équation de l'équilibre statique

$$\rho \mathbf{g} = -\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}$$

Ceci permet de déduire la densité des forces à distance. Ses composantes valent

$$[\rho g_i] = - \begin{bmatrix} 0 \\ -8Kx_1 + 8Kx_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les forces à distance exercées sur ce corps sont donc nulles.

3. On écrit d'abord les différentielles de ω_{ij} . Celles-ci sont données par

$$d\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

soit

$$d\omega_{12} = (-3\epsilon x_1 + 8\epsilon x_1)dx_1 + (0 - 5\epsilon x_2)dx_2 + (0 - 0)dx_3$$

$$d\omega_{23} = (0 - 0)dx_1 + (0 - 0)dx_2 + (0 - 0)dx_3$$

$$d\omega_{31} = (0 - 0)dx_1 + (0 - 0)dx_2 + (0 - 0)dx_3$$

En intégrant, on trouve

$$\omega_{12} = \frac{5}{2}\epsilon x_1^2 - \frac{5}{2}\epsilon x_2^2 + \omega_{12}(0, 0, 0)$$

$$\omega_{23} = \omega_{23}(0, 0, 0)$$

$$\omega_{31} = \omega_{31}(0, 0, 0)$$

Les valeurs $\omega_{ij}(0, 0, 0)$ de ω_{ij} à l'origine du repère ne sont pas connues. Par contre, on connaît les contraintes cinématiques suivantes :

- le sommet du cube situé en $(0, 0, 0)$ est maintenu fixe : $\mathbf{u}(0, 0, 0) = \mathbf{0}$, soit $u_1(0, 0, 0) = u_2(0, 0, 0) = u_3(0, 0, 0) = 0$;
- le sommet du cube de coordonnées $(a, 0, 0)$ est maintenu le long de l'axe Ox_1 : $u_2(a, 0, 0) = u_3(a, 0, 0) = 0$;
- le sommet du cube de coordonnées $(0, a, 0)$ est maintenu dans le plan x_1Ox_2 : $u_3(0, a, 0) = 0$.

Pour abrégé l'écriture on note par la suite $\omega_{ij}^0 = \omega_{ij}(0, 0, 0)$ et $u_i^0 = u_i(0, 0, 0)$.

Connaissant ϵ_{ij} et ω_{ij} on peut écrire à présent les différentielles des composantes du champ de déplacements. Celles-ci sont données par

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

On obtient

$$du_1 = (-3\epsilon x_1 x_2) dx_1 + \left(-\frac{3}{2}\epsilon x_1^2 - \frac{5}{2}\epsilon x_2^2 + \omega_{12}^0\right) dx_2 - \omega_{31}^0 dx_3$$

$$du_2 = \left(-\frac{13}{2}\epsilon x_1^2 + \frac{5}{2}\epsilon x_2^2 - \omega_{12}^0\right) dx_1 + 5\epsilon x_1 x_2 dx_2 + \omega_{23}^0 dx_3$$

$$du_3 = \omega_{31}^0 dx_1 - \omega_{23}^0 dx_2 + 0 dx_3$$

L'intégration de ces différentielles donne

$$\begin{aligned} u_1 &= -\frac{3}{2}\epsilon x_1^2 x_2 - \frac{5}{6}\epsilon x_2^3 + \omega_{12}^0 x_2 - \omega_{31}^0 x_3 + u_1^0 \\ u_2 &= -\frac{13}{6}\epsilon x_1^3 + \frac{5}{2}\epsilon x_1 x_2^2 - \omega_{12}^0 x_1 + \omega_{23}^0 x_3 + u_2^0 \\ u_3 &= \omega_{31}^0 x_1 - \omega_{23}^0 x_2 + u_3^0 \end{aligned}$$

Tenant compte des conditions sur les déplacements explicitées plus haut on trouve

$$u_3^0 = 0, \quad u_2^0 = 0, \quad u_1^0 = 0, \quad \omega_{31}^0 = 0, \quad \omega_{23}^0 = 0 \text{ et } \omega_{12}^0 = -\frac{13}{6}\epsilon a^2$$

Les composantes du tenseur des rotations infinitésimales $\boldsymbol{\omega}$ sont donc

$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{5}{2}\epsilon x_1^2 - \frac{5}{2}\epsilon x_2^2 - \frac{13}{6}\epsilon a^2 & 0 \\ -\frac{5}{2}\epsilon x_1^2 + \frac{5}{2}\epsilon x_2^2 + \frac{13}{6}\epsilon a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et celles du champ de déplacements \mathbf{u}

$$[u_i] = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2}\epsilon x_1^2 x_2 - \frac{5}{6}\epsilon x_2^3 - \frac{13}{6}\epsilon a^2 x_2 \\ -\frac{13}{6}\epsilon x_1^3 + \frac{13}{6}\epsilon a^2 x_1 + \frac{5}{2}\epsilon x_1 x_2^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

4. On définit tout d'abord un second repère (O, \mathbf{e}'_i) tel que \mathbf{e}'_1 soit orienté dans la direction $\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_2$. Le plus simple est de choisir le repère obtenu par rotation du premier d'un angle $\pi/4$ autour de \mathbf{e}_3 . La matrice de changement de base associée est

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La composante nous intéressant est ϵ'_{11} et est obtenue à partir de ϵ_{ij} par la relation

$$\begin{aligned} \epsilon'_{11} &= a_{1k}a_{1l}\epsilon_{kl} = a_{11}a_{11}\epsilon_{11} + a_{11}a_{12}\epsilon_{12} + a_{11}a_{13}\epsilon_{13} + a_{12}a_{11}\epsilon_{21} + a_{12}a_{12}\epsilon_{22} + a_{12}a_{13}\epsilon_{23} \\ &\quad + a_{13}a_{11}\epsilon_{31} + a_{13}a_{12}\epsilon_{32} + a_{13}a_{13}\epsilon_{33} \\ &= \epsilon x_1 x_2 - 4\epsilon x_1^2 \end{aligned}$$

Remarque : on n'a pas effectué le changement de coordonnées associé au changement de repère, on a seulement calculé les composantes du tenseur dans la base \mathbf{e}'_i . Ceci nous permet d'identifier plus facilement la région recherchée.

Une fibre orientée dans la direction indiquée se rétrécit si $\epsilon'_{11} = \epsilon x_1(x_2 - 4x_1) < 0$. Ce sera le cas si elle se trouve dans la région du cube caractérisée par $x_2 < 4x_1$.

5. La surface S sur laquelle on désire connaître la résultante des forces de contact a pour normale unitaire sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_3$. L'expression de cette résultante est

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \int_S \boldsymbol{\tau} dS = \int_S \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (-\mathbf{e}_3) dS \\ &= \int_0^a \int_0^a -3K x_1 x_2 \mathbf{e}_3 dx_2 dx_1 = -\frac{3a^4 K}{4} \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

Le moment résultant \mathbf{M} par rapport à l'origine du repère s'écrit

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= \int_S \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau} dS = \int_S \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} dS = \int_S \mathbf{x} \times \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (-\mathbf{e}_3) dS \\ &= \int_0^a \int_0^a (x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2) \times (-3Kx_1x_2 \mathbf{e}_3) dx_2 dx_1 \\ &= \int_0^a \int_0^a (3Kx_1^2x_2 \mathbf{e}_2 - 3Kx_1x_2^2 \mathbf{e}_1) dx_2 dx_1 = \frac{Ka^5}{2} \mathbf{e}_2 - \frac{Ka^5}{2} \mathbf{e}_1 \end{aligned}$$

Il n'est pas nécessaire de faire de longs calculs pour déterminer la résultante des forces de contact \mathbf{F}_c exercées sur toute la surface du cube. En effet, celle-ci doit équilibrer la résultante des forces à distance \mathbf{F}_d puisque le corps en question est immobile. Pour s'en convaincre, il suffit d'intégrer l'équation d'équilibre statique obtenue plus haut sur tout le volume occupé par le cube et d'appliquer le théorème de Gauss

$$\begin{aligned} \int_V \rho \mathbf{g} dV &= - \int_V \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dS \\ \int_V \rho \mathbf{g} dV &= - \int_S \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

On obtient bien

$$\mathbf{F}_d = -\mathbf{F}_c$$

et comme les forces à distance sont nulles, on déduit que $\mathbf{F}_c = \mathbf{0}$.

Un même raisonnement peut être tenu pour déterminer le moment résultant \mathbf{M}_c des forces de contact exercées sur tout le corps. On trouve directement que $\mathbf{M}_c = \mathbf{0}$.

Solution exercice 6

1. Un examen des composantes du champ de vitesse indique qu'il s'agit d'un écoulement axysymétrique ($\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \theta} = \mathbf{0}$) autour de l'axe des cylindres. Cet écoulement résulte de l'entraînement du fluide par les parois rigides des deux cylindres en rotation. Le fluide en contact avec les cylindres est entraîné à la même vitesse que ceux-ci : on dit que le fluide colle aux cylindres. Les trajectoires sont des cercles situés dans des plans perpendiculaires à l'axe des cylindres et centrés sur celui-ci.

L'écoulement est stationnaire par rapport au repère utilisé car la représentation eulérienne du champ de vitesse n'y dépend pas du temps. Les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission sont donc des courbes confondues.

En coordonnées-composantes cylindriques, les trajectoires des points matériels sont solution du système différentiel

$$\begin{cases} \frac{dr}{dt} = v_r^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \\ r \frac{d\theta}{dt} = v_\theta^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \\ \frac{dz}{dt} = v_z^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \end{cases}$$

assorti de conditions initiales

$$r(t_0) = R, \theta(t_0) = \Theta, z(t_0) = Z$$

Le système à résoudre pour le champ de vitesse donné est

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= A + \frac{B}{r^2} \\ \frac{dz}{dt} &= 0 \end{aligned}$$

avec

$$r^{(l)}(0) = R, \theta^{(l)}(0) = \Theta, z^{(l)}(0) = Z$$

(l'instant initial $t_0 = 0$ a été choisi arbitrairement).

L'intégration du système donne

$$\begin{aligned} r(t) &= R \\ \theta(t) &= \left(A + \frac{B}{R^2}\right)t + \Theta \\ z(t) &= Z \end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe des cylindres.

Comment établir le système différentiel ?

Désignons par $(r(t), \theta(t), z(t))$ la trajectoire du point matériel qui occupe la position de coordonnées (R, Θ, Z) à l'instant t_0 . L'évolution temporelle du vecteur position de ce point matériel est

$$\mathbf{x}(t) = r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z$$

où on a pris soin de noter la dépendance du vecteur \mathbf{e}_r vis-à-vis de la position (et plus particulièrement de la coordonnée θ).

A l'instant t , le point matériel considéré occupe la position $(r(t), \theta(t), z(t))$ et sa vitesse est

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) &= v_r^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t)\mathbf{e}_r + v_\theta^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t)\mathbf{e}_\theta + \\ &v_z^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Or cette vitesse est par définition la variation instantanée du vecteur position du point matériel

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}(r(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + z(t)\mathbf{e}_z)$$

ce qui, tenant compte de la dépendance de \mathbf{e}_r vis-à-vis de θ , se développe comme suit

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \frac{dr}{dt}(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + r(t)\frac{d\mathbf{e}_r}{dt}(\theta(t)) + \frac{dz}{dt}(t)\mathbf{e}_z \\ &= \frac{dr}{dt}(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + r(t)\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}(t) + \frac{dz}{dt}(t)\mathbf{e}_z \text{ (dérivée composée)} \\ &= \frac{dr}{dt}(t)\mathbf{e}_r(\theta(t)) + r(t)\mathbf{e}_\theta\frac{d\theta}{dt}(t) + \frac{dz}{dt}(t)\mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Par identification composante par composante de cette dernière expression avec l'expression (1) on obtient le système différentiel

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= v_r^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \\ r \frac{d\theta}{dt} &= v_\theta^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \\ \frac{dz}{dt} &= v_z^{(e)}(r(t), \theta(t), z(t), t) \end{aligned}$$

La trajectoire $(r(t), \theta(t), z(t))$ est la solution de ce système qui satisfait les conditions initiales

$$r(t_0) = R, \theta(t_0) = \Theta, z(t_0) = Z$$

L'accélération est la dérivée matérielle de la vitesse

$$\mathbf{a} = \frac{D\mathbf{v}}{Dt}$$

soit

$$\mathbf{a}^{(l)} = \frac{D\mathbf{v}^{(l)}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(l)}}{\partial t}$$

en représentation lagrangienne, et

$$\mathbf{a}^{(e)} = \frac{D\mathbf{v}^{(e)}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{v}^{(e)}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(e)} \cdot \nabla \mathbf{v}^{(e)}$$

en représentation eulérienne. Sous forme matricielle l'accélération en représentation eulérienne s'écrit

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix}}_{[a_i]} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -A - \frac{B}{r^2} & 0 \\ A - \frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[(\nabla \mathbf{v})_{ij}]^T} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ Ar + \frac{B}{r} \\ 0 \end{bmatrix}}_{[v_i]} = \begin{bmatrix} -A^2 r - \frac{B^2}{r^3} - \frac{2AB}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

On constate que l'accélération est purement radiale, ce qui est normal puisque les points matériels sont en mouvement circulaire uniforme.

Note : on peut aussi calculer la représentation lagrangienne de l'accélération en dérivant la représentation lagrangienne de la vitesse par rapport au temps. Dans les calculs il ne faut pas oublier la dépendance des vecteurs de base locale \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ vis-à-vis de θ .

2. Le gradient de vitesse $\nabla \mathbf{v}$ a été calculé au point précédent

$$[(\nabla \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & +A - \frac{B}{r^2} & 0 \\ -A - \frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ce tenseur peut être décomposé comme suit

$$\nabla \mathbf{v} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{v}) - \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v}^T - \nabla \mathbf{v}) = \mathbf{d} - \boldsymbol{\omega}$$

avec \mathbf{d} le tenseur (symétrique) des vitesses de déformation et $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ le tenseur (antisymétrique) des vitesses de rotation.

Le tenseur des vitesses de déformation a donc pour composantes

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{B}{r^2} & 0 \\ -\frac{B}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Interprétation : comme les composantes diagonales $d_{rr}, d_{\theta\theta}$ et d_{zz} sont nulles, il n'y a pas d'allongement relatif instantané des segments élémentaires de matière parallèles aux vecteurs de base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$. Il y a une variation angulaire instantanée de deux segments élémentaires de matière initialement parallèles à \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ puisque $d_{r\theta}$ est non nul. Il s'agit d'un rapprochement angulaire si B est négatif et d'un éloignement angulaire si B est positif.

Le tenseur des vitesses de rotation a pour composantes

$$[\dot{\omega}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur vitesse de rotation s'obtient en calculant $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \frac{1}{2} \nabla \times \mathbf{v}$ (voir dans le formulaire l'expression du produit vectoriel en coordonnées-composantes cylindriques)

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_r \\ \dot{\Omega}_\theta \\ \dot{\Omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

On peut également obtenir les composantes de ce vecteur par la relation

$$\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \dot{\omega}_{kj}$$

qui donne bien

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_r \\ \dot{\Omega}_\theta \\ \dot{\Omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_{z\theta} \\ \dot{\omega}_{rz} \\ \dot{\omega}_{\theta r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A \end{bmatrix}$$

Interprétation : $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$ donne la vitesse angulaire de rotation d'un élément infinitésimal de matière. La direction de cette vitesse angulaire de rotation est celle de l'axe des cylindres et sa norme est A .

3. Conservation de la masse :

Il faut vérifier

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

Le théorème de Reynolds permet de calculer la variation instantanée d'une intégrale sur un volume matériel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV &= \int_{V(t)} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} dV + \int_{\partial V(t)} \underbrace{(\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n}}_{=0(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}=0 \text{ sur } \partial V(t))} dS \\ &= 0 \end{aligned}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

Il faut vérifier

$$\frac{d}{dt}\mathcal{P} = \mathcal{F}_c + \mathcal{F}_d$$

soit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV$$

En appliquant le théorème de Reynolds on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{v}) dV + \int_{\partial V(t)} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

et comme il n'y a pas de force de volume $\rho \mathbf{g}$

$$\mathcal{F}_d = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{0}$$

Il reste donc à vérifier que la résultante des forces de contact est nulle pour que la loi de conservation de la quantité de mouvement soit respectée sur $V(t)$

$$\mathcal{F}_c = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS = \mathbf{0}$$

On peut décomposer la frontière $\partial V(t)$ du volume matériel $V(t)$ en quatre surfaces

- (a) A_1 : surface annulaire $\{R_1 \leq r \leq R_2, z = 0\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$
- (b) A_2 : surface annulaire $\{R_1 \leq r \leq R_2, z = L\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$
- (c) L_1 : surface cylindrique $\{r = R_1, 0 \leq z \leq L\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_r$
- (d) L_2 : surface cylindrique $\{r = R_2, 0 \leq z \leq L\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$

On a de cette sorte

$$\mathcal{F}_c = \int_{A_1} \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) dS + \int_{A_2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) dS + \int_{L_1} \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS + \int_{L_2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) dS$$

Détaillons chacune de ces contributions.

- (a) Sur A_1

$$\int_{A_1} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, 0; -\mathbf{e}_z) dS = \int_{A_1} \boldsymbol{\sigma}^T(r, \theta, 0) \cdot (-\mathbf{e}_z) dS = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} p(r) \mathbf{e}_z r d\theta dr$$

- (b) Sur A_2

$$\int_{A_2} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, L; \mathbf{e}_z) dS = \int_{A_2} \boldsymbol{\sigma}^T(r, \theta, L) \cdot \mathbf{e}_z dS = - \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} p(r) \mathbf{e}_z r d\theta dr$$

Les contributions sur A_1 et A_2 sont donc opposées et leurs contributions jointes à la résultante \mathcal{F}_c est nulle.

(c) Sur L_1

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \boldsymbol{\tau}(R_1, \theta, z; -\mathbf{e}_r) dS &= \int_{L_1} \boldsymbol{\sigma}^T(R_1, \theta, z) \cdot (-\mathbf{e}_r) dS \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} (p(R_1)\mathbf{e}_r - \frac{C}{R_1^2}\mathbf{e}_\theta) R_1 d\theta dz \end{aligned}$$

Les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ ne peuvent être sortis de cette intégrale de surface car ils sont fonctions de θ qui est une des variables d'intégration. Une manière de procéder consiste à exprimer les vecteurs \mathbf{e}_r et \mathbf{e}_θ comme combinaison linéaire des vecteurs de base cartésienne $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ qui eux ne dépendent pas de la position et peuvent donc être sortis de toute intégrale

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

Les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 ne dépendant pas de la position ils peuvent être sortis des intégrales

$$\begin{aligned} \int_{L_1} \boldsymbol{\tau}(R_1, \theta, z; -\mathbf{e}_r) dS &= R_1 L \int_0^{2\pi} (p(R_1)(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) - \\ &\quad \frac{C}{R_1^2}(-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2)) d\theta \\ &= R_1 L p(R_1) \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{0} \mathbf{e}_1 + R_1 L p(R_1) \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{0} \mathbf{e}_2 + \\ &\quad \frac{LC}{R_1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \sin \theta d\theta}_{0} \mathbf{e}_1 - \frac{LC}{R_1} \underbrace{\int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta}_{0} \mathbf{e}_2 \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Un argument de symétrie mène directement à ce résultat telle sorte que le calcul explicite des intégrales peut être évité. Considérons sur L_1 deux éléments de surface dS et dS' ayant pour aire $R_1 d\theta dz$ et disposés symétriquement par rapport à l'axe de L_1 (c.-à-d. en (R_1, θ, z) et en $(R_1, \theta + \pi, z)$). On constate en effet que

$$\boldsymbol{\tau}(R_1, \theta, z; -\mathbf{e}_r) dS = -\boldsymbol{\tau}(R_1, \theta + \pi, z; -\mathbf{e}_r) dS'$$

si on tient compte du fait que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r(r, \theta + \pi, z) &= -\mathbf{e}_r(r, \theta, z) \\ \mathbf{e}_\theta(r, \theta + \pi, z) &= -\mathbf{e}_\theta(r, \theta, z) \end{aligned}$$

Les contributions élémentaires des forces de contact exercées de ces deux éléments de surface étant opposées. on en conclut que la résultante des forces de contact sur L_1 est nulle.

(d) Sur L_2 Pour les même raisons la contribution sur L_2 est nulle.

En rassemblant toutes ces contributions on trouve

$$\mathcal{F}_c = \underbrace{\int_{A_1} \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) dS}_{=0} + \underbrace{\int_{A_2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) dS}_{=0} + \underbrace{\int_{L_1} \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS}_{=0} + \underbrace{\int_{L_2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) dS}_{=0} = \mathbf{0}$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = \mathcal{M}_c + \mathcal{M}_d$$

soit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{v} dV = \int_{\partial V(t)} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{x} \times \mathbf{g} dV$$

Ici $\mathbf{x} \times \mathbf{v}$ désigne le produit vectoriel du vecteur position \mathbf{x} avec le vecteur vitesse \mathbf{v} . Par le théorème de Reynolds on trouve

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = \mathbf{0}$$

et comme il n'y a pas de force de volume

$$\mathcal{M}_d = \mathbf{0}$$

Il reste donc à vérifier que le moment résultant des forces de contact s'annule

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_c &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS \\ &= \int_{A_1} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) dS + \int_{A_2} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) dS + \int_{L_1} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS + \int_{L_2} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) dS \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

(a) Sur la surface A_1

$$\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) = (r\mathbf{e}_r) \times p(r)\mathbf{e}_z = -rp(r)\mathbf{e}_\theta$$

et par symétrie on déduit directement que

$$\int_{A_1} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) dS = \mathbf{0}$$

(b) Sur la surface A_2

$$\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) = (r\mathbf{e}_r + L\mathbf{e}_z) \times (-p(r)\mathbf{e}_z) = rp(r)\mathbf{e}_\theta$$

et donc

$$\int_{A_2} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) dS = \mathbf{0}$$

(c) Sur la surface L_1

$$\mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = (R_1\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) \times (p(R_1)\mathbf{e}_r - \frac{C}{R_1^2}\mathbf{e}_\theta) = zp(R_1)\mathbf{e}_\theta - \frac{C}{R_1}\mathbf{e}_z + \frac{Cz}{R_1^2}\mathbf{e}_r$$

et par symétrie on déduit que la résultante est alignée avec \mathbf{e}_z

$$\int_{L_1} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} -\frac{C}{R_1} R_1 d\theta dz \mathbf{e}_z = -2\pi LC \mathbf{e}_z$$

(d) Sur la surface L_2 on trouve

$$\int_{L_1} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS = 2\pi LC \mathbf{e}_z$$

En ajoutant chacune des contributions venant de A_1 , A_2 , L_1 et L_2 on trouve

$$\mathbf{M}_d = \mathbf{0} + \mathbf{0} - 2\pi LC \mathbf{e}_z + 2\pi LC \mathbf{e}_z = \mathbf{0}$$

Le moment résultant des forces de contact est bien nul.

