

EXERCICES SUPPLEMENTAIRES

(A) Interrogation de Mécanique
des Milieux Continus

[I] On décrit le mouvement d'un fluide dans l'espace Euclidien à trois dimensions par la loi

$$\begin{cases} x_1 = X_1 \cos \left[\frac{at}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right] - X_2 \sin \left[\frac{at}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right], \\ x_2 = X_1 \sin \left[\frac{at}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right] + X_2 \cos \left[\frac{at}{\sqrt{X_1^2 + X_2^2}} \right], \\ x_3 = X_3. \end{cases}$$

Les X_i sont les coordonnées matérielles d'une particule, les x_i ses coordonnées spatiales au temps t par rapport au même système d'axes rectangulaires et a est une constante.

- (a) Quelles sont les descriptions Lagrangienne et Eulérienne du vecteur vitesse ?
- (b) La ligne matérielle formée des points de coordonnées X_i telles que $\begin{cases} X_2 = 0, \\ X_3 = 0, \\ X_1 > 0, \end{cases}$ se déforme au cours du temps. Quelles relations lient au temps t les coordonnées spatiales de ses points ?
- (c) Que vaut, en représentation Eulérienne, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (x_1, x_2, x_3) , la variation par unité de temps de sa distance au point fixe $(1, 0, 0)$?
- Indication générale : calculez $(x_1^2 + x_2^2)$.

II Un parallépipède rectangle d'un matériau élastique est immobile sous l'action de contraintes exercées sur ses faces en l'absence de forces de volume.

Le problème est décrit dans un système d'axes rectangulaires Ox_i tel que les faces du parallépipède soient contenues dans les plans $x_1=0$, $x_1=L$, $x_2=0$, $x_2=l$, $x_3=0$ et $x_3=h$, les quantités L , l et h étant strictement positives.

Le problème est un problème de petits déplacements et les tenseurs des contraintes et des déformations infinitésimales sont

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} 3K(x_1-L)(2x_2-l) & \alpha x_2(x_2-l) & 0 \\ \alpha x_2(x_2-l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3K(x_1-L)(2x_2-l) \end{bmatrix}$$

$$\text{et } \underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \varepsilon(1-\nu)(x_1-L)(2x_2-l) & -\varepsilon x_2(x_2-l) & 0 \\ -\varepsilon x_2(x_2-l) & -\varepsilon\nu(x_1-L)(2x_2-l) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les quantités K , α , ε et ν sont constantes. De plus, $\varepsilon > 0$ et $0 < \nu < 1/2$,
 $K > 0$

a) Que doit valoir α pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle ?

b) Quel est le maximum, sur la face du cube d'équation $x_1 = L$, de la contrainte de cisaillement maximum calculée en chacun de ses points ?

c) Quelle est la résultante des contraintes exercées sur cette face ?

d) Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales w_{ij} et le vecteur déplacement u_i si

$$w_{ij}(L, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}) = 0 \text{ et } u_i(L, \frac{L}{2}, \frac{h}{2}) = 0?$$

e) Que vaut, en fonction des x_i , le rapport entre la masse spécifique du matériau après déformation (ρ) et sa masse spécifique avant déformation (ρ_0) ?

f) Quelle est la région du solide où les petites fibres matérielles parallèles à l'axe Ox_1 ont tendance à s'allonger localement ?

Interrogation de mécanique des milieux continus : solutions.

I.) a) $V_i(X_k, t) = \frac{\partial X_i(X_k, t)}{\partial t} \Big|_{X_k}$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1(X_k, t) = -\frac{a}{X_1^2 + X_2^2} \left\{ X_1 \sin \frac{at}{X_1^2 + X_2^2} + X_2 \cos \frac{at}{X_1^2 + X_2^2} \right\} \\ V_2(X_k, t) = \frac{a}{X_1^2 + X_2^2} \left\{ X_1 \cos \frac{at}{X_1^2 + X_2^2} - X_2 \sin \frac{at}{X_1^2 + X_2^2} \right\} \\ V_3(X_k, t) = 0 \end{cases}$$

$v_i(x_j, t) = V_i(X_k(x_j, t), t)$

$$\Rightarrow \begin{cases} v_1(x_j, t) = -\frac{ax_2}{x_1^2 + x_2^2} & \text{car } x_1^2 + x_2^2 = X_1^2 + X_2^2 \\ v_2(x_j, t) = \frac{ax_1}{x_1^2 + x_2^2} \\ v_3(x_j, t) = 0 \end{cases}$$

b) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos At & -\sin At & 0 \\ \sin At & \cos At & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix}$

avec $A = \frac{a}{x_1^2 + x_2^2} = \frac{a}{X_1^2 + X_2^2}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos At & \sin At & 0 \\ -\sin At & \cos At & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Donc $\begin{cases} X_2 = 0 \\ X_3 = 0 \\ X_1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 \sin \frac{at}{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \cos \frac{at}{x_1^2 + x_2^2} \stackrel{!}{=} 0 \\ x_3 = 0 \\ x_1 \cos \frac{at}{x_1^2 + x_2^2} + x_2 \sin \frac{at}{x_1^2 + x_2^2} > 0 \end{cases}$

$$c) \quad d = [(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}$$

$$\frac{Dd}{Dt} = \frac{\partial d}{\partial t} \Big|_{x_i} + v_i(x_j, t) \frac{\partial d}{\partial x_i} \Big|_x$$

$$= 0 + v_1(x_j, t) \frac{x_1-1}{d} + v_2(x_j, t) \frac{x_2}{d}$$

$$= \frac{-ax_2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{x_1-1}{d} + \frac{ax_1}{x_1^2 + x_2^2} \frac{x_2}{d} = \frac{ax_2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{1}{d}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{Dd}{Dt} = \frac{ax_2}{x_1^2 + x_2^2} \frac{1}{[(x_1-1)^2 + x_2^2 + x_3^2]^{1/2}}}$$

II.) a) les équations d'équilibre sont :

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

$$i=1 : \quad 3K(2x_2-l) + a(2x_2-l) = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{a = -3K}$$

$$i=2 : \quad 0 = 0$$

$$i=3 : \quad 0 = 0$$

$$b) \quad x_1 = L \Rightarrow \underline{\sigma} = \begin{pmatrix} 0 & ax_2(x_2-l) & 0 \\ ax_2(x_2-l) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $a = -3K$

Calculons les contraintes principales :

$$(-\sigma) \left(\sigma^2 - (-3Kx_2(x_2-l))^2 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \sigma_I = 3Kx_2(x_2-l) \quad ; \quad \sigma_{II} = 0 \quad ; \quad \sigma_{III} = -3Kx_2(x_2-l)$$

\Rightarrow contrainte de cisaillement maximum : $\tau = -3Kx_2(x_2-l)$

$$\text{et maximum de } \tau = \boxed{3K \frac{l^2}{4}} \quad \left(x_2 = \frac{l}{2} \right)$$

$$c) \quad \underline{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$t_i = \sigma_{ji} n_j \Rightarrow \underline{t} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3Kx_2(x_2-l) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{R} = \int \underline{t} \, d\sigma = \int_0^h dx_3 \int_0^l \underline{t} \, dx_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ hK \frac{l^3}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$d) \quad d\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

$$\Rightarrow d\omega_{13} = d\omega_{23} = 0 \Rightarrow \underline{\omega}_{13