4. Puissance des forces de contact

$$\begin{aligned} P &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS \\ P &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS = \int_{A_1} \underbrace{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z)}_{=0} dS + \int_{A_2} \underbrace{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z)}_{=0} dS + \int_{L_1} \underbrace{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r)}_{=-\frac{C}{R_1^2} v_\theta} dS + \\ &\quad \int_{L_2} \underbrace{\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r)}_{=\frac{C}{R_2^2} v_\theta} dS \\ &= - \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{C \dot{\Omega}_1}{R_1} \right) R_1 dz d\theta + \int_0^{2\pi} \int_0^L \left(\frac{C \dot{\Omega}_2}{R_2} \right) R_2 dz d\theta \\ &= 2\pi LC (\dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1) \\ &= 4\pi L \eta \frac{R_1^2 R_2^2 (\dot{\Omega}_2 - \dot{\Omega}_1)^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \end{aligned}$$

5. Conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0$$

ce qui en coordonnées-composantes cylindriques s'écrit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\frac{\rho v_r}{r} + \frac{\partial \rho v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \rho v_z}{\partial z} \right) = 0$$

On trouve

$$0 + (0 + 0 + 0 + 0) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$$

ce qui en coordonnées-composantes cylindriques s'écrit

$$\rho \begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_r \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_\theta \\ (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma})_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_r \\ g_\theta \\ g_z \end{bmatrix}$$

$$\rho \begin{bmatrix} -A^2 r - \frac{B^2}{r^3} - \frac{2AB}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \rho(-A^2 r - \frac{B^2}{r^3} - \frac{2AB}{r}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement : trivialement satisfaite.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

6. Le débit-volume à travers une surface S est

$$\dot{Q} = \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

où \mathbf{n} est la normale unitaire à la surface. Le signe de \dot{Q} dépend du sens choisi pour \mathbf{n} .

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_\theta dz dr \\ &= \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L v_\theta dz dr = \int_{R_1}^{R_2} \int_0^L Ar + \frac{B}{r} dz dr \\ &= \frac{AL}{2}(R_2^2 - R_1^2) + BL \left(\ln \frac{R_2}{R_1} \right) \end{aligned}$$

Solution exercice 7

1. Il s'agit d'un écoulement (stationnaire) axisymétrique rectiligne dans la direction de l'axe du cylindre. Les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission sont des droites parallèles à l'axe. En effet, le problème de Cauchy

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= 0 \\ \frac{d\theta}{dt} &= 0 \\ \frac{dz}{dt} &= A(R^2 - r^2)\end{aligned}$$

avec

$$r^{(l)}(0) = r^*, \theta^{(l)}(0) = \theta^*, z^{(l)}(0) = z^*$$

a pour solution

$$\begin{aligned}r(t) &= r^* \\ \theta(t) &= \theta^* \\ z(t) &= A(R^2 - r^{*2})t + z^*\end{aligned}$$

Il s'agit bien d'un mouvement rectiligne uniforme suivant l'axe du cylindre. L'accélération en représentation eulérienne a pour composantes

$$\begin{bmatrix} a_r \\ a_\theta \\ a_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2Ar & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ A(R^2 - r^2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

L'accélération est naturellement nulle puisque les points matériels sont en mouvement rectiligne uniforme.

2. Gradient de vitesse $\nabla \mathbf{v}$

$$[(\nabla \mathbf{v})_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2Ar \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des vitesses de déformation

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -Ar \\ 0 & 0 & 0 \\ -Ar & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tenseur des vitesses de rotation

$$[\dot{\omega}_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & Ar \\ 0 & 0 & 0 \\ -Ar & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vecteur vitesse de rotation

$$\begin{bmatrix} \dot{\Omega}_r \\ \dot{\Omega}_\theta \\ \dot{\Omega}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Ar \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. On décompose la frontière $\partial V(t)$ du volume matériel $V(t)$ en trois surfaces
- (a) S_1 : section $\{r \leq R, z = 0\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_z$
 - (b) S_2 : surface annulaire $\{r \leq R, z = L\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = \mathbf{e}_z$
 - (c) C : surface cylindrique $\{r = R, 0 \leq z \leq L\}$, de normale unitaire sortante $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$

4. **Conservation de la masse :**

Il faut vérifier

$$\frac{d}{dt} \mathcal{M} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0$$

Le théorème de Reynolds permet de calculer la variation instantanée d'une intégrale sur un volume matériel

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV &= \int_{V(t)} \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t}}_{=0} dV + \int_{\partial V(t)} (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} (\rho \mathbf{v}) \cdot (-\mathbf{e}_z) dS + \int_{S_2} (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_z dS + \int_C (\rho \mathbf{v}) \cdot \mathbf{e}_r dS \\ &= \underbrace{-\rho \int_{S_1} v_z dS}_{=0} + \underbrace{\rho \int_{S_2} v_z dS}_{=0} + \underbrace{\rho \int_C v_r dS}_{=0} \end{aligned}$$

Conservation de la quantité de mouvement :

Il faut vérifier

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P} = \mathcal{F}_c + \mathcal{F}_d$$

soit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV = \int_{\partial V(t)} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV$$

En appliquant le théorème de Reynolds on trouve

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{v} dV &= \int_{V(t)} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v})}_{=0} dV + \int_{\partial V(t)} (\rho \mathbf{v} \mathbf{v}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \underbrace{-\rho \int_{S_1} \mathbf{v} v_z dS}_{=0} + \underbrace{\rho \int_{S_2} \mathbf{v} v_z dS}_{=0} + \underbrace{\rho \int_C \mathbf{v} v_r dS}_{=0} \end{aligned}$$

Il n'y a pas de force de volume $\rho \mathbf{g}$

$$\mathcal{F}_d = \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV = \mathbf{0}$$

Il reste donc à vérifier que la résultante des forces de contact est nulle pour que la loi de conservation de la quantité de mouvement soit respectée sur $V(t)$

$$\mathcal{F}_c = \int_{S_1} \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) dS + \int_C \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) dS$$

Détaillons chacune de ces contributions.

(a) Sur S_1

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, 0; -\mathbf{e}_z) dS = \int_{S_1} \boldsymbol{\sigma}^T(r, \theta, 0) \cdot (-\mathbf{e}_z) dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(\frac{B}{2} r \mathbf{e}_r + p(0) \mathbf{e}_z \right) r d\theta dr$$

(b) Sur S_2

$$\int_{S_2} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, L; -\mathbf{e}_z) dS = \int_{S_2} \boldsymbol{\sigma}^T(r, \theta, L) \cdot (\mathbf{e}_z) dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} \left(-\frac{B}{2} r \mathbf{e}_r - p(L) \mathbf{e}_z \right) r d\theta dr$$

La somme des contributions sur S_1 et S_2 donne

$$\int_{S_1} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, 0; -\mathbf{e}_z) dS + \int_{S_2} \boldsymbol{\tau}(r, \theta, L; -\mathbf{e}_z) dS = \pi R^2 (p(0) - p(L)) \mathbf{e}_z$$

(c) Sur C

$$\begin{aligned} \int_C \boldsymbol{\tau}(R, \theta, z; \mathbf{e}_r) dS &= \int_C \boldsymbol{\sigma}^T(R, \theta, z) \cdot (\mathbf{e}_r) dS = \int_0^L \int_0^{2\pi} \left(-p(z) \mathbf{e}_r - \frac{B}{2} R \mathbf{e}_z \right) R d\theta dz \\ &= -\pi R^2 B L \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

Comme $p(z) = -Bz + p_0$ on trouve

$$\mathcal{F}_c = \mathbf{0}$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = \mathcal{M}_c + \mathcal{M}_d$$

Développement analogue au cas précédent.

5. Puissance des forces de contact :

$$\begin{aligned} P &= \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS = \int_{\partial V(t)} \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{S_1} \left(\frac{B}{2} r \mathbf{e}_r + p(0) \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_z \mathbf{e}_z) dS + \int_{S_2} \left(-\frac{B}{2} r \mathbf{e}_r - p(L) \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_z \mathbf{e}_z) dS + \\ &\quad \int_C \left(-p(z) \mathbf{e}_r - \frac{B}{2} R \mathbf{e}_z \right) \cdot (v_z \mathbf{e}_z) dS \\ &= \int_{S_1} p(0) v_z dS + \int_{S_2} (-p(L) v_z) dS + \int_C \underbrace{v_z}_{=0 \text{ sur } C} dS \\ &= (p(0) - p(L)) \int_0^R \int_0^{2\pi} A(R^2 - r^2) r d\theta dr \\ &= (p(0) - p(L)) \frac{A\pi R^4}{2} \end{aligned}$$

6. Conservation de la masse :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$$

Cette équation se réduit ici à

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} A(R^2 - r^2) = 0$$

Conservation de la quantité de mouvement :

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Conservation du moment de la quantité de mouvement : trivialement satisfaite.

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^T$$

7.

$$\begin{aligned} \dot{Q} &= \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS = \int_0^R \int_0^{2\pi} (v_r \mathbf{e}_r + v_\theta \mathbf{e}_\theta + v_z \mathbf{e}_z) \cdot \mathbf{e}_z r d\theta dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} v_z r d\theta dr = \int_0^R \int_0^{2\pi} A(R^2 - r^2) r d\theta dr \\ &= 2\pi A \left(\frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) = \frac{\pi A R^4}{2} \end{aligned}$$

Solution exercice 8

Traction simple

1. Puisque l'expression du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ dans la base \mathbf{e}_i est diagonale on en déduit directement que ces vecteurs de base forment un système de directions principales orthonormées. Les contraintes principales associées se trouvent sur la diagonale

$$\sigma^I = S, \quad \sigma^{II} = \sigma^{III} = 0$$

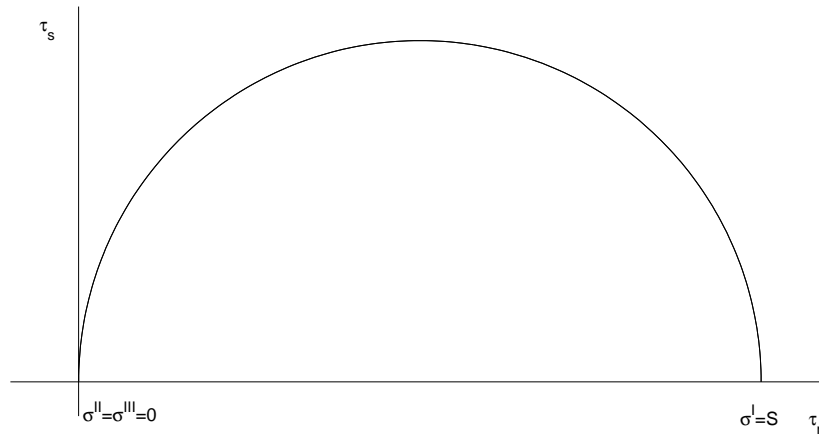
La direction principale associée à σ_I est

$$\mathbf{m}^I = \mathbf{e}_3$$

Pour les directions principales associées à $\sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$ on peut bien sûr prendre

$$\mathbf{m}^{II} = \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{m}^{III} = \mathbf{e}_1$$

Le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte d'un point du barreau est représenté ci-dessous



Comme les contraintes principales σ^{II} et σ^{III} sont confondues, le cercle correspondant est dégénéré en un point.

2. La contrainte de traction maximale locale en (x_1, x_2, x_3) est $\sigma^I = S$. Comme l'état de contrainte est uniforme dans le barreau, le maximum de cette contrainte de traction maximale vaut S et est réalisé en tous les points du barreau. Il y aura rupture si S dépasse σ_f

$$\max_{\text{barreau}} \sigma_I = S \geq \sigma_f$$

La surface de propagation est la surface qui a pour normale unitaire la direction principale associée à σ^I , soit $\mathbf{m}^I = \mathbf{e}_3$. Il s'agit donc d'une section du barreau.

3. D'après Tresca, la déformation plastique commence lorsque la tension maximale de cisaillement atteint la valeur $\frac{\sigma_Y}{2}$ en un point du barreau. La tension de cisaillement maximum locale est $\frac{1}{2}(\sigma^I - \sigma^{III}) = \frac{S}{2}$. Comme l'état de contrainte est uniforme dans le barreau, le maximum de cette contrainte de cisaillement maximale vaut $\frac{S}{2}$ et est réalisé en tous les points du barreau. Il y aura entrée en plasticité si $\frac{S}{2}$ dépasse $\frac{\sigma_Y}{2}$

$$\max_{\text{barreau}} \frac{(\sigma^I - \sigma^{III})}{2} = \frac{S}{2} \geq \frac{\sigma_Y}{2}$$

4. On commence par rechercher les composantes du tenseur des rotations infinitésimales ω . Puisque ce tenseur est antisymétrique (c.-à-d. $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$), on a

$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = 0$$

et

$$\omega_{12} = -\omega_{21}, \quad \omega_{23} = -\omega_{32}, \quad \omega_{31} = -\omega_{13}$$

Il suffit donc de ne calculer que les composantes $\omega_{12}, \omega_{23}, \omega_{31}$ pour connaître complètement le tenseur des rotations infinitésimales.

Comme les différentielles des composantes ω_{ij} sont

$$d\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} \right) dx_k$$

et que

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}d\omega_{12} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_1} \right) dx_k \\d\omega_{23} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_2} \right) dx_k \\d\omega_{31} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_3} \right) dx_k\end{aligned}$$

En développant, on trouve

$$\begin{aligned}d\omega_{12} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_1} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_1} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_1} \right) dx_3 \\&= 0 dx_1 + 0 dx_2 + 0 dx_3\end{aligned}$$

ce qui donne $\omega_{12} = 0$ puisque $\omega_{12}(0, 0, 0) = 0$.

Les différentielles des deux autres composantes recherchées sont

$$\begin{aligned}d\omega_{23} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{21}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_2} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{22}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_2} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{23}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_2} \right) dx_3 \\&= 0 dx_1 + 0 dx_2 + 0 dx_3\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}d\omega_{31} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{31}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{11}}{\partial x_3} \right) dx_1 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{32}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{12}}{\partial x_3} \right) dx_2 + \left(\frac{\partial \varepsilon_{33}}{\partial x_1} - \frac{\partial \varepsilon_{13}}{\partial x_3} \right) dx_3 \\&= 0 dx_1 + 0 dx_2 + 0 dx_3\end{aligned}$$

Elles donnent $\omega_{23} = 0$ et $\omega_{31} = 0$ puisque $\omega_{23}(0, 0, 0) = 0$ et $\omega_{31}(0, 0, 0) = 0$.

On peut maintenant écrire les différentielles des composantes du champ de déplacement u_i puisque

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

Celles-ci sont

$$\begin{aligned}du_1 &= -\frac{\nu S}{E} dx_1 \\du_2 &= -\frac{\nu S}{E} dx_2 \\du_3 &= \frac{S}{E} dx_3\end{aligned}$$

En intégrant, et tenant compte des conditions $u_i(0, 0, 0) = 0$ on obtient le résultat

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{\nu S x_1}{E} \\u_2 &= -\frac{\nu S x_2}{E} \\u_3 &= \frac{S}{E} x_3\end{aligned}$$

Le champ vecteur de déplacement a donc pour expression

$$\mathbf{u} = -\frac{\nu S x_1}{E} \mathbf{e}_1 - \frac{\nu S x_2}{E} \mathbf{e}_2 + \frac{S x_3}{E} \mathbf{e}_3$$

5. Finalement, le vecteur de rotation locale s'obtient directement par inspection des composantes ω_{ij} du tenseur des rotations infinitésimales puisque

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Flexion pure

1. L'expression du tenseur des contraintes est ici aussi diagonale dans la base \mathbf{e}_i . Les contraintes principales sont donc

$$\sigma^I = \alpha x_1, \quad \sigma^{II} = \sigma^{III} = 0 \quad \text{pour } x_1 \geq 0$$

et

$$\sigma^I = 0, \quad \sigma^{II} = \sigma^{III} = \alpha x_1 \quad \text{pour } x_1 \leq 0$$

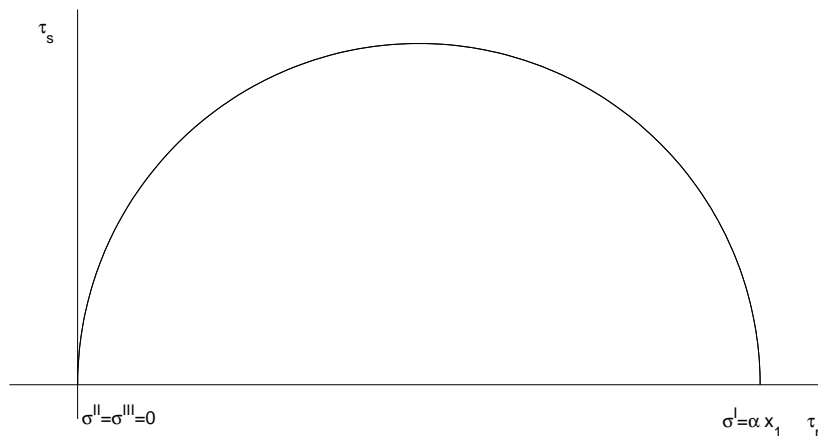
(il faut bien faire cette distinction puisque, par convention, on classe les contraintes principales dans l'ordre décroissant : $\sigma^I \geq \sigma^{II} \geq \sigma^{III}$).

Les directions principales associées sont

$$\mathbf{m}^I = \mathbf{e}_3, \quad \mathbf{m}^{II} = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{m}^{III} = \mathbf{e}_2 \quad \text{pour } x_1 \geq 0$$

$$\mathbf{m}^I = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{m}^{II} = \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{m}^{III} = \mathbf{e}_3 \quad \text{pour } x_1 \leq 0$$

On a veillé à ce que la base orthonormée $(\mathbf{m}^I, \mathbf{m}^{II}, \mathbf{m}^{III})$ soit d'orientation directe. Le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte d'un point du domaine $x_1 \geq 0$ du barreau est représenté ci-dessous



Comme les contraintes principales σ^{II} et σ^{III} sont confondues, le cercle correspondant est dégénéré en un point.

2. La contrainte de traction maximale locale en (x_1, x_2, x_3) est αx_1 si $x_1 \geq 0$ et 0 si $x_1 \leq 0$. Le maximum de cette contrainte de traction maximale vaut

$$\max_{\text{barreau}} \sigma_I = \alpha R$$

et est réalisé en tous les points de la ligne matérielle $x_1 = R$ (cette ligne se trouve sur la surface extérieure du barreau). Il y aura rupture si αR dépasse σ_f . La surface de propagation est la surface qui a pour normale unitaire la direction principale associée à σ^I , soit $\mathbf{m}^I = \mathbf{e}_3$.

3. La contrainte de cisaillement maximale locale en (x_1, x_2, x_3) est $\frac{1}{2}(\sigma^I - \sigma^{III}) = \frac{\alpha|x_1|}{2}$. Le maximum de cette contrainte de cisaillement maximale vaut

$$\max_{\text{barreau}} \frac{\alpha|x_1|}{2} = \frac{\alpha R}{2}$$

Ce maximum est réalisé en tous les points des lignes matérielles $x_1 = R$ et $x_1 = -R$ (ces lignes se trouvent sur la surface extérieure du barreau). Le critère de Tresca prédit l'entrée en plasticité si $\frac{\alpha R}{2}$ dépasse $\frac{\sigma_y}{2}$.

4. Les différentielles des composantes ω_{ij} , toujours obtenues par la relation

$$d\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

sont

$$d\omega_{12} = (0 - 0) dx_1 + \left(0 + \frac{\alpha\nu}{E} \right) dx_2 + (0 - 0) dx_3$$

$$d\omega_{23} = (0 - 0) dx_1 + (0 - 0) dx_2 + (0 - 0) dx_3$$

$$d\omega_{31} = (0 - 0) dx_1 + (0 - 0) dx_2 + \left(\frac{\alpha}{E} - 0 \right) dx_3$$

L'intégration de ces différentielles, tenant compte des conditions $\omega_{ij}(0, 0, 0) = 0$, donne

$$\omega_{12} = \frac{\alpha\nu}{E} x_2$$

$$\omega_{23} = 0$$

$$\omega_{31} = \frac{\alpha}{E} x_3$$

Les différentielles des composantes du champ de déplacement u_i

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

Celles-ci sont

$$du_1 = -\frac{\alpha\nu x_1}{E} dx_1 + \frac{\alpha\nu x_2}{E} dx_2 - \frac{\alpha x_3}{E} dx_3$$

$$du_2 = -\frac{\alpha\nu x_2}{E} dx_1 - \frac{\alpha\nu x_1}{E} dx_2 = -\frac{\alpha\nu}{E} d(x_1 x_2)$$

$$du_3 = \frac{\alpha x_3}{E} dx_1 + \frac{\alpha x_1}{E} dx_3 = \frac{\alpha}{E} d(x_3 x_1)$$

L'intégration de ces différentielles tenant compte que $u_i(0, 0, 0) = 0$ donne

$$u_1 = -\frac{\alpha(\nu x_1^2 - \nu x_2^2 + x_3^2)}{2E}$$

$$u_2 = -\frac{\alpha\nu x_1 x_2}{E}$$

$$u_3 = \frac{\alpha x_1 x_3}{E}$$

Le champ vecteur de déplacement a donc pour expression

$$\mathbf{u} = -\frac{\alpha(\nu x_1^2 - \nu x_2^2 + x_3^2)}{2E} \mathbf{e}_1 - \frac{\alpha \nu x_1 x_2}{E} \mathbf{e}_2 + \frac{\alpha x_1 x_3}{E} \mathbf{e}_3$$

5. Finalement les composantes du vecteur de rotation locale données par

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj}$$

sont

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\alpha}{E} x_3 \\ -\frac{\alpha \nu}{E} x_2 \end{bmatrix}$$

Torsion

1. Le fait de travailler en coordonnées-composantes cylindriques ne change en rien la manière de procéder, il faut juste garder à l'esprit que la base est locale.

Les contraintes principales sont racines du polynôme caractéristique de σ

$$\det(\sigma - \sigma \delta) = -\sigma^3 + (\alpha r)^2 \sigma = -\sigma(\sigma^2 - (\alpha r)^2) = 0$$

$$\implies \sigma^I = \alpha r, \quad \sigma^{II} = 0, \quad \sigma^{III} = -\alpha r$$

Les directions principales associées à une contrainte principale σ sont solutions du système

$$\sigma_{ji} m_j = \sigma m_i$$

soit encore

$$(\sigma_{ji} - \sigma \delta_{ij}) m_j = 0$$

Puisqu'on souhaite construire une base orthonormée de vecteurs propres on exige de plus que

$$m_i m_i = 1$$

Les directions principales associées à σ^I satisfont le système d'équations

$$\begin{bmatrix} -\alpha r & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha r & \alpha r \\ 0 & \alpha r & -\alpha r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_r^I \\ m_\theta^I \\ m_z^I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ces équations sont vérifiées si

$$\begin{cases} m_r^I = 0 \\ m_\theta^I = m_z^I \end{cases}$$

Comme on exige que

$$m_r^I m_r^I + m_\theta^I m_\theta^I + m_z^I m_z^I = 1$$

on trouve

$$2m_\theta^I m_\theta^I = 1$$

donc

$$m_\theta^I = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$$

En choisissant le signe +, on obtient

$$\mathbf{m}^I = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z$$

Le système d'équations vérifiées par les directions principales associées à σ^{II} est

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha r \\ 0 & \alpha r & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_r^{II} \\ m_\theta^{II} \\ m_z^{II} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m_\theta^{II} = 0 \\ m_z^{II} = 0 \end{cases}$$

Comme il faut que

$$m_r^{II} m_r^{II} + m_\theta^{II} m_\theta^{II} + m_z^{II} m_z^{II} = 1$$

on trouve

$$m_r^{II} m_r^{II} = 1$$

donc

$$m_r^I = \pm 1$$

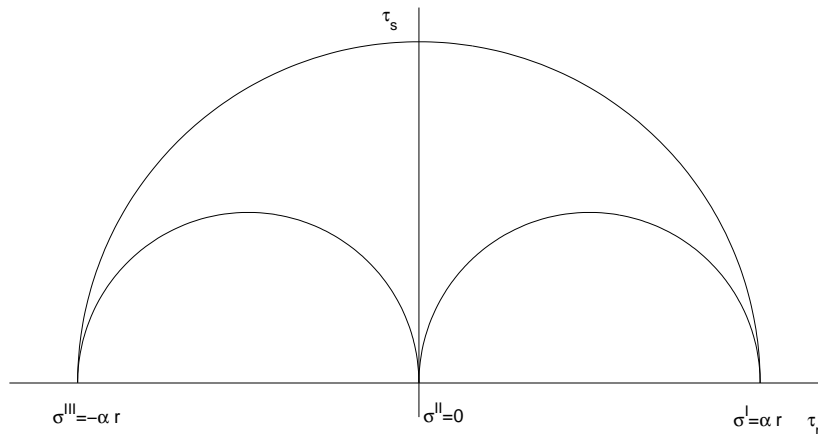
En choisissant le signe +, on obtient

$$\mathbf{m}^{II} = \mathbf{e}_r$$

Il n'est pas nécessaire de résoudre un système d'équations pour déterminer la dernière direction principale. Comme on sait que les directions principales associées à des contraintes principales différentes sont nécessairement orthogonales on prend

$$\mathbf{m}^{III} = \mathbf{m}^I \times \mathbf{m}^{II} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z\right) \times \mathbf{e}_r = -\frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_\theta$$

(\mathbf{m}^{III} est normé puisque \mathbf{m}^I et \mathbf{m}^{II} le sont et la base obtenue est d'orientation directe)
Le diagramme de Mohr correspondant à l'état de contrainte d'un point de coordonnées (r, θ, z) est représenté ci-dessous



2. La contrainte de traction maximum locale en (r, θ, z) est $\sigma^I = \alpha r$. La plus grande valeur de cette contrainte de traction dans le barreau vaut

$$\max_{\text{barreau}} \sigma_I = \alpha R$$

et est atteinte par tous les points sur la surface du barreau. Il y aura rupture si

$$\alpha R \geq \sigma_f$$

La surface de propagation est la surface qui a pour normale unitaire la direction principale associée à σ_I , soit $\mathbf{m}_I = \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_\theta + \frac{\sqrt{2}}{2}\mathbf{e}_z$.

3. La contrainte de cisaillement maximum locale en (r, θ, z) est $\frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III}) = \alpha r$. La plus grande valeur de cette contrainte de cisaillement dans le barreau vaut

$$\max_{\text{barreau}} \alpha r = \alpha R$$

et est atteinte par tous les points sur la surface du barreau.

4. On exprime d'abord les composantes du tenseur des déformations infinitésimales ε dans le repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) pour pouvoir appliquer la méthodologie suivie dans les deux exemples précédents. La transformation de coordonnées bien connue est

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \theta \\ x_2 &= r \sin \theta \\ x_3 &= z \end{aligned}$$

et la matrice de changement de base, de la base locale cylindrique vers la base cartésienne, est obtenue par transposition de la matrice du changement de base inverse, c.-à-d. de la base cartésienne vers la base locale cylindrique

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Effectuant le changement de coordonnées et appliquant la formule de changement de base

$$[\varepsilon_{ij}] = \mathcal{A}[\varepsilon_{kl}^c]\mathcal{A}^T$$

on obtient

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\alpha x_2 \frac{1+\nu}{E} \\ 0 & 0 & \alpha x_1 \frac{1+\nu}{E} \\ -\alpha x_2 \frac{1+\nu}{E} & \alpha x_1 \frac{1+\nu}{E} & 0 \end{bmatrix}$$

Ceci fait, on peut maintenant écrire les différentielles des composantes ω_{ij}

$$d\omega_{12} = 0dx_1 + 0dx_2 + -2\alpha \frac{1+\nu}{E} dx_3$$

$$d\omega_{23} = \alpha \frac{1+\nu}{E} dx_1 - 0dx_2 + 0dx_3$$

$$d\omega_{31} = 0dx_1 + \alpha \frac{1+\nu}{E} dx_2 + 0dx_3$$

Celles-ci donnent, sachant que $\omega_{ij}(0, 0, 0) = 0$,

$$\begin{aligned}\omega_{12} &= -2\frac{1+\nu}{E}\alpha x_3 \\ \omega_{23} &= \alpha\frac{1+\nu}{E}x_1 \\ \omega_{31} &= \alpha\frac{1+\nu}{E}x_2\end{aligned}$$

Il reste à écrire les différentielles des composantes du champ de déplacement u_i

$$\begin{aligned}du_1 &= 0 dx_1 - 2\alpha x_3 \frac{1+\nu}{E} dx_2 - 2\alpha x_2 \frac{1+\nu}{E} dx_3 \\ du_2 &= 2\alpha x_3 \frac{1+\nu}{E} dx_1 + 0 dx_2 + 2\alpha x_1 \frac{1+\nu}{E} dx_3 \\ du_3 &= 0 dx_1 + 0 dx_2 + 0 dx_3\end{aligned}$$

En intégrant, et tenant compte que $u_i(0, 0, 0) = 0$ on obtient le résultat

$$\begin{aligned}u_1 &= -2\alpha x_2 x_3 \frac{1+\nu}{E} \\ u_2 &= 2\alpha x_1 x_3 \frac{1+\nu}{E} \\ u_3 &= 0\end{aligned}$$

Ce résultat exprimé dans le système de coordonnées-composantes cylindriques est

$$\begin{aligned}u_r &= 0 \\ u_\theta &= 2\alpha r z \frac{1+\nu}{E} \\ u_z &= 0\end{aligned}$$

Pour revenir dans ce système, on a utilisé le changement de coordonnées et la matrice de changement de base inverses. Le champ vecteur de déplacement a donc pour expression

$$\mathbf{u} = 2\alpha r z \frac{1+\nu}{E} \mathbf{e}_\theta$$

5. Finalement les composantes du vecteur de rotation locale sont

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj}$$

soit

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \frac{1+\nu}{E} x_1 \\ -\alpha \frac{1+\nu}{E} x_2 \\ 2\alpha \frac{1+\nu}{E} x_3 \end{bmatrix}$$

Dans le système de coordonnées-composantes cylindrique on a

$$\begin{bmatrix} \Omega_r \\ \Omega_\theta \\ \Omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\alpha \frac{1+\nu}{E} r \\ 0 \\ 2\alpha \frac{1+\nu}{E} z \end{bmatrix}$$

Solution exercice 9

1. Vu que l'anneau n'est pas soumis à des forces de volume et qu'il est immobile après déformation, l'équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

L'unique équation non-triviale découlant de ce système est :

$$-2\frac{A}{r^3} + \frac{\frac{A}{r^2} + B + \frac{A}{r^2} - C}{r} = 0$$

impliquant la relation suivante entre C et B :

$$C = B$$

2. (a) La matrice représentant le tenseur des contraintes étant diagonale, les couples de valeurs propres-vecteurs propres sont donc :

$$\left(\frac{A}{r^2} + B, \mathbf{e}_r\right), \quad \left(-\frac{A}{r^2} + B, \mathbf{e}_\theta\right), \quad (0, \mathbf{e}_z)$$

Il est important de distinguer les 3 cas suivants :

- Si $r < \sqrt{\frac{A}{B}}$: $\sigma^{III} = -\frac{A}{r^2} + B$, $\sigma^{II} = 0$, $\sigma^I = \frac{A}{r^2} + B$
- Si $r = \sqrt{\frac{A}{B}}$: $\sigma^{III} = \sigma^{II} = 0$, $\sigma^I = \frac{A}{r^2} + B$
- Si $r > \sqrt{\frac{A}{B}}$: $\sigma^{III} = 0$, $\sigma^{II} = -\frac{A}{r^2} + B$, $\sigma^I = \frac{A}{r^2} + B$

- (b) Un matériau fragile se brisera si :

$$\sigma_f < \tau_n^{\max} = \max_{\text{Anneau}} (\sigma^I) = \max_{R_i \leq r \leq R_e} \left(\frac{A}{r^2} + B\right) = \frac{A}{R_i^2} + B$$

où σ_f est la contrainte de rupture fragile. La brisure s'initiera donc en $r = R_i$, et la direction de sa surface de propagation sera $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$.

- (c) Un matériau ductile entrera en plasticité si :

$$\frac{\sigma_Y}{2} < \tau_s^{\max} = \max_{\text{Anneau}} \left(\frac{\sigma^I - \sigma^{III}}{2}\right)$$

où σ_Y est la contrainte limite d'entrée en plasticité.

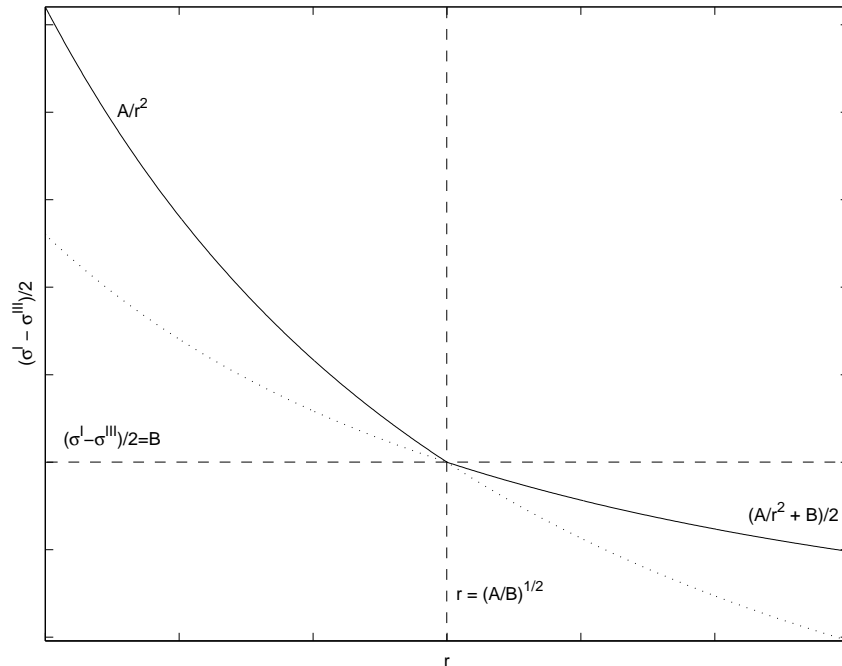
Pour $r \geq \sqrt{\frac{A}{B}}$ on a

$$\frac{\sigma^I - \sigma^{III}}{2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{r^2} + B\right),$$

tandis que pour $r \leq \sqrt{\frac{A}{B}}$ on a

$$\frac{\sigma^I - \sigma^{III}}{2} = \frac{A}{r^2}$$

La figure ci-dessous décrit l'évolution de $\frac{\sigma^I - \sigma^{III}}{2}$ en fonction de r .



Il y a deux cas à distinguer :

- Si $R_i \geq \sqrt{\frac{A}{B}} : \tau_s^{\max} = \frac{1}{2} \left(\frac{A}{R_i^2} + B \right)$
- Si $R_i \leq \sqrt{\frac{A}{B}} : \tau_s^{\max} = \frac{A}{R_i^2}$

Dans tous les cas, l'entrée en plasticité s'initiera en $r = R_i$.

3. (a) Le vecteur normal sortant à la surface $r = R_e$ est $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$. La densité de force $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r)$ est donc donnée par l'expression suivante :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r = \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) \mathbf{e}_r$$

La composante radiale de ce vecteur étant constante, on peut directement en déduire par symétrie que l'intégrale sur la surface sera nulle.

Formellement, la résultante \mathbf{F} de la densité de force s'obtient en intégrant cette densité sur la surface $r = R_e$:

$$\mathbf{F} = \int_0^e \int_0^{2\pi} \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) \mathbf{e}_r R_e d\theta dz,$$

or

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2,$$

d'où

$$\mathbf{F} = \int_0^e \int_0^{2\pi} \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) R_e d\theta dz = \mathbf{0}$$

- (b) La densité de moment \mathbf{m} exercée sur la surface $r = R_e$ est égale à :

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r)$$

Si on calcule le moment par rapport à l'origine du repère, le vecteur \mathbf{x} a pour expression :

$$\mathbf{x} = R_e \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z$$

La densité de moment vaut donc :

$$\mathbf{m} = (R_e \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z) \times \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) \mathbf{e}_r = z \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) \mathbf{e}_\theta$$

La résultante \mathbf{M} de la densité de moment s'obtient en intégrant cette densité sur la surface $r = R_e$:

$$\mathbf{M} = \int_0^e \int_0^{2\pi} z \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) \mathbf{e}_\theta R_e d\theta dz,$$

or

$$\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2,$$

d'où

$$\mathbf{M} = \int_0^e \int_0^{2\pi} z \left(\frac{A}{R_e^2} + B \right) (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) R_e d\theta dz = \mathbf{0}$$

- (c) La densité de force exercée par un milieu A sur un milieu B s'obtient en considérant la normale sortante au milieu B , qui pointe donc vers le milieu A . Dans notre cas, la densité de force exercée par la pièce définie par $\theta \leq \pi$ sur la pièce définie par $\theta \geq \pi$ s'obtient donc en considérant la normale sortante à la seconde pièce, c'est-à-dire $\mathbf{n} = -\mathbf{e}_\theta$:

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_\theta) = \boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{e}_\theta) = \left(\frac{A}{r^2} - B \right) \mathbf{e}_\theta$$

La résultante \mathbf{F} de la densité de force s'obtient en intégrant cette densité sur la surface $\theta = \pi$:

$$\mathbf{F} = \int_{R_i}^{R_e} \int_0^e \left(\frac{A}{r^2} - B \right) \mathbf{e}_\theta dz dr,$$

or

$$\mathbf{e}_\theta(\theta = \pi) = -\sin \pi \mathbf{e}_1 + \cos \pi \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2,$$

d'où

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= - \int_{R_i}^{R_e} \int_0^e \left(\frac{A}{r^2} - B \right) \mathbf{e}_2 dz dr, \\ &= e \left[A \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_i} \right) + B(R_e - R_i) \right] \mathbf{e}_2 \end{aligned}$$

4. Vu que la croix est alignée avec les vecteurs $\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta$ et $-\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta$, on va exprimer les composantes du tenseur ε_{ij} dans une nouvelle base dont les vecteurs \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont alignés avec les bras de la croix. Pour ce faire, on effectue une rotation de $\pi/4$ de la base. La matrice de changement de base correspondante est donc :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

On obtient alors les nouvelles composantes du tenseur ε_{ij} dans cette nouvelle base, évaluées en $r = \frac{R_i + R_e}{2}$:

$$[\varepsilon'_{ij}] = \mathcal{A}[\varepsilon_{ij}]\mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} E & \frac{4D}{(R_e + R_i)^2} & 0 \\ \frac{4D}{(R_e + R_i)^2} & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les allongements des fibres alignées initialement avec $\mathbf{e}_r + \mathbf{e}_\theta$ et $\mathbf{e}_r - \mathbf{e}_\theta$ seront égaux à $\varepsilon'_{11}\delta s_0 = \varepsilon'_{22}\delta s_0 = E\delta s_0$, avec δs_0 la longueur initiale de chacune des fibres. D'autre part, les deux fibres se rapprocheront d'un angle $2\varepsilon'_{12} = \frac{8D}{(R_e + R_i)^2}$ lors de la déformation.

5. Le tenseur des déformations infinitésimales est défini comme suit :

$$\varepsilon = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u})$$

Cette relation s'écrit sous forme matricielle de la manière suivante :

$$\begin{bmatrix} -\frac{D}{r^2} + E & 0 & 0 \\ 0 & \frac{D}{r^2} + E & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ * & \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} & \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \\ * & * & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

La composante ε_{rr} indique que la composante radiale de \mathbf{u} dépend nécessairement de r . D'autre part au mode de rotation rigide correspond le déplacement $\mathbf{u}_{\text{rotation}} = \alpha r \mathbf{e}_\theta$, tandis qu'au mode de translation rigide correspond le déplacement $\mathbf{u}_{\text{translation}} = \beta_1 \mathbf{e}_1 + \beta_2 \mathbf{e}_2 + \beta_3 \mathbf{e}_3$. On fait alors l'hypothèse suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= f(r)\mathbf{e}_r + \mathbf{u}_{\text{rotation}} + \mathbf{u}_{\text{translation}} \\ &= f(r)\mathbf{e}_r + \alpha r \mathbf{e}_\theta + (\beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta)\mathbf{e}_r + (-\beta_1 \sin \theta + \beta_2 \cos \theta)\mathbf{e}_\theta + \beta_3 \mathbf{e}_z \\ &= (f(r) + \beta_1 \cos \theta + \beta_2 \sin \theta)\mathbf{e}_r + (\alpha r - \beta_1 \sin \theta + \beta_2 \cos \theta)\mathbf{e}_\theta + \beta_3 \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

On peut remarquer que cette expression du champ de déplacement vérifie l'équation liée à $\varepsilon_{r\theta}$:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) = 0$$

On doit alors résoudre les deux équations non-triviales restantes :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} = f'(r) &= -\frac{D}{r^2} + E \\ \frac{u_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = f(r) &= \frac{D}{r^2} + E \end{aligned}$$

La deuxième équation fournit directement l'expression de $f(r)$:

$$f(r) = \frac{D}{r} + Er,$$

et cette solution vérifie bien la première équation. L'hypothèse faite sur le champ de déplacement est donc valide. On demande d'annuler les modes de déplacements rigides,

c'est-à-dire qu'il faut imposer que $\alpha = \beta_i = 0$. On obtient alors le champ de déplacement demandé :

$$\mathbf{u} = \left(\frac{D}{r} + Er \right) \mathbf{e}_r$$

Les rayons intérieur et extérieur de la pièce après déformation sont alors :

$$\begin{aligned} R_i^{\text{new}} &= R_i + u_r(r = R_i) = R_i(1 + E) + \frac{D}{R_i} \\ R_e^{\text{new}} &= R_e + u_r(r = R_e) = R_e(1 + E) + \frac{D}{R_e} \end{aligned}$$

Solution exercice 10

1. Les dimensions physiques de U et S sont respectivement Lt^{-1} et MLt^{-2} où M , L et t sont les dimensions physiques de la masse, la longueur et le temps. Dans le Système International, les unités de ces grandeurs sont $[U] = \text{ms}^{-1}$ et $[S] = \text{kg ms}^{-2}$.
2. On procède en deux étapes : d'une part on fait tendre r vers l'infini et d'autre part on exprime le champ dans un repère cartésien. On obtient successivement :

$$r \rightarrow \infty \Rightarrow \begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \cos \phi \\ -U \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

et comme

$$\begin{cases} \mathbf{e}_r &= \sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \phi \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\phi &= \cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_\theta &= -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

on trouve finalement : $\mathbf{v} = U \mathbf{e}_3$.

A l'infini, l'écoulement est uniforme, orienté selon le vecteur \mathbf{e}_3 . C'est la présence de la sphère qui perturbe cet écoulement uniforme.

3. La contrainte cinématique exprimant qu'un fluide ne peut s'écouler à travers une surface donnée est que sa vitesse ne peut avoir de composante normale sur celle-ci, elle doit y être tangente. Cette contrainte s'écrit simplement

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{où } \mathbf{n} \text{ désigne la normale locale à la surface}$$

Dans le cas étudié, la normale locale à la sphère est partout $\mathbf{n} = \mathbf{e}_r$. On vérifie qu'en $r = R$

$$v_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_r = v_r(R, \phi, \theta) = 0$$

Le fluide ne traverse donc pas la sphère.

4. Un fluide incompressible et indilatable à une masse volumique constante ρ_0 quelque soient les conditions de température et de pression

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \rho_0 > 0$$

avec pour conséquence que son champ de vitesse est soumis à la contrainte cinématique suivante

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

En effet, la loi de conservation de la masse écrite sous sa forme locale

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

entraîne que

$$\rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

et puisque $\rho = \rho_0 (> 0)$ on a le résultat annoncé.

La divergence du champ de vitesse donné vaut

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{3R}{r^2} \cos \phi U$$

Il ne peut donc pas s'agir d'un fluide incompressible et indilatable puisque $\nabla \cdot \mathbf{v}$ n'est pas identiquement nul.

5. Soit $\boldsymbol{\tau}_{f \rightarrow s}$, la densité de forces de contact exercées par le fluide sur la sphère

$$\boldsymbol{\tau}_{f \rightarrow s} = \boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{n}_{s \rightarrow f}$$

où $\mathbf{n}_{s \rightarrow f}$ désigne la normale unitaire sortante, de la sphère vers le fluide. Comme $\mathbf{n}_{s \rightarrow f} = \mathbf{e}_r$ on a

$$\boldsymbol{\tau}_{f \rightarrow s}(r = R) = \boldsymbol{\sigma}(R, \phi, \theta)^T \cdot \mathbf{e}_r = \frac{S}{R^2} \cos \phi \mathbf{e}_r$$

La densité de moment des forces de contact par rapport à l'origine est $\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}$ (le vecteur position $\mathbf{x} = R \mathbf{e}_r$ est le bras de levier par rapport à l'origine). La densité de moment est par conséquent nulle puisque $\boldsymbol{\tau}$ n'a également qu'une composante non nulle selon \mathbf{e}_r et $\mathbf{e}_r \times \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$.

La résultante des forces de contact est

$$\mathcal{F}_c = \int_S \boldsymbol{\tau}_{f \rightarrow s} dS = \int_S \frac{S}{R^2} \cos \phi \mathbf{e}_r dS$$

Comme le vecteur \mathbf{e}_r de la base locale sphérique varie sur la surface d'intégration on ne peut le sortir de l'intégrale. On passe alors dans le repère cartésien où les vecteurs de base sont constants. En substituant les vecteurs $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta$ de la base locale par leurs expressions dans la base cartésienne (voir réponse 2 de l'exercice) on obtient :

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{S}{R^2} \cos \phi (\sin \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 + \cos \phi \mathbf{e}_3) R^2 \sin \phi d\theta d\phi = \frac{4\pi}{3} S \mathbf{e}_3$$

Vu l'expression de la densité de forces de contact, on pouvait s'attendre à ce que seule la composante suivant \mathbf{e}_3 soit non nulle et ne calculer que l'intégrale correspondante. La résultante des moments des forces de contact est évidemment nulle puisque la densité de moment est nulle sur toute la sphère.

6. Pour que le fluide glisse sur la sphère, il faut que sa vitesse tangentielle \mathbf{v}^s soit non nulle à la surface. La vitesse tangentielle se calcule par

$$\mathbf{v}^s = \mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})\mathbf{n} = \mathbf{v} - v_r \mathbf{e}_r = v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_\theta \mathbf{e}_\theta$$

Comme $v_\phi = U \sin \phi \neq 0$ et $v_\theta = 0$, la composante tangentielle $\|\mathbf{v}^s\|$ vaut $|U \sin \phi|$. Par conséquent, le fluide glisse sur la paroi.

7. Le plan fixe d'équation $\phi = \pi/2$ est simplement le plan $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ et la distance, notée d , d'un point de coordonnées (x_1, x_2, x_3) à ce plan est $x_3 = r \cos \phi$ (expression valable pour $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$). La représentation eulérienne de cette grandeur d est donc

$$d^{(e)}(r, \phi, \theta) = r \cos \phi$$

La variation par unité de temps de la distance au plan d'un observateur accompagnant le mouvement du fluide s'obtient en calculant la dérivée matérielle du champ d . En représentation eulérienne cette dérivée matérielle se fait par application de

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v}^{(e)} \cdot \nabla$$

ce qui donne

$$\frac{Dd}{Dt} = \frac{\partial d^{(e)}}{\partial t} + \mathbf{v}^{(e)} \cdot \nabla d^{(e)} = 0 + U \left(1 - \frac{R}{r} - \frac{R}{r} \sin^2 \phi \right)$$

Ce résultat donne la composante v_3 du champ de vitesse \mathbf{v} exprimé dans le repère cartésien. On a en effet calculé la vitesse d'éloignement d'un point matériel au plan $x_1 O x_2$.

8. Pour connaître l'orientation relative au temps $t + \delta t$ de bras initialement perpendiculaires au temps t , on étudie le tenseur des vitesses de déformation $\mathbf{d} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T)$. Celui-ci a pour composantes dans le plan $\phi = \frac{\pi}{2}$

$$\begin{bmatrix} d_{rr} & d_{r\phi} & d_{r\theta} \\ d_{\phi r} & d_{\phi\phi} & d_{\phi\theta} \\ d_{\theta r} & d_{\theta\phi} & d_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{UR}{r^2} \begin{bmatrix} 0 & -3/2 & 0 \\ -3/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pour rappel, l'interprétation physique des composantes de ce tenseur concerne des fibres initialement parallèles aux vecteurs de la base locale.

On demande de trouver une orientation de la croix dans le plan $\phi = \pi/2$ telle qu'il n'y ait pas de variation d'angle entre ses bras un court instant δt plus tard.

Pour un point du plan $\phi = \pi/2$, les vecteurs \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_r sont parallèles à ce plan et le vecteur \mathbf{e}_ϕ lui est perpendiculaire. On constate que la composante $d_{r\theta}$ est nulle, ce qui indique que toute croix dont les bras sont orientés suivant les vecteurs \mathbf{e}_θ et \mathbf{e}_r satisfait la condition demandée.

Note : en fait, on peut facilement montrer que toute croix située dans le plan $\phi = \pi/2$ satisfait aussi ces exigences. En effet, si on effectue une rotation d'un angle quelconque autour \mathbf{e}_ϕ , et que l'on calcule les composantes de \mathbf{d} dans cette nouvelle base, on remarque que les composantes hors diagonale concernées sont restées nulles.

Le solide thermoélastique linéaire isotrope

Exercice 1

On considère dans un repère cartésien (O, \mathbf{e}_i) un parallépipède rectangle élastique immobile, situé dans la région $(0 \leq x_1 \leq L, 0 \leq x_2 \leq l, 0 \leq x_3 \leq h)$. Ce parallépipède est soumis à des forces uniformément distribuées sur ses faces, qui sont maintenues à la température uniforme \bar{T} . Avant que les sollicitations ne soient exercées, le parallépipède est sans tensions, à la température uniforme T_0 , et sa masse spécifique constante vaut ρ_0 .

Il s'agit d'un problème stationnaire de petits déplacements, et le modèle thermoélastique linéaire isotrope peut être appliqué :

$$\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{mm} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij} - 3\kappa \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

avec réciproquement

$$\epsilon_{ij} = \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{mm} \delta_{ij} + \alpha (T - T_0) \delta_{ij}$$

La loi de Fourier gouverne les transferts de chaleur :

$$q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Les coefficients α , λ , μ , κ , E , ν sont des paramètres matériels du matériau. La constante k est la conductibilité thermique. Il n'y a ni forces ni transferts thermiques à distance ($g_i = 0$, $r = 0$).

On demande de déterminer les champs de contraintes, déformations, déplacements et masse spécifique dans les cas suivants :

1. *Traction simple isotherme*

Les deux faces $x_1 = 0$ et $x_1 = L$ sont en traction, c.-à-d. que $\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_1) = -S \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_1) = S \mathbf{e}_1$ respectivement, tandis que les autres faces sont libres et que $\bar{T} = T_0$ à la frontière.

2. *Cisaillement simple isotherme*

Les quatre faces $x_1 = 0$, $x_1 = L$, $x_2 = 0$ et $x_2 = l$ sont en cisaillement, c.-à-d. que $\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_1) = -S \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_1) = S \mathbf{e}_2$, $\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_2) = -S' \mathbf{e}_1$ et $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_2) = S' \mathbf{e}_1$ respectivement, tandis que les autres faces sont libres et que $\bar{T} = T_0$ à la frontière.

3. *Compression simple isotherme*

Les six faces $x_1 = 0$, $x_1 = L$, $x_2 = 0$, $x_2 = l$ et $x_3 = 0$, $x_3 = h$ sont en compression, c.-à-d. que $\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_i) = p \mathbf{e}_i$, $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_i) = -p \mathbf{e}_i$ sur les faces correspondantes, tandis que $\bar{T} = T_0$ à la frontière.

4. *Dilatation simple*

Les six faces sont libres et portées à la température $\bar{T} \neq T_0$.

Remarque : en petits déplacements, les lois de conservation s'écrivent

$$\rho = \rho_0 (1 - \epsilon_{mm})$$

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho_0 g_i$$

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ji} \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} + r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Exercice 2

Une canalisation tubulaire immobile en acier est traversée par du gaz sous pression. Ses deux extrémités sont astreintes à ne pas subir de déplacement longitudinal. D'autre part, on suppose que les effets de déformation dus à la pesanteur ou au frottement du gaz sur la paroi intérieure sont négligeables. Les rayons intérieur et extérieur de la canalisation sont R_i et R_e , tandis que les pressions à l'intérieur et à l'extérieur de la canalisation sont p_i et p_e . On utilise le modèle de la thermoélasticité linéaire isotrope. On demande de trouver le champ de déplacements, et les tenseurs des contraintes et des déformations infinitésimales correspondant à ce problème.

Marche à suivre

1. Identifier les équations à résoudre.
2. Ecrire soigneusement les conditions aux frontières.
3. Méthode semi-inverse : suivant la physique du problème, suggérer une forme pour le champ de déplacements.
4. Ecrire l'expression du tenseur des contraintes correspondant à ce champ de déplacements.
5. Etablir et résoudre les équations d'équilibre avec les conditions aux frontières associées.

Application numérique : considérer que la canalisation est en acier ($E=204$ GPa, $\nu=0.29$, $k=46$ Wm⁻¹K⁻¹, $\alpha=10^{-5}$ K⁻¹) et que $R_i = 2.0$ cm, $R_e = 2.5$ cm, $p_i = 100$ bars, $p_e = 1$ bar.

Exercice 3

Même exercice que le précédent, mais où l'on considère en plus que la température du gaz T_i est différente de la température ambiante T_e à l'extérieur de la canalisation.

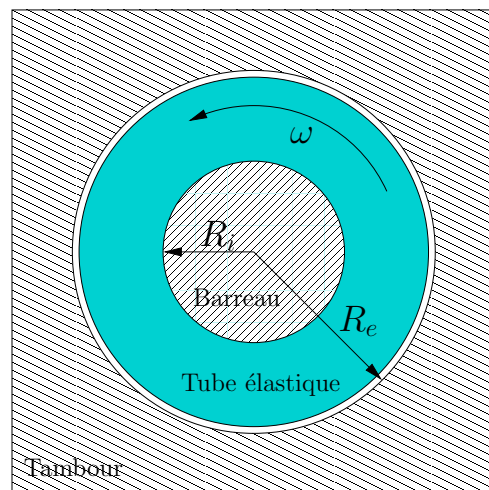
Exercice 4

Une sphère creuse de rayon intérieur R_i est remplie d'air à une pression p_i . La sphère est immergée dans de l'eau jusqu'à une certaine profondeur où la pression s'exerçant sur sa surface extérieure est alors de $p_e (> p_i)$. Les forces de volume sont négligeables. On travaille dans le système des coordonnées-composantes sphériques (r, ϕ, θ) , avec pour origine le centre de la sphère.

1. Identifier les équations à résoudre.
2. Ecrire soigneusement les conditions aux frontières.
3. Indiquer une forme simplifiée du champ de déplacement. Justifier.
4. Déterminer le champ de déplacements ainsi que les champs de déformations infinitésimales et de contraintes.
5. Tracer les diagrammes des cercles de Mohr associés à l'état de tension.
6. Quelle épaisseur minimum e faut-il donner au solide pour que la contrainte de cisaillement maximum en ses points ne dépasse pas $\frac{\sigma_y}{2}$? (En pratique, il faut en plus tenir compte du flambage possible de la sphère).

Exercice 5

Un tube cylindrique creux d'un matériau élastique est collé à un barreau rigide de rayon R_i . L'assemblage tourne autour de son axe à une vitesse angulaire ω constante, à l'intérieur d'un tambour rigide de rayon R_e sur lequel le tube glisse avec frottement. Les extrémités de l'assemblage sont astreintes à glisser sans frottement sur deux plans fixes parallèles distants de L . La déformation du tube représente un problème d'élasticité infinitésimale isotrope isotherme. Il s'agit d'un problème stationnaire de déformations planes.



On attache au tube un système de coordonnées cylindriques (r, θ, z) relativement auquel il est immobile. Dans ce repère mobile, les calculs se font comme dans un repère inertiel, à condition d'ajouter deux forces de volume :

- (i) la force de Coriolis, qui est nulle car les vitesses relatives sont nulles;
- (ii) la force d'entraînement, qui se réduit à la force centrifuge $(\rho \omega^2 r \mathbf{e}_r)$.

On néglige l'effet de la pesanteur.

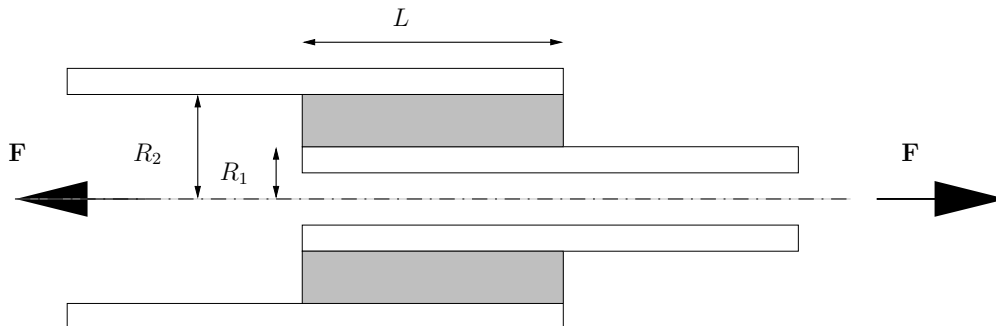
Méthode à suivre :

1. Identifier les équations à résoudre.
2. Ecrire soigneusement les conditions aux frontières. On suppose un frottement sec entre le tube et le tambour rigide. La composante tangentielle de la force de contact est alors le produit de sa composante normale par un coefficient de friction k donné.
3. Décrire les simplifications que l'on peut apporter au champ de déplacements du tube élastique. La configuration de référence est en rotation, sans tensions, et a pour rayons R_i et R_e .
4. Ecrire les équations du problème. On voit qu'on peut séparer les calculs des composantes radiale (u_r) et azimutale (u_θ) du déplacement.
5. Calculer la composante radiale du déplacement.
6. Calculer la composante azimutale du déplacement.
7. Déterminer le couple exercé sur le barreau pour maintenir le mouvement.

Exercice 6

On considère deux tubes métalliques, le premier de rayon extérieur R_1 et le second de rayon intérieur $R_2 (> R_1)$. Ces deux tubes sont fixés l'un à l'autre au moyen d'un manchon en caoutchouc d'épaisseur $R_2 - R_1$ et de longueur L . De part et d'autre de l'assemblage ainsi constitué, on exerce une traction de grandeur F . Dans une première approximation, on ne tient compte que de la déformation du caoutchouc dont le module d'élasticité est beaucoup plus faible que celui d'un matériau métallique.

On demande de quelle distance les deux tubes vont s'éloigner l'un de l'autre.



Exercice 7

Une pièce de caoutchouc C occupe avant déformation le volume compris entre une surface conique d'angle d'ouverture 2α et deux calottes sphériques de rayons respectifs R_1 et R_2 . Celles-ci sont centrées au sommet du cône et sont collées à deux pièces solides indéformables S_1 et S_2 , elles-mêmes en forme de calotte sphérique.

On fait tourner la plus petite pièce rigide (S_1) d'un angle Ω donné autour de l'axe du cône, alors que la seconde pièce rigide S_2 est encastrée, de sorte que la pièce de caoutchouc, dont la surface latérale est libre, est mise en torsion.

Le problème est stationnaire et isotherme.

Le caoutchouc est un matériau élastique isotrope et ses coefficients matériels sont constants. En outre, l'angle Ω est suffisamment petit pour qu'on puisse faire l'hypothèse de petits déplacements.

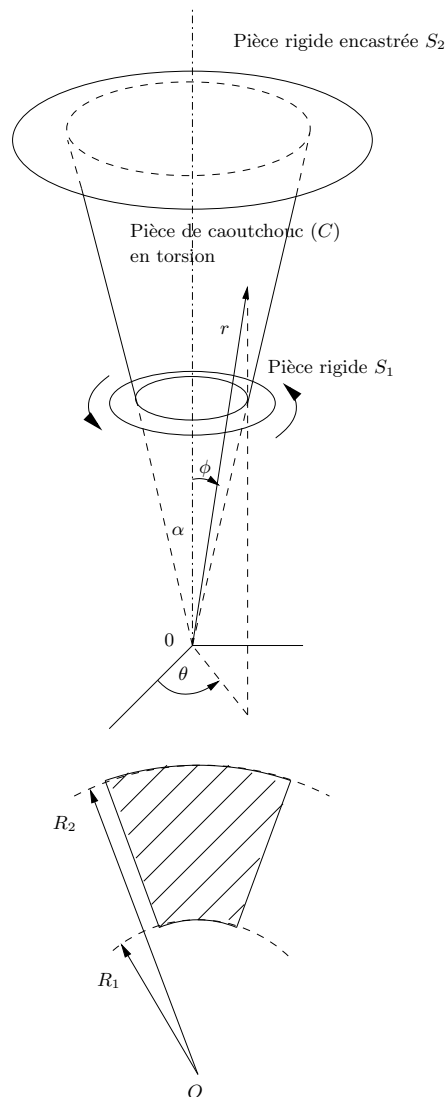
Il est conseillé de travailler en coordonnées-composantes sphériques en partant d'un déplacement de la forme :

$$\mathbf{u} = f(r) \sin \phi \mathbf{e}_\theta$$

où $f(r)$ est une fonction inconnue à déterminer.

Étapes :

1. Identifier les équations à résoudre.
2. Ecrire les conditions aux frontières.
3. Interpréter la forme suggérée du champ de déplacements.
4. Déterminer les champs de déplacements, de déformations et de contraintes prenant naissance après torsion dans la pièce de caoutchouc.
5. Déterminer le rapport entre l'angle Ω et le couple de torsion exercé sur l'une ou l'autre des pièces rigides ¹.



¹Pour rappel : $\sin^3 \alpha = -\frac{1}{4} \sin 3\alpha + \frac{3}{4} \sin \alpha$

Exercice 8

Soit un cylindre droit de rayon R et de longueur $L \gg R$, fait d'un matériau élastique isotrope et un manchon cylindrique de même longueur et de rayons interne $R - d$ et externe $R + h$, avec $d \ll R$.

Les deux pièces se trouvent initialement sans tensions et à la température T_0 . Le manchon est ensuite chauffé jusqu'à ce que son rayon intérieur dépasse R . Les deux pièces sont alors emboîtées et on laisse l'assemblage se refroidir jusqu'à la température T_0 . On admet qu'il y a glissement parfait entre les deux parties.

On demande de déterminer le champ de tensions dans les deux pièces après *frettage*, et en particulier la contrainte normale à l'interface.

Les forces de volume sont considérées comme nulles.

1. Ecrire les équations à résoudre.
2. Poser les conditions aux frontières.
3. Faire les hypothèses appropriées sur la forme du champ de déplacement dans les deux pièces.
4. Calculer les déformations et les contraintes qui en dérivent. Exprimer les équations différentielles qui lient les inconnues du problème. Résoudre ces équations en introduisant les constantes d'intégration adéquates.
5. Indiquer où le principe de Saint-Venant a été appliqué dans la résolution du problème.
6. Quelle est la température minimale T_1 à laquelle le manchon doit être porté pour que le frettage puisse avoir lieu ? Pourquoi l'hypothèse de glissement entre les deux pièces est-elle nécessaire pour obtenir une solution simple au problème ?

Les paramètres mécaniques sont, respectivement pour le cylindre et pour le manchon, $\lambda_c, \mu_c, E_c, \nu_c$ et $\lambda_m, \mu_m, E_m, \nu_m$. λ et μ désignent les constantes de Lamé, E le module de Young et ν le coefficient de Poisson du matériau considéré.

Les paramètres thermiques sont, respectivement pour le cylindre et pour le manchon, α_c, k_c, C_{ec} et α_m, k_m, C_{em} . α désigne le coefficient de dilatation thermique, k le coefficient de conductivité thermique et C_ϵ la chaleur spécifique à déformation constante du matériau considéré.

Solution exercice 1

1. Le tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$ qui a pour composantes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dans le repère cartésien donné présente les densités de forces de contact prescrites sur les faces du parallélépipède et vérifie l'équation d'équilibre local

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0} \quad \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en coordonnées cartésiennes} \right)$$

On obtient le tenseur des déformations infinitésimales par l'équation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{S}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu S}{E} \end{bmatrix}$$

Pour calculer le champ de déplacements, on établit d'abord les différentielles des composantes du tenseur des rotations infinitésimales

$$\begin{aligned} d\omega_{ij} &= \left(\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k \\ &= 0 \quad \text{ici} \end{aligned}$$

L'intégration de ces différentielles (manifestement exactes) donne

$$\int_{(0,0,0)}^{(x_1,x_2,x_3)} d\omega_{ij} = \omega_{ij}(x_1, x_2, x_3) - \omega_{ij}(0, 0, 0) = 0$$

c.-à-d.

$$\omega_{ij}(x_1, x_2, x_3) = \omega_{ij}(0, 0, 0)$$

Le parallélépipède est soumis à une rotation d'ensemble $\omega_{ij}(0, 0, 0)$ que l'on peut choisir d'annuler arbitrairement.

Ensuite, on établit les différentielles des composantes du champ de déplacements :

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

$$du_1 = \frac{S}{E} dx_1$$

$$du_2 = -\frac{\nu S}{E} dx_2$$

$$du_3 = -\frac{\nu S}{E} dx_3$$

L'intégration de ces différentielles donne

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{S}{E}x_1 + u_1(0, 0, 0) \\u_2 &= -\frac{\nu S}{E}x_2 + u_2(0, 0, 0) \\u_3 &= -\frac{\nu S}{E}x_3 + u_3(0, 0, 0)\end{aligned}$$

Les composantes $u_i(0, 0, 0)$ sont celles d'une translation d'ensemble du parallélépipède, que l'on peut annuler arbitrairement.

Finalement, on trouve pour la masse spécifique

$$\rho = \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) = \rho_0(1 - (1 - 2\nu)\frac{S}{E})$$

2. De manière semblable, on trouve pour le tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & S & 0 \\ S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

puisque $S' = S$ parce que $\boldsymbol{\sigma}$ est symétrique.

Ensuite, le tenseur des déformations infinitésimales s'écrit

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{S}{2\mu} & 0 \\ \frac{S}{2\mu} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Le calcul du champ de déplacements donne

$$\begin{aligned}u_1 &= \frac{S}{2\mu}x_2 \\u_2 &= \frac{S}{2\mu}x_1 \\u_3 &= 0\end{aligned}$$

On a choisi comme précédemment d'annuler les ω_{ij} et u_i en $(0, 0, 0)$.

Finalement, on trouve que la masse spécifique reste constante

$$\rho = \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) = \rho_0(1 - 0) = \rho_0$$

3. De manière semblable, on trouve pour le tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

et ensuite pour le tenseur des déformations infinitésimales

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\frac{p}{3\kappa} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{p}{3\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{p}{3\kappa} \end{bmatrix}$$

Le calcul du champ de déplacements donne

$$\begin{aligned}u_1 &= -\frac{p}{3\kappa}x_1 \\u_2 &= -\frac{p}{3\kappa}x_2 \\u_3 &= -\frac{p}{3\kappa}x_3\end{aligned}$$

On a choisi comme précédemment d'annuler les ω_{ij} et u_i en $(0, 0, 0)$.
Finalement, on trouve pour la masse spécifique

$$\rho = \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) = \rho_0\left(1 + \frac{p}{\kappa}\right)$$

4. De manière semblable on trouve pour le tenseur des contraintes

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

L'équation de l'énergie pour un problème statique ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$) et sans transferts thermiques à distance ($r = 0$) se réduit à

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \mathbf{0} \quad \left(\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0 \text{ en coordonnées cartésiennes}\right)$$

En y injectant la loi de Fourier :

$$\mathbf{q} = -k\nabla T \quad \left(q_i = -k\frac{\partial T}{\partial x_i} \text{ en coordonnées cartésiennes}\right)$$

on trouve

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (-k\nabla T) = -k\Delta T = 0 \quad \left(-k\frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i} = 0 \text{ en coordonnées cartésiennes}\right)$$

Le champ de température T doit donc vérifier l'équation de Laplace

$$\Delta T = 0$$

et prendre la valeur \bar{T} sur les faces du parallélépipède. On trouve alors un champ de température homogène $T(x_1, x_2, x_3) = \bar{T}$.

A partir des distributions de température et de contraintes ainsi trouvées, le tenseur des déformations infinitésimales s'écrit

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha(\bar{T} - T_0) & 0 & 0 \\ 0 & \alpha(\bar{T} - T_0) & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\bar{T} - T_0) \end{bmatrix}$$

Le calcul du champ de déplacements donne

$$\begin{aligned}u_1 &= \alpha(\bar{T} - T_0)x_1 \\u_2 &= \alpha(\bar{T} - T_0)x_2 \\u_3 &= \alpha(\bar{T} - T_0)x_3\end{aligned}$$

On a choisi comme précédemment d'annuler les ω_{ij} et u_i en $(0, 0, 0)$.
Finalement, on trouve pour la masse spécifique

$$\rho = \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) = \rho_0(1 - 3\alpha(\bar{T} - T_0))$$

Solution exercice 2

On travaille en coordonnées-composantes cylindriques.

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

On distingue deux frontières sur lesquelles on pose des conditions détaillées.

- Sur la paroi interne du tube ($r = R_i$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression intérieure p_i :

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = p_i \mathbf{e}_r$$

- Sur la paroi externe du tube ($r = R_e$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression extérieure p_e :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = -p_e \mathbf{e}_r$$

3. Méthode semi-inverse

Le champ de déplacements s'écrit de manière générale

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = u_r(r, \theta, z) \mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta, z) \mathbf{e}_\theta + u_z(r, \theta, z) \mathbf{e}_z$$

L'axisymétrie du problème indique que les composantes de \mathbf{u} ne dépendent pas de la coordonnée θ . De même, chaque tranche $z = \text{Cste}$ est sollicitée de la même façon et les déformations ne dépendent pas de z . De plus, ϵ_{zz} paraît manifestement constant (déformation axiale homogène). Vu la condition imposée aux extrémités, ϵ_{zz} doit être nul et u_z de même, sans perte de généralité. Ensuite, les sollicitations ne donnent pas

de rotation autour de l'axe, et donc u_θ est aussi nul. Finalement, le seul déplacement non nul est dirigé suivant \mathbf{e}_r et ne dépend pas de z :

$$\mathbf{u}(r) = f(r)\mathbf{e}_r$$

On désignera par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

4. Tenseur des contraintes

De l'expression du champ de déplacements $\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r$, on calcule les composantes du tenseur des déformations infinitésimales :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

desquelles on tire $\epsilon_{mm} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = f' + \frac{f}{r}$.

Les composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent finalement par l'équation de constitution du matériau thermoélastique, ce qui donne :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r}) \end{bmatrix}$$

5. Equations d'équilibre

La projection de l'équation d'équilibre $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ sur les vecteurs de base locale donne les trois équations

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)f'' + (\lambda + 2\mu)\frac{f'}{r} - (\lambda + 2\mu)\frac{f}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résolution des équations d'équilibre

Les deuxième et troisième équations sont identiquement satisfaites pour le champ \mathbf{u} choisi. La première équation peut encore s'écrire

$$r^2 f'' + r f' - f = 0$$

Il s'agit d'une *équation différentielle d'Euler* dont on peut ramener la résolution à celle d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants en effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ g(\xi) = f(e^\xi) & (\text{et donc } f(r) = g(\ln r)) \end{cases}$$

On calcule successivement

$$\frac{df}{dr} = \frac{dg}{d\xi} \frac{d\xi}{dr} = \frac{dg}{d\xi} \frac{1}{r}$$

$$\frac{d^2 f}{dr^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{df}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left(\frac{dg}{d\xi} \frac{1}{r} \right) = \left(\frac{d^2 g}{d\xi^2} \frac{d\xi}{dr} \right) \frac{1}{r} + \frac{dg}{d\xi} \left(-\frac{1}{r^2} \right) = \frac{d^2 g}{d\xi^2} \frac{1}{r^2} - \frac{dg}{d\xi} \frac{1}{r^2}$$

ce qui donne

$$g'' - g = 0$$

Cette équation admet pour solution générale

$$g(\xi) = Ae^\xi + Be^{-\xi}$$

où A, B sont des constantes arbitraires. On trouve finalement l'expression de f en effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$:

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Le tenseur des contraintes prend donc la forme

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)A + 2\mu B \frac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda A \end{bmatrix}$$

Détermination des constantes d'intégration

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par les conditions aux frontières. La condition frontière

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = p_i \mathbf{e}_r \quad \text{en } R_i$$

s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{R_i^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)A + 2\mu B \frac{1}{R_i^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} -2(\lambda + \mu)A + 2\mu B \frac{1}{R_i^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tandis que la seconde condition

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = -p_e \mathbf{e}_r \quad \text{en } R_e$$

s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{R_e^2} & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)A + 2\mu B \frac{1}{R_e^2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{R_e^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les équations non triviales résultant de l'application des conditions aux frontières forment le système

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{R_i^2} &= -p_i \\ 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{R_e^2} &= -p_e \end{aligned}$$

dont les constantes A et B sont solutions. On trouve

$$A = \frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{2(\lambda + \mu)(R_e^2 - R_i^2)}$$

$$B = \frac{(R_e R_i)^2 (p_i - p_e)}{2\mu(R_e^2 - R_i^2)}$$

On reporte ensuite ces valeurs dans les expressions des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$. En particulier, pour le champ de déplacements on obtient

$$\mathbf{u} = \left(\frac{p_i R_i^2 - p_e R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \frac{r}{2(\lambda + \mu)} + \left(\frac{(R_e R_i)^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \frac{p_i - p_e}{2\mu r}$$

Ce problème est appelé problème du tube de *Lamé*.

Solution exercice 3

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} - 3\kappa \alpha (T - T_0) \boldsymbol{\delta}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

Equation de l'énergie pour un problème statique ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), en l'absence de transferts par rayonnement ($r = 0$) :

$$0 = -\nabla \cdot \mathbf{q}$$

Equation de constitution pour le flux de chaleur (loi de Fourier) :

$$\mathbf{q} = -k \nabla T$$

2. Conditions aux frontières

On distingue deux frontières sur lesquelles on pose des conditions détaillées.

- Sur la paroi interne du tube ($r = R_i$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression intérieure p_i :

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = p_i \mathbf{e}_r$$

et la température est celle du gaz :

$$T = T_i$$

- Sur la paroi externe du tube ($r = R_e$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression extérieure p_e :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = -p_e \mathbf{e}_r$$

et la température est la température ambiante :

$$T = T_e$$

Le problème étudié peut être décomposé en deux sous-problèmes grâce à la linéarité des équations à résoudre. D'une part, on considère le problème où les parois interne et externe de la canalisation sont à la même température mais soumises aux sollicitations des pressions interne et externe (il s'agit du problème étudié à l'exercice précédent). D'autre part, on considère le problème où les parois interne et externe sont libres (il n'y a pas de forces de contact exercées), mais ont des températures différentes. Par linéarité, les champs solutions du problème complet seront la somme des champs solutions des deux sous-problèmes mentionnés.

3. La physique du problème suggère que le champ de température ne dépend que de la coordonnée r . En injectant la loi de Fourier dans l'équation de l'énergie on obtient

$$\nabla \cdot \mathbf{q} = \nabla \cdot (-k \nabla T) = -k \Delta T = 0$$

Le champ de température T est donc solution de l'équation de Laplace

$$\Delta T = 0$$

qui, en coordonnées cylindriques et pour un champ qui ne dépend que de r , s'écrit

$$\Delta T = \frac{T'}{r} + T'' = 0$$

Il s'agit d'une *équation différentielle d'Euler* dont on peut ramener la résolution à celle d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants en effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ U(\xi) = T(e^\xi) & (\text{et donc } T(r) = U(\ln r)) \end{cases}$$

On obtient pour U l'équation différentielle

$$U'' = 0$$

qui admet pour solution générale

$$U(\xi) = A\xi + B$$

où A et B sont des constantes arbitraires. En effectuant le changement de variable réciproque $r = e^\xi$ on obtient

$$T(r) = A \ln r + B$$

Les constantes A et B sont déterminées par les conditions aux frontières

$$\begin{aligned} A \ln R_i + B &= T_i \\ A \ln R_e + B &= T_e \end{aligned}$$

$$A = \frac{T_i - T_e}{\ln \frac{R_i}{R_e}}$$

$$B = \frac{T_e \ln R_i - T_i \ln R_e}{\ln R_i - \ln R_e}$$

ce qui donne

$$T(r) = \frac{1}{\ln \frac{R_i}{R_e}} \left(T_i \ln \frac{r}{R_e} - T_e \ln \frac{r}{R_i} \right)$$

4. On essaye de trouver un champ de déplacement \mathbf{u} de la forme

$$\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r.$$

Tenseur des contraintes

Les composantes du tenseur des déformations infinitésimales associé sont

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

duquel on tire $\epsilon_{mm} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = f' + \frac{f}{r}$.

Les composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent finalement par l'équation de constitution :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r}) \end{bmatrix}$$

$$- 3\kappa\alpha(A \ln r + B - T_0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(pour des raisons de lisibilité, on a laissé les constantes A et B dans l'expression de $T(r)$).

Equations d'équilibre

La projection de l'équation d'équilibre $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ sur les vecteurs de base donne les trois équations

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)f'' + (\lambda + 2\mu)\frac{f'}{r} - (\lambda + 2\mu)\frac{f}{r^2} - 3\kappa\alpha\frac{A}{r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résolution des équations d'équilibre

Les deuxième et troisième équations sont identiquement satisfaites pour le champ \mathbf{u} choisi. La première équation peut encore s'écrire

$$r^2 v'' + r v' - v = \frac{3\kappa\alpha Ar}{(\lambda + 2\mu)}$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ g(\xi) = f(e^\xi) & (\text{et donc } f(r) = g(\ln r)) \end{cases}$$

on obtient

$$g'' - g = \frac{3\kappa\alpha Ae^\xi}{(\lambda + 2\mu)}$$

Une solution particulière de cette équation est

$$g(\xi) = \frac{3\kappa\alpha A}{2(\lambda + 2\mu)} \xi e^\xi$$

On aura donc pour solution générale

$$g(\xi) = Ce^\xi + De^{-\xi} + \frac{3\kappa\alpha A}{2(\lambda + 2\mu)} \xi e^\xi$$

où C et D sont des constantes arbitraires. On obtient l'expression de f en effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$

$$f(r) = Cr + \frac{D}{r} + \frac{3\kappa\alpha A}{2(\lambda + 2\mu)} r \ln r$$

Détermination des constantes d'intégration

Les constantes d'intégration C et D restent à déterminer par les conditions aux frontières. La condition frontière

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = \mathbf{0} \quad \text{en } R_i$$

s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sigma_{11} \\ -\sigma_{12} \\ -\sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} -2(\lambda + \mu)C + \frac{2\mu}{R_i^2}D + 3\kappa\alpha A \ln R_i \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + 3\kappa\alpha(B - T_0 - \frac{A}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tandis que la seconde condition

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0} \quad \text{en } R_e$$

s'écrit composante par composante sous la forme

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{21} & \sigma_{31} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)C - \frac{2\mu}{R_e^2}D - 3\kappa\alpha A \ln R_e \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} - 3\kappa\alpha(B - T_0 - \frac{A}{2}) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Les équations non triviales résultant de l'application des conditions aux frontières forment le système

$$\begin{aligned} 2(\lambda + \mu)C - \frac{2\mu}{R_i^2}D &= 3\kappa\alpha A \ln R_i \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + 3\kappa\alpha(B - T_0 - \frac{A}{2}) \\ 2(\lambda + \mu)C - \frac{2\mu}{R_e^2}D &= 3\kappa\alpha A \ln R_e \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} + 3\kappa\alpha(B - T_0 - \frac{A}{2}) \end{aligned}$$

dont on tire les valeurs de C et D :

$$\begin{aligned} D &= -\frac{3\kappa\alpha A}{2(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{R_i}{R_e} \left(\frac{R_i^2 R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) \\ C &= -\frac{3\kappa\mu\alpha A}{(\lambda + 2\mu)} \ln \frac{R_i}{R_e} \left(\frac{R_e^2}{R_e^2 - R_i^2} \right) + \frac{3}{2}\kappa\alpha A \ln R_i \frac{\mu}{(\lambda + \mu)(\lambda + 2\mu)} + \frac{3\kappa\alpha}{2(\lambda + \mu)}(B - T_0 - \frac{A}{2}) \end{aligned}$$

On reporte ensuite ces valeurs dans les expressions des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$. Finalement les expressions des champs \mathbf{u} , $\boldsymbol{\epsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$ pour le problème complet sont obtenues en additionnant les champs obtenus pour chacun des deux sous-problèmes considérés (c.-à-d. le sous-problème isotherme avec des densités de forces de contact prescrites par les pressions sur les parois et le sous-problème non isotherme avec parois libres).

Solution exercice 4

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

Les conditions aux frontières portent sur les densités de forces de contact exercées sur les surfaces intérieure et extérieure de la sphère.

- Sur la surface extérieure de la sphère ($r = R_e$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression extérieure p_e :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) = -p_e \mathbf{e}_r$$

- Sur la surface intérieure de la sphère ($r = R_i$), la densité de forces de contact est prescrite par la pression intérieure p_i :

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) = p_i \mathbf{e}_r$$

3. Méthode semi-inverse

D'une part, le problème considéré présente une symétrie sphérique. En conséquence, les champs recherchés sont indépendants des coordonnées ϕ et θ . D'autre part, vu l'action centrale des pressions interne et externe sur la sphère, le seul déplacement non nul est dirigé suivant \mathbf{e}_r . Le champ de déplacements cherché a donc pour forme

$$\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r$$

Par la suite, on désignera par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

4. Tenseur des contraintes

Pour le champ de déplacements $\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r$, les composantes du tenseur des déformations infinitésimales en coordonnées-composantes sphériques sont

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{r}f & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{r}f \end{bmatrix}$$

L'équation de constitution exprimant les relations entre contraintes et déformations pour un matériau élastique linéaire isotrope donne les composantes du tenseur des contraintes en coordonnées-composantes sphériques :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{2}{r}f) + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + \frac{2}{r}f) + \mu \frac{2}{r}f & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{2}{r}f) + \mu \frac{2}{r}f \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre

En portant ces valeurs dans l'équation d'équilibre $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ projetée sur la base sphérique, on trouve après réarrangement :

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(f'' + 2\frac{1}{r}f' - 2\frac{1}{r^2}f) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résolution des équations d'équilibre

Seule l'équation d'équilibre suivant \mathbf{e}_r est non triviale

$$f'' + 2\frac{1}{r}f' - 2\frac{1}{r^2}f = 0$$

C'est une équation différentielle d'Euler, dont on ramène la résolution à celle d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants en effectuant le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ g(\xi) = f(e^\xi) & (\text{et donc } f(r) = g(\ln r)) \end{cases}$$

On obtient de cette manière

$$g'' + g' - 2g = 0$$

Cette équation admet pour solution générale

$$g(\xi) = Ae^\xi + Be^{-2\xi}$$

où A, B sont des constantes arbitraires. On trouve finalement l'expression de f en effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$, ce qui donne la solution générale

$$f(r) = Ar + B\frac{1}{r^2}$$

En portant la fonction f dans les expressions des composantes de $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\epsilon}$ et \mathbf{u} , on trouve :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} (3\lambda + 2\mu)A - 4B\frac{\mu}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & (3\lambda + 2\mu)A + 2B\frac{\mu}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & (3\lambda + 2\mu)A + 2B\frac{\mu}{r^3} \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} A - 2B\frac{1}{r^3} & 0 & 0 \\ 0 & A + B\frac{1}{r^3} & 0 \\ 0 & 0 & A + B\frac{1}{r^3} \end{bmatrix}$$

$$[u_i] = \begin{bmatrix} Ar + B\frac{1}{r^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Détermination des constantes d'intégration

On détermine les constantes A et B à partir des conditions aux frontières. Sur la surface intérieure de la sphère ($r = R_i$), la condition s'écrit vectoriellement

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot (-\mathbf{e}_r) = p_i \mathbf{e}_r$$

c.-à-d., en composantes :

$$\begin{bmatrix} -(3\lambda + 2\mu)A + 4B\frac{\mu}{R_i^3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tandis que sur la surface extérieure de la sphère ($r = R_e$) on a vectoriellement

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{e}_r = -p_e \mathbf{e}_r$$

c.-à-d., en composantes :

$$\begin{bmatrix} (3\lambda + 2\mu)A - 4B\frac{\mu}{R_e^3} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -p_e \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En résolvant le système des équations non trivialement satisfaites :

$$-(3\lambda + 2\mu)A + 4B\frac{\mu}{R_i^3} = p_i$$

$$(3\lambda + 2\mu)A - 4B\frac{\mu}{R_e^3} = -p_e$$

on trouve les valeurs de A et de B :

$$A = \frac{1}{3\lambda + 2\mu} \frac{p_i R_i^3 - p_e R_e^3}{R_e^3 - R_i^3}$$

$$B = \frac{p_i - p_e}{4\mu} \left(\frac{R_i^3 R_e^3}{R_e^3 - R_i^3} \right)$$

Puisque on suppose $p_i < p_e$, on a $A < 0$ et $B < 0$.

5. Diagrammes des cercles de Mohr

Soit un point matériel P situé à une distance r du centre de la sphère. Les contraintes principales $\sigma_{III} \leq \sigma_{II} \leq \sigma_I$ en P sont solution de l'équation en σ

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

Comme les composantes de $\boldsymbol{\sigma}$ forment une matrice diagonale dans la base $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$, on déduit que cette base est constituée de directions principales. De plus, dans ce cas, on trouve directement les valeurs principales sur la diagonale. On a donc

$$\sigma_I = (3\lambda + 2\mu)A - 4B \frac{\mu}{r^3}, \quad \sigma_{II} = \sigma_{III} = (3\lambda + 2\mu)A + 2B \frac{\mu}{r^3}$$

En général, pour un point où les contraintes principales sont $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$, on peut tracer trois cercles de Mohr. Ici, comme $\sigma_{II} = \sigma_{III}$, l'un des cercles est réduit à un point tandis que les deux autres sont confondus. Par conséquent, l'état de tension en P est tel qu'à un élément de surface de normale sortante \mathbf{n} est associée une densité de forces de contact $\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n})$ dont les composantes normale σ_n et tangentielle τ_s forment un point (σ_n, τ_s) situé sur l'unique cercle de Mohr du diagramme.

Le centre de ce cercle se trouve en

$$\left(\frac{\sigma_I + \sigma_{III}}{2}, 0 \right) = \left((3\lambda + 2\mu)A - B \frac{\mu}{r^3}, 0 \right)$$

et son rayon est

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = -3B \frac{\mu}{r^3}$$

6. Dimensionnement de l'épaisseur

Il est clair que le cisaillement maximum dans le solide a lieu sur la surface intérieure de la sphère. En effet, c'est aux points de cette surface que correspond le cercle de Mohr le plus grand. Ainsi,

$$\tau_s^{\max} = \frac{1}{2}(\sigma_I - \sigma_{III})|_{r=R_i} = -3B \frac{\mu}{R_i^3} = \frac{3}{4} \left(\frac{R_e^3(p_e - p_i)}{R_e^3 - R_i^3} \right)$$

Il faut donc déterminer le rayon externe R_e minimum tel qu'on ait

$$\frac{3}{4} \left(\frac{R_e^3(p_e - p_i)}{R_e^3 - R_i^3} \right) < \frac{\sigma_Y}{2}$$

Cette valeur minimale est solution de

$$3R_e^3(p_e - p_i) - 2\sigma_Y(R_e^3 - R_i^3) = 0$$

c.-à-d.

$$R_e = R_i \sqrt[3]{\frac{2\sigma_Y}{2\sigma_Y - 3(p_e - p_i)}}$$

L'épaisseur minimum e est donc

$$e = R_e - R_i = R_i \left(\sqrt[3]{\frac{2\sigma_Y}{2\sigma_Y - 3(p_e - p_i)}} - 1 \right)$$

Solution exercice 5

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile dans le repère en rotation ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en présence de la force de volume centrifuge ($\rho \mathbf{g} = \rho \omega^2 r \mathbf{e}_r$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \omega^2 r \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

On distingue deux frontières sur lesquelles on pose des conditions précises :

- Surface interne du tube ($r = R_i$)
Le tube adhère au barreau indéformable :

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

- Surface externe du tube ($r = R_e$)
Le tube ne peut pas pénétrer dans le tambour :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0$$

La densité de forces de contact est prescrite par les forces de frottement sec :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_\theta = k \text{sign}(\omega) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r$$

3. Méthode semi-inverse

On fait l'hypothèse que les déformations sont planes : il n'y a pas de déplacement selon \mathbf{e}_z et les autres composantes ne dépendent a priori que des coordonnées r, θ . Cependant, le problème est axisymétrique et donc les divers champs ne dépendent pas de la coordonnée azimutale θ . En conséquence, on cherche

$$\mathbf{u}(r) = f(r) \mathbf{e}_r + g(r) \mathbf{e}_\theta$$

4. Tenseur des contraintes

De l'expression du champ de déplacements $\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r + g(r)\mathbf{e}_\theta$, on calcule les composantes du tenseur des déformations infinitésimales :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} f' & \frac{1}{2}(g' - \frac{g}{r}) & 0 \\ \frac{1}{2}(g' - \frac{g}{r}) & \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

dont on tire $\epsilon_{mm} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = f' + \frac{f}{r}$.

Les composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent par l'équation de constitution :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu f' & \mu(g' - \frac{g}{r}) & 0 \\ \mu(g' - \frac{g}{r}) & \lambda(f' + \frac{f}{r}) + 2\mu \frac{f}{r} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + \frac{f}{r}) \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre

On obtient les équations scalaires de l'équilibre local en projetant $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\rho \omega^2 r \mathbf{e}_r$ sur les vecteurs de base, ce qui donne :

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)f'' + (\lambda + 2\mu)\frac{f'}{r} - (\lambda + 2\mu)\frac{f}{r^2} \\ \mu g'' + \mu \frac{g'}{r} - \mu \frac{g}{r^2} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \omega^2 r \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

5. Composante radiale

Résolution

La composante radiale du champ de déplacements vérifie donc l'équation d'Euler non homogène

$$r^2 f'' + r f' - f = -\frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} r^3$$

où la force centrifuge apparaît comme un forçage. Par le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ y(\xi) = f(e^\xi) & (\text{et donc } f(r) = y(\ln r)) \end{cases}$$

on établit l'équation différentielle linéaire non homogène pour $y(\xi)$

$$y'' - y = -\frac{\rho \omega^2}{\lambda + 2\mu} e^{3\xi}$$

qui admet pour solution particulière

$$y_p(\xi) = -\frac{\rho \omega^2}{8(\lambda + 2\mu)} e^{3\xi}$$

tandis que l'équation homogène associée admet pour solution générale

$$y_h(\xi) = A e^\xi + B e^{-\xi}$$

où A et B sont des constantes arbitraires. La solution générale y s'obtient en additionnant ces deux solutions

$$y(\xi) = y_h(\xi) + y_p(\xi) = Ae^\xi + Be^{-\xi} - \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}e^{3\xi}$$

On trouve finalement l'expression de f en effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$:

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r} - \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}r^3$$

Détermination des constantes d'intégration

Les constantes d'intégration A et B sont déterminées par les conditions aux frontières. La condition frontière

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } R_i$$

donne pour la composante suivant \mathbf{e}_r :

$$AR_i + \frac{B}{R_i} - \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}R_i^3 = 0$$

tandis que la condition en $r = R_e$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{e}_r = 0 \quad (\text{c.-à-d. } u_r = f = 0)$$

donne :

$$AR_e + \frac{B}{R_e} - \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)}R_e^3 = 0$$

En résolvant ce système pour A et B , on trouve

$$A = \frac{\rho\omega^2(R_i^2 + R_e^2)}{8(\lambda + 2\mu)}$$

$$B = -\frac{\rho\omega^2 R_i^2 R_e^2}{8(\lambda + 2\mu)}$$

6. Composante azimutale

Résolution

La composante azimutale du champ de déplacements satisfait l'équation d'Euler inhomogène

$$r^2 g'' + r g' - g = 0$$

Par le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ z(\xi) = g(e^\xi) & (\text{et donc } g(r) = z(\ln r)) \end{cases}$$

on obtient pour z l'équation différentielle

$$z'' - z = 0$$

qui admet pour solution générale

$$z(\xi) = Ce^\xi + De^{-\xi}$$

où C et D sont des constantes arbitraires. En effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$, on obtient pour la composante azimutale du déplacement

$$g(r) = Cr + \frac{D}{r}$$

Détermination des constantes d'intégration

La condition

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } R_i$$

donne pour la composante suivant \mathbf{e}_θ :

$$CR_i + \frac{D}{R_i} = 0$$

tandis que la condition

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_\theta &= k \operatorname{sign}(\omega) \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{e}_r \quad \text{en } r = R_e \\ (\text{c.-à-d. } \sigma_{r\theta} &= k \operatorname{sign}(\omega) \sigma_{rr}) \end{aligned}$$

donne :

$$-\frac{2\mu D}{R_e^2} = k \operatorname{sign}(\omega) \sigma_{rr}$$

avec

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} &= \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)} (2(\lambda + \mu)(R_i^2 + R_e^2) - (4\lambda + 6\mu)R_e^2 + 2\mu R_i^2) \quad \text{en } r = R_e \\ &= \frac{\rho\omega^2}{8(\lambda + 2\mu)} (2(\lambda + 2\mu)R_i^2 - 2(\lambda + 2\mu)R_e^2) \\ &= \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) \end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned} D &= -k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\sigma_{rr} R_e^2}{2\mu} = k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2 R_e^2}{8\mu} (R_e^2 - R_i^2) \\ C &= -\frac{D}{R_i^2} = k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2 R_e^2}{8\mu R_i^2} (R_i^2 - R_e^2) \end{aligned}$$

7. Pour que le barreau soit maintenu dans son mouvement de rotation à vitesse angulaire ω constante autour de \mathbf{e}_z , il faut exercer un couple \mathbf{M} opposé au couple \mathbf{M}_f des forces de frottement sec :

$$\mathbf{M} + \mathbf{M}_f = \mathbf{0}$$

La densité de moment $\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ exercée par les forces de frottement sur la surface extérieure du tube vaut

$$\begin{aligned} \mathbf{m} &= (R_e \mathbf{e}_r) \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) \\ &= (R_e \mathbf{e}_r) \times (\sigma_{rr} \mathbf{e}_r + \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_\theta + \sigma_{rz} \mathbf{e}_z) \\ &= R_e \sigma_{r\theta} \mathbf{e}_z \\ &= k \operatorname{sign}(\omega) \sigma_{rr} R_e \mathbf{e}_z \\ &= k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) R_e \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

On obtient le couple résultant des frottements \mathbf{M}_f en intégrant cette densité de moment sur la surface extérieure du tube :

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_f &= \int \mathbf{m} dS \\ &= \int_0^L \int_0^{2\pi} k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) R_e^2 d\theta dz \mathbf{e}_z \\ &= k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) R_e^2 \int_0^L \int_0^{2\pi} d\theta dz \mathbf{e}_z \\ &= k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) R_e^2 2\pi L \mathbf{e}_z\end{aligned}$$

Le couple à exercer vaut donc

$$\mathbf{M} = -k \operatorname{sign}(\omega) \frac{\rho\omega^2}{4} (R_i^2 - R_e^2) R_e^2 2\pi L \mathbf{e}_z$$

Solution exercice 6

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \operatorname{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

On souhaite déterminer le champ de déplacement du manchon en caoutchouc. L'équilibre de l'assemblage requiert que les résultantes des forces de contact exercées d'une part sur la surface externe du manchon, et d'autre part sur sa surface interne équilibrent les deux tubes soumis à la traction.

- Sur la surface interne du manchon ($r = R_1$), la résultante des forces de contact doit valoir $F \mathbf{e}_z$:

$$\int \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS = F \mathbf{e}_z$$

- Sur la surface externe du manchon ($r = R_2$), la résultante des forces de contact doit valoir $-F \mathbf{e}_z$:

$$\int \boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_r) dS = -F \mathbf{e}_z$$

D'autre part, les bases du manchon ($z = 0$ et $z = L$) sont des surfaces libres :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_z) = \mathbf{0} \quad \text{en } z = L$$

$$\boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_z) = \mathbf{0} \quad \text{en } z = 0$$

3. Méthode semi-inverse

Dans une première approximation, on fait l'hypothèse suivante qui découle de la description du problème :

$$\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_z$$

4. Tenseur des contraintes

Les tenseurs des déformations infinitésimales et des contraintes ont pour composantes

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f'(r)/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ f'(r)/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu f'(r) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu f'(r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre

L'équilibre local donne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu f''(r) + \frac{1}{r}\mu f'(r) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

La seule équation non triviale a pour solution

$$f(r) = A \ln r + B$$

où A et B sont des constantes arbitraires. Par conséquent, les tenseurs des déformations infinitésimales et des contraintes se réécrivent sous la forme suivante :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & A/2r \\ 0 & 0 & 0 \\ A/2r & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu A/r \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu A/r & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Détermination des constantes d'intégration

On note d'abord que la valeur de la constante B n'a ici pas d'intérêt, puisqu'elle correspond à un déplacement rigide du manchon alors qu'on désire calculer l'éloignement relatif des deux tubes. Il faut déterminer A de sorte qu'on ait

$$\int \boldsymbol{\tau}(-\mathbf{e}_r) dS = F \mathbf{e}_z$$

La densité des forces de contact exercées sur la surface interne du manchon vaut en composantes :

$$\begin{bmatrix} \tau_r \\ \tau_\theta \\ \tau_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu A/R_e \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu A/R_e & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mu A/R_e \end{bmatrix}$$

Cette densité de forces de contact étant constante, on trouve directement sa résultante sur la surface intérieure du manchon et la condition s'écrit à présent sous la forme

$$F \mathbf{e}_z = 2\pi R_1 L \frac{-\mu A}{R_1} \mathbf{e}_z = -2\pi L \mu A \mathbf{e}_z$$

La condition sur la surface extérieure du manchon donne de manière similaire

$$-F \mathbf{e}_z = 2\pi R_2 L \frac{\mu A}{R_2} \mathbf{e}_z = 2\pi L \mu A \mathbf{e}_z$$

On trouve dès lors pour A :

$$A = \frac{-F}{2\pi L \mu}$$

Finalement, on obtient l'éloignement relatif des deux tubes métalliques :

$$u_z(R_1) - u_z(R_2) = A \ln R_1 - A \ln R_2 = A \ln \frac{R_1}{R_2} = \frac{F}{2\pi L \mu} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Principe de Saint-Venant

On remarque que, sur les surfaces de base du manchon, la solution trouvée donne des tensions tangentielles σ_{zr} non nulles. Ces tensions ne devraient pas exister, car on suppose que les surfaces de base du manchon sont libres. De par la symétrie du problème, on s'aperçoit que la résultante et le moment résultant de cette répartition de tensions tangentielles sont nuls et qu'en conséquence, cette répartition est statiquement équivalente à la situation réelle où les bases sont libres de forces de contact. Dès lors, le principe de Saint-Venant nous enseigne que le problème que nous avons considéré donnera des effets fort peu différents du problème de départ, à une distance de la zone d'application des tensions grande par rapport au diamètre de cette zone.

Solution exercice 7

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope isotherme :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

Il y a trois frontières sur l'objet étudié : la calotte supérieure, la calotte inférieure et la surface latérale.

- Calotte supérieure ($r = R_2$)

La pièce rigide, collée au morceau en caoutchouc, est encastrée. Le déplacement y est par conséquent nul :

$$\mathbf{u}(R_2) = \mathbf{0}$$

- Calotte inférieure ($r = R_1$)

On la fait tourner d'un angle Ω . Le déplacement vaut donc :

$$\mathbf{u}(R_1) = \Omega R_1 \sin \phi \mathbf{e}_\theta$$

- Surface latérale ($\phi = \alpha$)

La surface latérale est libre. La densité des forces de contact qui y sont exercées est par conséquent nulle. La normale unitaire sortante est \mathbf{e}_ϕ . Donc, on trouve :

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{e}_\phi) = \mathbf{0}$$

3. Hypothèse semi-inverse

Le déplacement proposé n'a qu'une composante azimutale, ce qui correspond bien à la déformation proposée. En outre, il varie en $\sin \phi$, ce qui implique un déplacement nul sur l'axe de symétrie et un déplacement de plus en plus grand lorsque ϕ augmente jusque $\pi/2$.

4. Tenseur des contraintes

On calcule successivement les composantes du gradient de déplacement $\nabla \mathbf{u}$, du tenseur de déformations infinitésimales $\boldsymbol{\epsilon}$ et enfin celles du tenseur des contraintes $\boldsymbol{\sigma}$

$$[(\nabla \mathbf{u})_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & f' \sin \phi \\ 0 & 0 & \frac{f \cos \phi}{r} \\ -\frac{f \sin \phi}{r} & -\frac{f \cos \phi}{r} & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\epsilon_{ij}] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sin \phi (f' - f/r) \\ 0 & 0 & 0 \\ \sin \phi (f' - f/r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \mu \sin \phi (f' - f/r) \\ 0 & 0 & 0 \\ \mu \sin \phi (f' - f/r) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre

La conservation de la quantité de mouvement donne

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mu(\sin \phi (f'' + f/r^2 - f'/r) + 3 \sin \phi (f'/r - f/r^2)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Résolution des équations d'équilibre

Seule la dernière équation est non triviale. Elle s'écrit, après simplification et multiplication par r^2 , sous la forme

$$r^2 f'' + 2r f' - 2f = 0$$

Il s'agit d'une équation d'Euler qu'on va résoudre par le changement de variable

$$\begin{cases} r = e^\xi & (\text{et donc } \xi = \ln r) \\ g(\xi) = f(e^\xi) & (\text{et donc } f(r) = g(\ln r)) \end{cases}$$

On trouve alors pour $g(\xi)$:

$$g'' + g' - 2g = 0$$

Les racines du polynôme caractéristique de cette équation sont $+1$ et -2 . La solution est par conséquent

$$g(\xi) = Ae^\xi + Be^{-2\xi} = Ar + B/r^2$$

On trouve l'expression de $f(r)$ en effectuant le changement de variable réciproque $\xi = \ln r$, ce qui donne :

$$f(r) = Ar + B/r^2$$

Détermination des constantes d'intégration

On a donc trouvé un champ de déplacement dont la forme vérifie les équations d'équilibre. Ce champ doit aussi vérifier les conditions aux frontières.

Sur la calotte supérieure ($r = R_2$), le déplacement doit être nul :

$$\mathbf{u}(R_2) = \sin \phi \left(AR_2 + \frac{B}{R_2^2} \right) \mathbf{e}_\theta = \mathbf{0}$$

tandis que la calotte inférieure ($r = R_1$) subit une rotation d'un angle Ω autour de l'axe de symétrie :

$$\mathbf{u}(R_1) = \Omega R_1 \sin \phi \mathbf{e}_\theta = \sin \phi \left(AR_1 + \frac{B}{R_1^2} \right) \mathbf{e}_\theta$$

De ces deux conditions, on tire

$$A = \frac{R_1^3 \Omega}{R_1^3 - R_2^3} \quad \text{et} \quad B = \frac{R_1^3 R_2^3 \Omega}{R_2^3 - R_1^3}$$

5. Le couple exercé sur la pièce rigide S_1 est transmis à la pièce de caoutchouc. Pour calculer ce couple, il faut donc intégrer la densité de moment exercé par les forces de contact sur la surface de la pièce en contact avec S_1 :

$$\mathbf{M} = \int_{calotte} \mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS = \int_{calotte} \mathbf{x} \times \boldsymbol{\tau}(\mathbf{n}) dS$$

Puisque

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (-\mathbf{e}_r) \\ &= -\mu \sin \phi (f'(R_1) - f(R_1)/R_1) \mathbf{e}_\theta \\ &= \sin \phi \frac{3B\mu}{R_1^3} \mathbf{e}_\theta \end{aligned}$$

et que le bras de levier \mathbf{x} vaut $R_1 \mathbf{e}_r$, on trouve

$$\mathbf{m}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) = -\sin \phi \frac{3B\mu}{R_1^2} \mathbf{e}_\phi$$

et

$$\mathbf{M} = - \int_{calotte} \sin \phi \frac{3B\mu}{R_1^2} \mathbf{e}_\phi dS$$

On ne peut faire sortir \mathbf{e}_ϕ de l'intégrale, car ce vecteur varie sur la surface d'intégration. Il faut donc exprimer \mathbf{e}_ϕ dans une base cartésienne :

$$\mathbf{e}_\phi = \cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_3$$

On obtient, en notant que l'élément d'aire dS vaut $R_1^2 \sin \phi d\phi d\theta$,

$$\mathbf{M} = \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} - \sin \phi \frac{3B\mu}{R_1^2} (\cos \phi \cos \theta \mathbf{e}_1 + \cos \phi \sin \theta \mathbf{e}_2 - \sin \phi \mathbf{e}_3) R_1^2 \sin \phi d\theta d\phi$$

Pour des raisons de symétrie les composantes de \mathbf{M} selon \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont nulles. Il reste par conséquent à évaluer la troisième composante :

$$\begin{aligned} \mathbf{M} &= 3B\mu \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} \sin^3 \phi d\theta d\phi \mathbf{e}_3 \\ &= 3B\mu \int_0^\alpha \int_0^{2\pi} -\frac{1}{4} \sin 3\phi + \frac{3}{4} \sin \phi d\theta d\phi \mathbf{e}_3 \\ &= 6\pi\mu\Omega \frac{R_1^3 R_2^3}{R_2^3 - R_1^3} \left(\frac{\cos 3\alpha}{12} - \frac{3 \cos \alpha}{4} + \frac{2}{3} \right) \mathbf{e}_3 \end{aligned}$$

On détermine ainsi le rapport entre la norme du couple $\|\mathbf{M}\|$ à exercer sur la calotte pour obtenir une rotation d'angle Ω et ce même angle Ω .

Solution exercice 8

On pose $R_e = R + h$ et $R_i = R - d$ et on désigne par les indices m et c les grandeurs associées au manchon et au cylindre.

1. Equations à résoudre

Conservation de la quantité de mouvement pour un corps immobile ($\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$) et en l'absence de forces de volume ($\rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$) :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$$

Equation de constitution du matériau thermoélastique linéaire isotrope :

$$\boldsymbol{\sigma} = \lambda \text{tr}(\boldsymbol{\epsilon}) \boldsymbol{\delta} + 2\mu \boldsymbol{\epsilon} - 3\kappa\alpha(T - T_0) \boldsymbol{\delta}$$

où $\boldsymbol{\epsilon}$ est le tenseur des déformations infinitésimales :

$$\boldsymbol{\epsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u})$$

2. Conditions aux frontières

Il faut considérer toutes les frontières des solides étudiés et veiller à l'imposition de contraintes et/ou de déplacements.

- Extrémités du manchon et du cylindre ($z = 0$ et $z = L$)
Il n'y a pas de forces de contact appliquées sur ces surfaces. Elles sont donc libres et la densité de forces de contact y est nulle. On a donc, aussi bien pour le cylindre que pour le manchon

$$\boldsymbol{\tau}(\pm \mathbf{e}_z) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}^T \cdot (\pm \mathbf{e}_z) = \mathbf{0}$$

- Extérieur du manchon ($r = R_e$)
L'extérieur du manchon est également une surface libre :

$$\boldsymbol{\tau}_m(\mathbf{e}_r) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_m^T(r = R_e) \cdot \mathbf{e}_r = \mathbf{0}.$$

- Interface cylindre/manchon ($r = R$ et $r = R_i$)
Il y a deux types de conditions imposées à l'interface : des conditions sur les contraintes (principe d'action-réaction) et sur le déplacement (les deux surfaces doivent être en contact).

- Déplacements :

La condition de contact entre les deux surfaces est traduite par le fait le rayon interne du manchon et le rayon du cylindre doivent coïncider après déformation (glissement parfait) :

$$u_{c_r}(r = R) + R = u_{m_r}(r = R_i) + R_i$$

- Contraintes :

Le principe d'action-réaction à l'interface impose que l'action du manchon sur le cylindre compense exactement celle du cylindre sur le manchon :

$$\boldsymbol{\tau}_{m \rightarrow c}(\mathbf{e}_r) + \boldsymbol{\tau}_{c \rightarrow m}(-\mathbf{e}_r) = \mathbf{0} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}_c^T(r = R) \cdot \mathbf{e}_r + \boldsymbol{\sigma}_m^T(r = R_i) \cdot (-\mathbf{e}_r) = \mathbf{0}$$

3. Méthode semi-inverse

On remarque tout d'abord que les champs de déplacement subis par les deux pièces du problème sont similaires. Les hypothèses faites pour l'un sont également valables pour l'autre.

Le champ de déplacements s'écrit de manière générale :

$$\mathbf{u}(r, \theta, z) = u_r(r, \theta, z)\mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta, z)\mathbf{e}_\theta + u_z(r, \theta, z)\mathbf{e}_z.$$

Le problème est axisymétrique. Aucune des composantes du champ de déplacement ne dépend donc de θ .

- $u_r = f(r)$

Chaque section perpendiculaire à \mathbf{e}_z subit la même sollicitation selon \mathbf{e}_r . Le déplacement radial est donc indépendant de z . Il ne reste donc que la dépendance par rapport à r . On désignera par f' et f'' les dérivées première et seconde de f .

- $u_\theta = 0$

Aucune des sollicitations imposées ne donne lieu à un déplacement autour de l'axe.

- $u_z = Cz$

L'insertion du cylindre dans le manchon se faisant sans frottement, u_z est indépendant de r . Une fibre infinitésimale parallèle à l'axe z s'allongera de la même

façon, quelque soit sa position. On dit que la déformation axiale est homogène. La composante ϵ_{zz} est donc constant en tout point ($\epsilon_{zz} = C$). Vu que cette composante vaut $\frac{\partial u_z}{\partial z}$, on en déduit que $u_z = Cz + C'$. Comme on ne s'intéresse pas aux mouvements rigides des pièces, on annule la constante d'intégration C' , aussi bien pour le tube que pour le cylindre.

4. Tenseur des contraintes

On travaille pour le moment en élasticité isotherme ($T = T_0$) puisque la configuration déformée est considérée après retour de l'assemblage à la température initiale. De l'expression du champ de déplacements $\mathbf{u} = f(r)\mathbf{e}_r + Cz\mathbf{e}_z$, on calcule les composantes du tenseur des déformations infinitésimales :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} f' & 0 & 0 \\ 0 & f/r & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix}$$

desquelles on tire $\epsilon_{mm} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} = f' + \frac{f}{r} + C$.

Les composantes du tenseur des contraintes s'obtiennent finalement par l'équation de constitution :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda(f' + f/r + C) + 2\mu f' & 0 & 0 \\ 0 & \lambda(f' + f/r + C) + 2\mu f/r & 0 \\ 0 & 0 & \lambda(f' + f/r + C) + 2\mu C \end{bmatrix}$$

Equations d'équilibre

La projection de l'équation d'équilibre $\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{0}$ sur les vecteurs de base donne les trois équations

$$\begin{bmatrix} (\lambda + 2\mu)(f'' + f'/r - f/r^2) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Seule la première équation est non triviale. Il s'agit d'une équation d'Euler, qui se résoud en posant $r = e^\xi$ pour obtenir une équation différentielle ordinaire à coefficients constants. On obtient alors :

$$f(r) = Ar + \frac{B}{r}$$

Le tenseur des contraintes prend donc la forme

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 2(\lambda + \mu)A - 2\mu B \frac{1}{r^2} + \lambda C & 0 & 0 \\ 0 & 2(\lambda + \mu)A + 2\mu B \frac{1}{r^2} + \lambda C & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C \end{bmatrix}$$

Détermination des constantes d'intégration

La première chose à remarquer est que B_c doit être nulle puisque la solution doit être définie en $r = 0$.

- Extrémités du manchon et du cylindre :
La seule équation non triviale est celle de la composante de la densité des forces de contact suivant \mathbf{e}_z . Elle donne :

$$2\lambda A + (\lambda + 2\mu)C = 0$$

Ceci permet de déduire C en fonction de A , pour le cylindre et pour le manchon :

$$C = -\frac{2\lambda}{\lambda+2\mu}A.$$

- Extérieur du manchon :

Seule la composante de la densité des forces de contact suivant \mathbf{e}_r est non triviale :

$$2(\lambda + \mu)A_m - 2\mu B_m \frac{1}{R_e^2} + \lambda C_m = 0$$

Ceci donne A_m en fonction de B_m :

$$A_m = \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{3\lambda_m + 2\mu_m} \frac{B_m}{R_e^2}$$

Remarque :

Comme on se trouve en élasticité infinitésimale, les coordonnées lagrangiennes et eulériennes sont confondues, ce qui permet de calculer les champs de contraintes (et de déplacements) en prenant dans la configuration de départ les coordonnées des points matériels considérés.

- Interface cylindre/manchon

Il y a deux types de conditions imposées à l'interface : des conditions sur les contraintes (principe d'action-réaction) et sur le déplacement (les deux surfaces doivent être en contact).

- Déplacements :

La condition de contact entre les deux surfaces est traduite par le fait le rayon interne du manchon et le rayon du cylindre doivent coïncider après déformation :

$$A_c R + R = A_m R_i + \frac{B_m}{R_i} + R_i$$

ce qui donne :

$$A_c = -1 + \frac{1}{R} \left[R_i + B_m \left(\frac{R_i}{R_e^2} \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{3\lambda_m + 2\mu_m} + \frac{1}{R_i} \right) \right]$$

- Contraintes :

La dernière équation du principe d'action-réaction à l'interface donne, en exprimant A_c et A_m en fonction de B_m :

$$B_m = \left(\lambda_c + \mu_c - \frac{\lambda_c^2}{\lambda_c + 2\mu_c} \right) \left(1 - \frac{R_i}{R} \right) \left[\left(\lambda_c + \mu_c - \frac{\lambda_c^2}{\lambda_c + 2\mu_c} \right) \frac{1}{R} \left(\frac{R_i}{R_e^2} \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{3\lambda_m + 2\mu_m} + \frac{1}{R_i} \right) - \left(\lambda_m + \mu_m - \frac{\lambda_m^2}{\lambda_m + 2\mu_m} \right) \frac{1}{R_e^2} \frac{\lambda_m + 2\mu_m}{3\lambda_m + 2\mu_m} + \frac{\mu_m}{R_i^2} \right]^{-1}$$

La constante B_m ainsi déterminée, il suffit de substituer successivement sa valeur dans les équations exprimant les conditions aux frontières pour trouver les valeurs des autres constantes.

5. Principe de Saint-Venant

La solution trouvée respecte toutes les conditions prescrites pour les densités de forces de contact aux frontières. En conséquence, on ne doit pas faire appel au principe de Saint-Venant pour justifier le résultat.

6. Température minimale pour insérer le cylindre dans le manchon

Il faut déterminer la température à laquelle la dilatation thermique du manchon est suffisante pour pouvoir y introduire le cylindre. Il faut donc que le rayon intérieur du manchon, lorsqu'il est chauffé, soit au moins aussi grand que celui du cylindre. Ceci se traduit par

$$u_{m_r}(r = R_i) + R_i \geq R, \text{ ou encore } u_{m_r}(r = R_i) \geq d.$$

Pour déterminer le champ de déplacements, on fait les mêmes hypothèses que précédemment sur la forme de ce champ.

A ce stade, on peut envisager deux méthodes, l'une étant la même que celle de la première partie de l'exercice et l'autre partant du fait que, pour une dilatation thermique simple, le champ de contraintes est nul partout dans le corps étudié.

- Méthode 1 :

Le tenseur des contraintes est modifié par rapport à la première partie de l'exercice par l'ajout du terme $-(3\lambda+2\mu)\alpha\Delta T\delta$. Ceci ne modifie cependant pas les équations de conservation de la quantité de mouvement (puisque le champ de température est homogène) et la forme du champ de déplacements est conservée. Il reste donc à déterminer les trois constantes A , B et C . Ceci se réalise en imposant que toutes les surfaces sont libres.

- Méthode 2 :

Le solide étant simplement chauffé, toute sa frontière est libre. Le corps ne subissant ainsi ni forces de contact ni forces à distance, ses contraintes sont nulles partout. On a donc

$$\sigma = \mathbf{0} \Rightarrow \epsilon = \alpha\Delta T\delta.$$

En considérant l'expression de ϵ en fonction de \mathbf{u} , les termes diagonaux donnent

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_r}{\partial r} &= \alpha\Delta T \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} &= \alpha\Delta T \\ \frac{\partial u_z}{\partial z} &= \alpha\Delta T \end{aligned}$$

En tenant compte des hypothèses faites sur le champ de déplacements, l'intégration de ces équations donne

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\Delta T r \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= \alpha\Delta T z + Cste_z \end{aligned}$$

La constante $Cste_z$ vaut zéro, car on ne tient pas compte des déplacements rigides. On a donc finalement pour le déplacement :

$$\begin{aligned} u_r &= \alpha\Delta T r \\ u_\theta &= 0 \\ u_z &= \alpha\Delta T z \end{aligned}$$

Cette relation permet d'exprimer la condition sur la température minimale à imposer pour que le cylindre puisse être inséré dans le manchon :

$$\alpha \Delta T R_i \geq d \Rightarrow T \geq T_0 + \frac{d}{\alpha(R-d)}$$

Le fluide visqueux newtonien

Exercice 1

Soit l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible le long d'une plaque inclinée infinie. Le problème est stationnaire et la plaque est inclinée d'un angle α par rapport à l'horizontale. Le fluide est soumis à la pesanteur, exercée dans la direction opposée à la verticale. Le débit volumique de fluide par unité de largeur est Q . La masse volumique ρ , la viscosité dynamique η et la conductivité thermique k du fluide sont supposées constantes. La pression de l'atmosphère vaut p_a .

1. Déterminer le profil de vitesse.
 - (a) Ecrire les équations à résoudre.
 - (b) Identifier les conditions aux frontières, en supposant que le fluide glisse sans frottement sur l'air.
 - (c) Méthode semi-inverse: suggérer la forme des champs de vitesse et de pression (on peut supposer a priori que l'épaisseur inconnue h de la couche de fluide est constante).
 - (d) Résoudre les équations.
 - (e) Déterminer l'épaisseur h à partir du débit volumique par unité de largeur Q .
 - (f) Interpréter les résultats pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi/2$.
2. Déterminer le profil de température sachant que la température de la plaque est constante et vaut T_0 , tandis que l'atmosphère est isolée thermiquement.
3. Déterminer le champ de vitesse dans le cas de deux fluides superposés. On désigne les paramètres respectifs par (h_A, ρ_A, η_A) et (h_B, ρ_B, η_B) .

Exercice 2

Etude d'écoulements dans des conduites de profil donné

Un écoulement de Poiseuille est un écoulement stationnaire développé dans une conduite prismatique ou cylindrique de section droite donnée. On demande d'étudier l'écoulement de Poiseuille dans une conduite dont la section droite est :

- un triangle équilatéral de côté c ;
- un anneau de rayon intérieur R_i et de rayon extérieur R_e .

Considérer les cas où le moteur de l'écoulement est

1. l'imposition d'une différence de pression $\Delta P (> 0)$ entre deux sections distantes d'une longueur L ;
2. la gravité, agissant parallèlement à l'axe de la conduite.

Exercice 3

On considère l'écoulement d'un fluide visqueux newtonien incompressible entre deux tubes verticaux coaxiaux de rayons respectifs R et $2R$. Le tube extérieur est fixe, tandis que le tube intérieur tourne autour de son axe à une vitesse angulaire uniforme Ω sans mouvement vertical. Le fluide descend entre les deux tubes et subit l'effet de la rotation du cylindre intérieur. La pression (non uniforme) dans le fluide aux extrémités supérieure et inférieure du système (de hauteur L) est désignée par $p_a(r)$. La masse spécifique ρ et la viscosité dynamique η du fluide sont constantes. L'accélération de la pesanteur (qui s'exerce vers le bas) est désignée par g .

L'écoulement est supposé stationnaire et développé, et on néglige les effets particuliers présents aux deux extrémités du domaine d'écoulement. Ce système est continuellement alimenté en fluide.

1. Ecrire les équations à résoudre.
2. Ecrire les conditions aux frontières du problème.
3. Faire des hypothèses raisonnables sur la forme des champs de vitesses et de pression dans le système de coordonnées approprié.
4. Résoudre les équations.
5. Calculer le débit volume Q entre les deux tubes.
6. Déterminer le couple \mathbf{C} à exercer sur le tube intérieur pour le maintenir dans son mouvement de rotation uniforme.
7. Déterminer la puissance fournie au fluide par le tube intérieur et la puissance dissipée dans le fluide.

Exercice 4

On étudie l'écoulement isotherme d'un fluide visqueux newtonien incompressible dans la région située au-dessus d'une plaque de dimension infinie. Cette plaque est en mouvement tout en restant continuellement dans un même plan. On considère un repère cartésien fixe (O, \mathbf{e}_i) , où \mathbf{e}_1 et \mathbf{e}_2 sont parallèles au plan de la plaque et \mathbf{e}_3 est dirigé vers le fluide. Dans ce repère, le mouvement de la plaque est un mouvement périodique : chacun de ses points se déplace à une vitesse $\mathbf{V}(t) = U \cos(\omega t) \mathbf{e}_1$ (U et ω sont des constantes données ayant les dimensions d'une vitesse et d'une pulsation). Après un certain temps suivant le démarrage du mouvement de la plaque, le mouvement du fluide cesse d'être transitoire et devient périodique. La masse volumique ρ et la viscosité dynamique η du fluide sont supposées constantes. Les forces de volume sont négligeables.

On considère les trois cas de figure suivants :

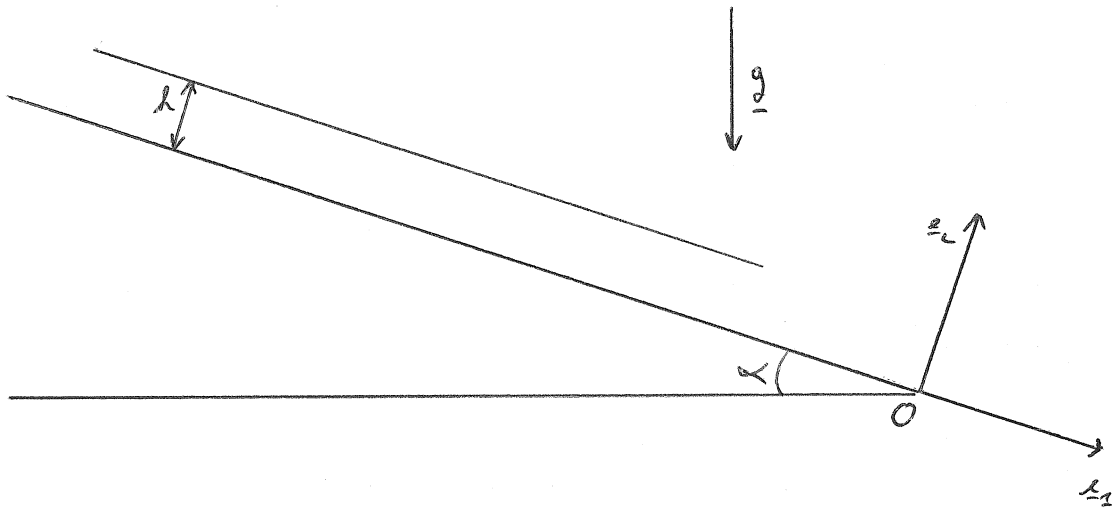
- Le fluide occupe tout l'espace au-dessus de la plaque oscillante.
- Le fluide occupe l'espace compris entre la plaque oscillante et une seconde plaque fixe, de dimension infinie, parallèle à la première et distante de h .
- Le fluide a une épaisseur h et sa surface supérieure est une surface libre (la pression atmosphérique est p_a).

a) Résoudre ce problème dans les trois cas de figure proposés.

Marche à suivre

1. Ecrire les équations à résoudre.
2. Ecrire les conditions aux frontières pour chacun des cas de figure proposés.
3. Faire des hypothèses sur la forme des champs de vitesses et de pression.
4. Déterminer les champs de vitesses pour chacun des cas de figure.

b) La composante de vitesse suivant \mathbf{e}_1 se présente comme une onde se propageant avec affaiblissement dans la direction des $x_3 \geq 0$. Quelle est la vitesse de propagation de cette onde ?

Exercice 1.

1. a. Equations de Navier-Stokes

$$\times \text{ Conservation de la masse : } \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\times \quad " \quad \text{équation de mouvement : } \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

b. \times Contact "fluide - plaque" : le fluide colle à la plaque

$$\text{en } x_2 = 0 \quad \underline{v} = \underline{v}^{\text{plaque}} = \underline{0} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = 0 \\ v_3 = 0 \end{cases}$$

\times Interface "fluide - air" : densité des forces de contact pressante par la pression p_a

$$\text{en } x_2 = h \quad \underline{\sigma}(x_2) = -p_a \underline{e}_2$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sigma_{21} = 0 \\ \sigma_{22} = -p_a \\ \sigma_{23} = 0 \end{cases}$$

c. Le fluide s'écoule en filets parallèles à la plaque, dans la direction \underline{e}_2

$$\underline{v} = v_1(x_1, x_2) \underline{e}_1$$

$$p = p(x_1, x_2)$$

d.

$$\nabla \cdot \underline{v} = 0$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \Rightarrow v_1 \perp x_1$$

v_1 ne dépend que de x_2 : $v_1(x_2)$

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

suivant \underline{e}_1 :

$$0 = - \frac{\partial p}{\partial x_1} + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha \quad (1)$$

suivant \underline{e}_2 :

$$0 = \frac{\partial p}{\partial x_2} - \rho g \cos \alpha \quad (2)$$

suivant \underline{e}_3 :

$$0 = 0$$

$$(2) \Rightarrow p = -\rho g \cos \alpha x_2 + f(x_1)$$

à l'interface "fluide-air" ($x_2 = h$) on a

$$\sigma_{22} = -p + \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) = -p = -p_a$$

$$\text{donc } p = -\rho g \cos \alpha h + f(x_1) = +p_a$$

$f(x_1)$ est une constante $k = +p_a + \rho g \cos \alpha h$

$$(1) \Rightarrow 0 = 0 + \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} + \rho g \sin \alpha$$

$$\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} = -\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta}$$

$$\text{et donc } v_1(x_2) = -\frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} x_2^2 + Ax_2 + B \quad (*)$$

On détermine A et B avec les conditions aux limites:

$$\text{en } x_2 = 0 : \underline{v} = \underline{0} \Rightarrow v_1(0) = B = 0$$

$$\text{en } x_2 = h \quad \underline{\sigma} = -p_a \underline{e}_2$$

$$\sigma_{21} = \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) = -\rho g \sin \alpha x_2 + \eta A$$

$$\text{en } x_2 = h, \quad \sigma_{21} = 0 \Rightarrow A = \frac{\rho g \sin \alpha h}{\eta}$$

σ_{22} déjà traité

$$\sigma_{23} = \eta \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} + \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) = 0 \quad \text{ok}$$

$$v_1(x_2) = \frac{\rho g \sin \alpha}{2\eta} (2x_2 h - x_2^2)$$

$$p(x_2) = \rho g \cos \alpha (h - x_2) + p_a$$

2. Débit volumique par unité de largeur Q

$$Q = \int_0^h \underline{v} \cdot \underline{n} \, dx_2 = \int_0^h v_1 \, dx_2$$

$\hookrightarrow \underline{e}_1 \, dx_2$

$$= \frac{\rho g \sin \alpha}{2 \eta} \left[h x_2^2 - \frac{x_2^3}{3} \right]_0^h = \frac{\rho g \sin \alpha}{2 \eta} \frac{2}{3} h^3$$

$$= \frac{\rho g \sin \alpha}{3 \eta} h^3$$

$$\Rightarrow h = \sqrt[3]{\frac{3 \eta Q}{\rho g \sin \alpha}}$$

2. Conservation de l'énergie

$$\rho c_v \frac{DT}{Dt} = r + 2 \eta \underline{d} : \underline{d} + \underline{\nabla} \cdot (b \underline{\nabla} T)$$

Hypothèse: $T(x_2)$ (le champ de température ne dépend que de la distance à la plaque)

Comme $\frac{DT}{Dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_2 \frac{\partial T}{\partial x_2} + v_1 \frac{\partial T}{\partial x_1} + v_3 \frac{\partial T}{\partial x_3} = 0$ (logique étant donnée la définition de dérivée matérielle)

on trouve

$$0 = 2 \eta \underline{d} : \underline{d} + b \Delta T$$

Soit encore

$$0 = 2 \eta d_{ij} d_{ji} + b \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2}$$

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & 0 \\ \frac{1}{2} \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow d_{ij} d_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right)^2$$

$$d_{ij} d_{ji} = \frac{1}{2} \left(\frac{\rho g \sin \alpha}{\eta} \right)^2 (h - x_2)^2$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} = - \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} (h^2 - 2x_2 h + x_2^2)$$

Conditions aux frontières

(1) Sur la plaque ($x_2 = 0$) : température imposée $T(0) = T_0$

(2) à l'interface "fluide-air" ($x_2 = h$) : il ne peut y avoir de flux de chaleur "entrant dans" (ou "sortant de") la couche de fluide

$$\Rightarrow q \cdot n = q \cdot e_2 = q_2 = 0 \quad \text{comme } q_i = -k \frac{\partial T}{\partial x_i} \text{ (FOURIER)}$$

on a la condition $\frac{\partial T}{\partial x_2} = 0$ en $x_2 = h$

$$\frac{\partial T}{\partial x_2} = - \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \left(h^2 x_2 - x_2^2 h + \frac{x_2^3}{3} \right) + A$$

$$\text{or (2)} \Rightarrow - \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \left(\frac{h^3}{3} \right) + A = 0$$

$$\Rightarrow A = \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \frac{h^3}{3}$$

$$T = - \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \left(h^2 \frac{x_2^2}{2} - \frac{x_2^3}{3} h + \frac{x_2^4}{12} \right) + \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \frac{h^3}{3} x_2 + B$$

$$\text{or (1)} \Rightarrow B = T_0$$

$$\Rightarrow T = - \frac{(\rho g \sin \alpha)^2}{\eta b} \left(\frac{x_2^4}{12} - \frac{x_2^3}{3} h + \frac{h^2 x_2^2}{2} - \frac{h^3}{3} x_2 \right) + T_0$$

3. La distribution de vitesse dans les deux couches de fluide A et B sont données par l'équation (*)

$$v_{1A}(x_2) = - \frac{\rho_A g \sin \alpha}{2 \eta_A} x_2^2 + A_A x_2 + B_A$$

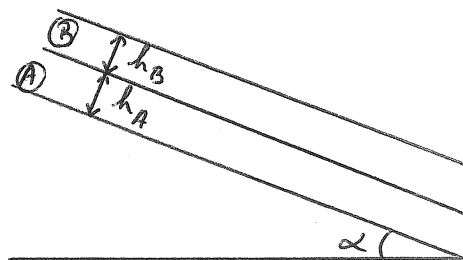
$$v_{2B}(x_2) = - \frac{\rho_B g \sin \alpha}{2 \eta_B} x_2^2 + A_B x_2 + B_B$$

où A_A, B_A, A_B et B_B sont des constantes d'intégration à déterminer par les conditions à la frontière "fluide A-plaque" et avec interfaces "fluide A - fluide B" et "fluide B - air".

1) "fluide A-plaque" ($x_2 = 0$)

condition de collement $v_A = v_{\text{plaque}} = 0$

$$\Rightarrow v_{1A}(0) = 0 = B_A$$



2) "fluide B-air" ($x_2 = h_A + h_B$)

$$\sigma_B(x_2) = -\rho_B x_2$$

$$\Rightarrow \sigma_{2B}(h_A + h_B) = -\rho_B g \sin \alpha (h_A + h_B) + \eta_B A_B$$

$$\Rightarrow A_B = \frac{\rho_B g \sin \alpha (h_A + h_B)}{\eta_B}$$

3) "fluide A - fluide B" ($x_2 = h_A$)

Il y a deux conditions à prendre en compte:

a) la distribution de vitesse est continue

$$v_A = v_B$$

$$\Rightarrow v_{1A}(h_A) = v_{2B}(h_A)$$

$$\Rightarrow - \frac{\rho_A g \sin \alpha}{2 \eta_A} h_A^2 + A_A h_A + B_A = - \frac{\rho_B g \sin \alpha}{2 \eta_B} h_A^2 + A_B h_A + B_B$$

b) la densité des forces de contact s'exerçant sur l'interface est continue

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}_A(z_c) &= \bar{\sigma}_B(z_c) \\ \Rightarrow \sigma_{z1A}(h_A) &= \sigma_{z1B}(h_A) \\ \Rightarrow -\rho_A g \sin \alpha h_A + \eta_A A_A &= -\rho_B g \sin \alpha h_A + \eta_B A_B\end{aligned}$$

la condition b) donne

$$A_A = \frac{\rho_B g \sin \alpha h_B + \rho_A g \sin \alpha h_A}{\eta_A}$$

tandis que la condition a) peut se réécrire

$$\begin{aligned}-\frac{\rho_A g \sin \alpha}{2\eta_A} h_A^2 + \frac{\rho_B g \sin \alpha}{\eta_A} h_B h_A + \frac{\rho_A g \sin \alpha}{\eta_A} h_A^2 \\ = \\ -\frac{\rho_B g \sin \alpha}{2\eta_B} h_A^2 + \frac{\rho_B g \sin \alpha}{\eta_B} h_A^2 + \frac{\rho_B g \sin \alpha}{\eta_B} h_A h_B + B_B\end{aligned}$$

ce qui donne

$$B_B = \frac{g \sin \alpha}{2} h_A^2 \left(\frac{\rho_A}{\eta_A} - \frac{\rho_B}{\eta_B} \right) + \rho_B g \sin \alpha h_A h_B \left(\frac{1}{\eta_A} - \frac{1}{\eta_B} \right)$$

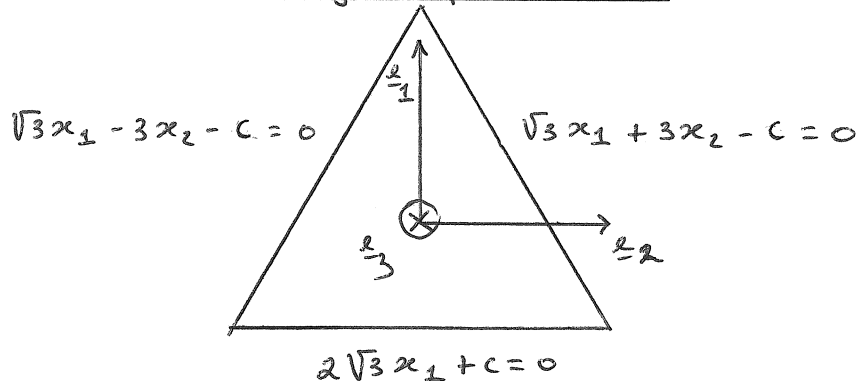
Si les 2 fluides ont même masse volumique ($\rho_A = \rho_B$) et même viscosité ($\eta_A = \eta_B$) on a évidemment

$$A_A = A_B \quad \text{et} \quad B_A = B_B$$

Exercice 2.

1. Notion de l'écoulement = différence de pression.

a) Section = triangle équilatéral



Il s'agit d'un écoulement rectiligne : les trajectoires sont des lignes droites, parallèles à l'axe de la conduite.

Dans la base cartésienne orthonormée $(0, \underline{e}_i)$ représentée le champ de vitesse a pour forme :

$$\underline{v} = v_3(x_1, x_2) \underline{e}_3$$

(v_1 et v_2 sont nulles puisque l'écoulement est parallèle à \underline{e}_3 et comme l'écoulement est dévélépé et stationnaire v_3 ne dépend pas du temps t et de la coordonnée x_3)

Le champ de pression a la forme $p(x_3)$ et est tel

que
$$\frac{\partial p}{\partial x_3} = - \frac{\Delta p}{L}$$

Sous ces hypothèses la loi de conservation de la masse

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0$$

est identiquement satisfaite.

La loi de conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

qui en notation indicelle s'écrit

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \rho g_i$$

donne les 3 équations

$$0 = 0$$

$$0 = 0$$

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \eta \underbrace{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_j \partial x_j}}_{\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2}} + \cancel{\rho g_i} \quad \text{pas de forces de volume}$$

La seule équation non triviale est donc

$$\Delta v_3 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x_3} = -\frac{\Delta P}{\eta L} = K \quad (\text{constante})$$

Il s'agit d'une équation de Poisson pour la composante

Le problème à résoudre est donc

$$(*) \quad \begin{cases} \Delta v_3 = K & \text{à l'intérieur du triangle} \\ v_3 = 0 & \text{sur la frontière du triangle} \\ & (\text{la vitesse est nulle sur la paroi}) \end{cases}$$

Puisque v_3 s'annule aux parois on va essayer de voir si la solution

$$v_3(x_1, x_2) = A(2\sqrt{3}x_1 + c)(\sqrt{3}x_1 + 3x_2 - c)(\sqrt{3}x_2 - 3x_1 - c)$$

où A est une constante peut être solution de

$$\Delta v_3 = K$$

On calcule

2.3

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} = 18 A (2\sqrt{3} x_1 - c)$$

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} = -18 A (2\sqrt{3} x_2 + c)$$

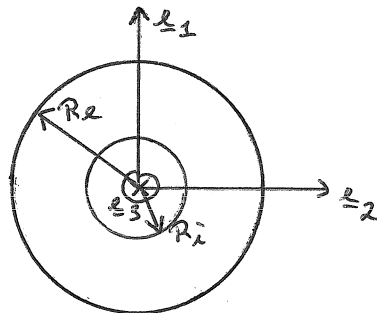
Dès lors le système (*) est satisfait si

$$A = -\frac{K}{36c}$$

Le profil de vitesse est donc

$$\begin{aligned} v_3(x_1, x_2) &= -\frac{K}{36c} (2\sqrt{3} x_1 + c)(\sqrt{3} x_1 + 3x_2 - c)(\sqrt{3} x_1 - 3x_2 - c) \\ &= \frac{\Delta P}{36\eta L c} (2\sqrt{3} x_1 + c)(\sqrt{3} x_1 + 3x_2 - c)(\sqrt{3} x_1 - 3x_2 - c) \end{aligned}$$

b) Section = anneau



Les hypothèses sur les champs de vitesse et de pression sont les mêmes que dans le cas précédent. Il faut donc résoudre

$$\Delta v_3 = K \quad \text{dans l'anneau} \quad (K = -\frac{\Delta P}{\eta L})$$

$$v_3 = 0 \quad \text{sur la frontière de l'anneau}$$

Le passage du système cartésien (x_1, x_2) au système polaire (r, θ) simplifie les calculs. Dans ce système on a

$$\Delta v_3 = \frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} = K$$

- 1 / (r L \Delta P) / \eta L

En intégrant on trouve

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dU_3}{dr} \right) = \kappa r$$

$$r \frac{dU_3}{dr} = \frac{\kappa r^2}{2} + A$$

$$U_3 = \frac{\kappa r^2}{4} + A \ln r + B$$

où A et B sont à déterminer avec les conditions aux limites

$$\text{en } r = R_i : U_3(R_i) = 0 = \frac{\kappa R_i^2}{4} + A \ln R_i + B$$

$$\text{en } r = R_e : U_3(R_e) = 0 = \frac{\kappa R_e^2}{4} + A \ln R_e + B$$

Le système de deux équations à deux inconnues (A et B) a pour solution

$$A = \frac{\kappa}{4} \frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln \frac{R_i}{R_e}}$$

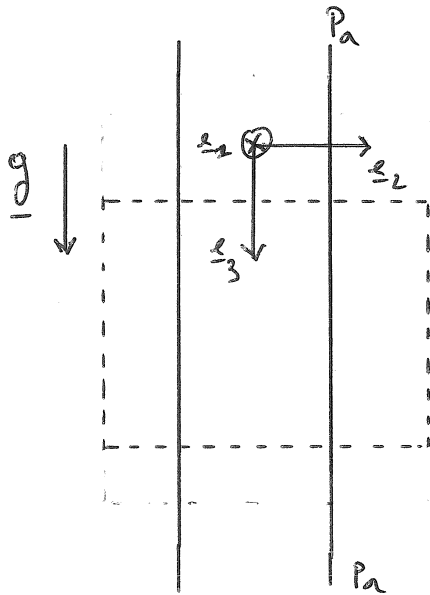
$$B = -\frac{\kappa}{4} \left(\frac{R_e^2 - R_i^2}{\ln \frac{R_i}{R_e}} \ln R_i + \frac{R_i^2}{4} \right)$$

Le profil de vitesse est donc

$$U_3(r) = \frac{\kappa}{4} (r^2 - R_i^2) + \frac{\kappa}{4} \frac{(R_e^2 - R_i^2)}{\ln \frac{R_i}{R_e}} \ln \frac{r}{R_i}$$

$$\left(\text{avec } \kappa = \frac{-\Delta P}{\eta L} \right)$$

2. Moteur de l'écoulement = gravité // à l'axe de la conduite



Zone d'étude de l'écoulement

Dans cette zone, il n'y a pas d'"effets de bord"
et on peut supposer que l'écoulement y est
stationnaire et développé.

On fait les mêmes hypothèses sur la forme des champs que dans
le cas précédent (où le moteur de l'écoulement est une différence
de pression) :

$$\begin{cases} \underline{v} = v_3(x_1, x_2) \underline{e}_3 \\ p = p(x_3) \end{cases}$$

La seule équation non triviale est

$$0 = -\frac{\partial p}{\partial x_3} + \eta \left(\frac{\partial^2 v_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 v_3}{\partial x_2^2} \right) + \rho g$$

Soit

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_3}}_{f^m \text{ de } x_3} = \underbrace{\eta \Delta v_3 + \rho g}_{f^m \text{ de } x_1, x_2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x_3} = C = \eta \Delta v_3 + \rho g$$

constante

$$\rightarrow p(x_3) = Cx_3 + A$$

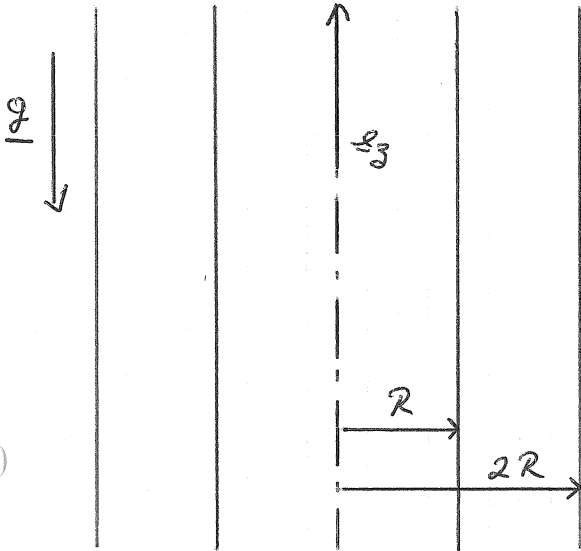
↳ constante

comme $p = p_a$ aux deux extrémités on doit avoir $\left. \begin{array}{l} C=0 \\ A=p_a \end{array} \right\}$

$$\rightarrow 0 = \eta \Delta v_3 + \rho g \Leftrightarrow \Delta v_3 = \frac{-\rho g}{\eta} = K$$

↳ constante

Il s'agit à nouveau d'une équation de Poisson $\Delta v_3 = K$.
Les profils de vitesse v_3 ont donc la même forme que ceux
obtenus en 1. mais où $K = \frac{-\rho g}{\eta}$

Exercice 3.

1) Conservation de la masse $\underline{v} \cdot \underline{v} = 0$

Conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

2) Conditions aux frontières

• Interface fluide-tube intérieur ($r=R$)

$$\underline{v} = \underline{\Omega} R \underline{e}_\theta$$

• Interface fluide-tube extérieur ($r=2R$)

$$\underline{v} = \underline{0}$$

(Le vecteur de base \underline{e}_3 est dirigé vers le haut)

3) Il s'agit d'un écoulement bidirectionnel. Le champ de vitesse a des composantes axiale v_z et azimutale v_θ non nulles. En effet le fluide est entraîné par la rotation du tube intérieur et par la gravité qui agit dans la direction axiale.

L'écoulement est stationnaire, développé et axisymétrique et donc le champ de vitesse ne dépend ni de t , z et θ :

$$\underline{v} = v_\theta(r) \underline{e}_\theta + v_z(r) \underline{e}_z$$

Compte tenu des hypothèses on constate qu'il ne peut y avoir de gradient de pression axial $\frac{\partial p}{\partial z}$. On a alors

$$p = p(r)$$

$$4) \cdot \underline{\nabla} \cdot \underline{v} = \underbrace{\frac{\partial v_r}{\partial r}}_0 + \underbrace{\frac{v_r}{r}}_0 + \frac{1}{r} \underbrace{\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta}}_0 + \underbrace{\frac{\partial v_z}{\partial z}}_0 = 0$$

$$\cdot \rho \frac{D\underline{v}}{Dt} = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

$$\rho \left(\frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} \right) = -\underline{\nabla} p + \eta \Delta \underline{v} + \rho \underline{g}$$

$$\rho \underbrace{(\underline{v} \cdot \underline{\nabla} \underline{v})}_i = -(\underline{\nabla} p)_i + \eta (\Delta \underline{v})_i + \rho g_i$$

$$v_j (\nabla v)_{ji}$$

Dès lors

$$\rho \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial v_\theta}{\partial r} & \frac{\partial v_z}{\partial r} \\ -\frac{v_\theta}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 \\ v_\theta \\ v_z \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial r} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \\ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \end{bmatrix} + \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$



en général, en coordonnées curvilignes

$$(\Delta \underline{v})_i \neq \Delta v_i$$

voir formulaire p 19.

on obtient finalement les 3 équations

$$-\rho \frac{v_\theta^2}{r} = -\frac{\partial p}{\partial r} \quad (1)$$

$$0 = \eta \left(\frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \quad (2)$$

$$0 = \eta \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \rho g \quad (3)$$

Résolution de l'équation (3)

$$\frac{\partial^2 v_3}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial r} = + \frac{\rho g}{\eta}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) = + \frac{\rho g}{\eta}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_3}{\partial r} \right) = + \frac{\rho g}{\eta} r$$

$$\frac{\partial v_3}{\partial r} = + \frac{\rho g}{2\eta} r + \frac{A}{r}$$

$$v_3(r) = + \frac{\rho g}{4\eta} r^2 + A \ln r + B \quad \text{où } A \text{ et } B \text{ sont des constantes à déterminer pour les conditions aux limites}$$

(autre technique de résolution de l'équation (3) : méthode d'Euler)

$$\begin{aligned} \text{en } r=R : \underline{v} = \underline{0} &\Rightarrow v_3(R) = 0 = + \frac{\rho g}{4\eta} R^2 + A \ln R + B \\ r=2R : \underline{v} = \underline{0} &\Rightarrow v_3(2R) = 0 = + \frac{\rho g}{4\eta} R^2 + A \ln(2R) + B \end{aligned}$$

la résolution de ce système donne

$$A = - \frac{3\rho g}{4\eta} \frac{R^2}{\ln 2}$$

$$B = - \frac{3\rho g}{4\eta} \frac{R^2}{\ln 2} \ln 2R - \frac{\rho g R^2}{\eta}$$

$$v_3(r) = \frac{-3\rho g}{4\eta} \frac{R^2}{\ln 2} \ln \frac{r}{2R} - \frac{\rho g}{4\eta} (4R^2 - r^2)$$

Résolution de l'équation (2)

$$r^2 \frac{\partial^2 v_0}{\partial r^2} + r \frac{\partial v_0}{\partial r} - v_0 = 0$$

par la méthode d'Euler : $r = e^\xi$; $\xi = \ln r$

$$g(\xi) = v_0(e^\xi) ; v_0(r) = g(\ln r)$$

on obtient $\frac{d^2 g}{d\xi^2} + \underbrace{(1-1)}_0 \frac{dg}{d\xi} - g = 0$ qui a pour solution générale $g(\xi) = (C e^\xi + D e^{-\xi})$ où C et D sont des constantes.

Par le changement de variable inverse $\xi = \ln r$ on obtient

$$v_0(r) = C r + \frac{D}{r}$$

Détermination des constantes C et D

$$\begin{aligned} \text{en } r=R \quad v_0 = \Omega R e_0 &\Rightarrow v_0(R) = \Omega R = C R + \frac{D}{R} \\ r=2R \quad v_0 = 0 &\Rightarrow v_0(2R) = 0 = C 2R + \frac{D}{2R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{ce qui donne } C &= -\frac{\Omega}{3} \\ D &= \frac{4}{3} R^2 \Omega \end{aligned}$$

$$v_0(r) = \frac{\Omega}{3} \left(\frac{4R^2}{r} - r \right)$$

Résolution de l'équation (1)

$$\frac{\partial p}{\partial r} = e \frac{v_0^2}{r} = e \frac{\Omega^2}{3r} \left(\frac{16R^4}{r^2} - 8R^2 + r^2 \right) = \frac{e\Omega^2}{3} \left(\frac{16R^4}{r^3} - \frac{8R^2}{r} + r \right)$$

$$p(r) = \frac{e\Omega^2}{9} \left(-8 \frac{R^4}{r^2} - 8R^2 \ln r + \frac{r^2}{2} \right)$$

5. Calcul du débit volume entre les 2 tubes.

La surface à travers laquelle on calcule le débit volume est un anneau de rayons R et $2R$.

On prend comme orientation de cette surface la normale $\underline{n} = -\underline{e}_z$

$$Q = \int_S \underline{v} \cdot \underline{n} \, ds = - \int_R^{2R} \int_0^{2\pi} v_z \, r \, d\theta \, dr$$

$$= -2\pi \int_R^{2R} \left(\frac{gr^2}{4\eta} + A \ln r + B \right) r \, dr$$

$$= -2\pi \int_R^{2R} \left(\frac{gr^3}{4\eta} + Ar \ln r + Br \right) dr$$

$$= -2\pi \left[\frac{gr^4}{16\eta} + A \frac{r^2}{2} \left(\ln r - \frac{1}{2} \right) + \frac{Br^2}{2} \right]_R^{2R}$$

$$= -2\pi \left[\frac{15gR^4}{16\eta} + A \left(2R^2 \ln 2R - \frac{R^2}{2} \ln R - \frac{3}{4} R^2 \right) + \frac{3}{2} BR^2 \right]$$

6. Calcul du couple \underline{C} à exercer sur le tube intérieur pour le maintenir dans son mouvement de rotation uniforme

Le couple \underline{C} à exercer sur le tube intérieur pour le maintenir en rotation uniforme à la vitesse Ω doit être opposé au couple \underline{C}_w exercé par le fluide sur ce même tube.

$$\underline{C} + \underline{C}_w = \underline{0}$$

En raison de l'axe de symétrie du problème \underline{C}_w (et donc \underline{C}) est dirigé suivant \underline{e}_3 : $\underline{C}_w = C_w \underline{e}_3$

La densité des forces de contact exercées sur le tube intérieur est $\underline{\sigma}(R; \underline{e}_n) = -p(R) \underline{e}_n + \sigma_{n0}(R) \underline{e}_0 + \tau_{n3}(R) \underline{e}_3$

La densité de moment des forces de contact est

$$\begin{aligned} \underline{m} &= \underline{r} \times \underline{\sigma}(R; \underline{e}_n) \\ &= (R \underline{e}_n + z \underline{e}_3) \times (\sigma_{n0}(R) \underline{e}_n + \tau_{n0}(R) \underline{e}_0 + \tau_{n3}(R) \underline{e}_3) \\ &= R \tau_{n0}(R) \underline{e}_3 \end{aligned}$$

En intégrant cette densité de moment sur la surface du tube on obtient

$$\begin{aligned} \underline{C}_w &= \underline{e}_3 \int_0^{2\pi} \int_0^L \underbrace{R \tau_{n0}(R) R}_{\eta \dot{\alpha}_{n0} = -2\eta \frac{D}{R^2}} d\alpha dz \\ &= \underline{e}_3 - 2\eta D \int_0^{2\pi} \int_0^L d\alpha dz = \underline{e}_3 (-4\pi\eta DL) \end{aligned}$$

Des lors on trouve
$$\underline{C} = -\underline{C}_w = 4\pi\eta DL \underline{e}_3 = \frac{8}{3} \pi \eta R^2 \Omega \underline{e}_3$$

7. La puissance fournie au fluide par le tube intérieur est la puissance des forces de contact

$$\begin{aligned}
 P_c &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \underline{\sigma} \cdot \underline{e} (-\underline{e}_r) R \, d\theta \, dz \\
 &= \int_0^L \int_0^{2\pi} (\underbrace{-\Omega R \underline{e}_\theta}_{= -\sigma_{r\theta} \underline{e}_r - \sigma_{\theta r} \underline{e}_\theta - \sigma_{rz} \underline{e}_z}) \cdot \underline{e} (-\underline{e}_r) R \, d\theta \, dz \\
 &= \int_0^L \int_0^{2\pi} -\Omega R^2 \sigma_{r\theta} \, d\theta \, dz \\
 &= \int_0^L \int_0^{2\pi} \Omega R^2 \frac{2\eta D}{R^2} \, d\theta \, dz \\
 &= 4\pi L \eta \Omega D \\
 &= \frac{8}{3} \pi \eta \Omega R^2 \quad \left(= \underbrace{C}_{\downarrow} \cdot \Omega \underline{e}_3 \right)
 \end{aligned}$$

↳ vitesse de rotation
couple à exercer
sur le tube intérieur
(calculé en 6.)

La puissance dissipée dans le fluide est $P_i = \int_V \underline{\sigma} : \underline{d} \, dV = 2\eta \int_V \underline{d} : \underline{d} \, dV$
On peut calculer explicitement cette intégrale, mais on peut aussi utiliser le théorème de l'énergie cinétique, appliqué au volume matériel occupant le système étudié :

$$\frac{dK}{dt} = P_c + P_d - P_i$$

\downarrow
 calculé
 ci-dessus

$$\int_V \rho \underline{g} \cdot \underline{\sigma} \, dV \quad \int_V 2\eta \underline{d} : \underline{d} \, dV \quad \text{(ce qu'on cherche !)}$$

car l'écoulement
est stationnaire et
développé

$$\rho g \int_V v_z \, dV$$

$$\rho g L \int_S v_z \, dS = \rho g L Q$$

↳ débit volume
calculé en 5.

$$\text{donc } P_i = P_c + P_d$$

$$= \frac{8}{3} \pi \eta \Omega R^2 + \rho g L Q$$

Exercice 4

Equations

Le fluide est newtonien et incompressible, donc les équations à résoudre sont les suivantes :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{v} &= 0 \\ \rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} &= \rho \left(\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \end{aligned}$$

Conditions aux frontières

Pour les 3 cas de figure considérés on impose qu'en $x_3 = 0$ on ait :

$$\mathbf{v} = U \cos \omega t \mathbf{e}_1$$

D'autre part, on impose respectivement pour chacun de ces cas :

1. pour $x_3 \rightarrow \infty$, la solution doit être finie,
2. en $x_3 = h$, $\mathbf{v} = \mathbf{0}$,
3. en $x_3 = h$, $\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{e}_3 = -p_a \mathbf{e}_3$.

Hypothèses

On peut supposer que le champ de vitesse et le champ de pression auront les formes suivantes :

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v_1(x_3, t) \mathbf{e}_1 + v_3(x_3, t) \mathbf{e}_3 \\ p &= p(x_3, t) \end{aligned}$$

Résolution

Equation de conservation de la masse :

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_3 = v_3(t)$$

or, en $x_3 = 0$ on a $v_3 = 0$ pour tout temps t , donc on doit avoir $v_3 = 0$.

Equation de conservation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \eta \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \\ 0 &= 0 \\ 0 &= -\frac{\partial p}{\partial x_3} \end{aligned}$$

La pression est donc fonction du temps uniquement : $p = p(t)$, et la composante v_1 vérifie l'équation suivante :

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_3^2} \quad (1)$$

avec $\nu = \eta/\rho$.

Pour résoudre cette équation, on va supposer que la solution v_1 sera une fonction harmonique de fréquence ω , et dont l'amplitude et le déphasage dépendent de x_3 , soit :

$$v_1(x_3, t) = A(x_3) \cos(\omega t + \phi(x_3))$$

Pour ne pas avoir à manipuler des expressions trigonométriques, il est conseillé de travailler avec la représentation complexe de cette solution. En effet :

$$v_1(x_3, t) = A(x_3) \cos(\omega t + \phi(x_3)) = \operatorname{Re}(V_1(x_3)e^{i\omega t}) \quad (2)$$

où $V_1(x_3) = A(x_3)e^{i\phi(x_3)} = V_{1r}(x_3) + iV_{1i}(x_3)$ est un nombre complexe qui caractérise la phase et l'amplitude de la solution.

Nous allons donc dans un premier temps rechercher la solution complexe générale $V_1(x_3)$ qui vérifie l'équation voulue, imposer ensuite les conditions aux limites, et enfin prendre la partie réelle de $V_1(x_3)e^{i\omega t}$ pour obtenir la solution du problème initial.

Si nous injectons l'expression (2) de $v_1(x_3, t)$ dans l'équation (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(i\omega V_1 e^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(\nu V_1'' e^{i\omega t}) &\Rightarrow \operatorname{Re}\left[(\nu V_1'' - i\omega V_1) e^{i\omega t}\right] = 0 \\ &\Rightarrow V_1'' - i\frac{\omega}{\nu} V_1 = 0 \end{aligned}$$

La solution de cette dernière équation est :

$$V_1(x_3) = Ce^{\sqrt{i\frac{\omega}{\nu}}x_3} + De^{-\sqrt{i\frac{\omega}{\nu}}x_3} = Ce^{\alpha(1+i)x_3} + De^{-\alpha(1+i)x_3}$$

avec $\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}}$.

Remarque : on a utilisé la relation suivante : $\sqrt{i} = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1 + i)$.

Pour les 3 cas de figure considérés on impose qu'en $x_3 = 0$ on ait la condition aux limites complexe suivante :

$$v_1(0, t) = \operatorname{Re}(Ue^{i\omega t}) = \operatorname{Re}(V_1(0)e^{i\omega t}) \Rightarrow V_1(0) = C + D = U$$

D'autre part, on impose respectivement pour chacun des cas :

1. $C = 0$ car sinon la solution est infinie lorsque x_3 tend vers l'infini.
On obtient donc simplement que $V_1(0) = D = U$.

La solution finale est donc :

$$v_1(x_3, t) = \operatorname{Re} \left(U e^{-\alpha(1+i)x_3} e^{i\omega t} \right) = U e^{-\alpha x_3} \cos(\omega t - \alpha x_3)$$

2. On doit imposer que $V_1(h) = 0$, d'où le système à résoudre est le suivant :

$$\begin{aligned} V_1(0) = C + D &= U \\ V_1(h) = C e^{\alpha(1+i)h} + D e^{-\alpha(1+i)h} &= 0 \end{aligned}$$

La solution finale est donc :

$$v_1(x_3, t) = \operatorname{Re} \left[\left(C e^{\alpha(1+i)x_3} + D e^{-\alpha(1+i)x_3} \right) e^{i\omega t} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1 - e^{2\alpha(1+i)h}} U \\ D &= \frac{1}{1 - e^{-2\alpha(1+i)h}} U \end{aligned}$$

3. Le tenseur des contraintes est :

$$[\boldsymbol{\sigma}] = [-p\boldsymbol{\delta} + 2\eta\mathbf{d}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ 0 & -p & 0 \\ \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} & 0 & -p \end{bmatrix}$$

On trouve donc que $\boldsymbol{\sigma}^T \cdot \mathbf{e}_3 = \eta \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \mathbf{e}_1 - p_a \mathbf{e}_3$. On doit donc imposer que $p = p_a$ d'une part, et que en $x_3 = h$:

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_3} = 0$$

Le système à résoudre est donc le suivant :

$$\begin{aligned} V_1(0) = C + D &= U \\ V_1'(h) = \alpha(1+i) \left[C e^{\alpha(1+i)h} - D e^{-\alpha(1+i)h} \right] &= 0 \end{aligned}$$

La solution finale est alors :

$$v_1(x_3, t) = \operatorname{Re} \left[\left(C e^{\alpha(1+i)x_3} + D e^{-\alpha(1+i)x_3} \right) e^{i\omega t} \right]$$

avec

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{1 + e^{2\alpha(1+i)h}} U \\ D &= \frac{1}{1 + e^{-2\alpha(1+i)h}} U \end{aligned}$$

Vitesse de l'onde

Une grandeur X qui peut s'écrire comme une fonction $X = g(x)f(x \pm ct)$ se présente comme une onde se propageant avec affaiblissement à une vitesse c .

Nous nous limiterons au premier cas de figure pour lequel on a obtenu :

$$v_1(x_3, t) = U e^{-\alpha x_3} \cos \left[-\alpha \left(x_3 - \frac{\omega}{\alpha} t \right) \right]$$

La vitesse v_1 se propage donc comme une onde de vitesse $c = \frac{\omega}{\alpha} = \sqrt{\frac{2\eta\omega}{\rho}}$.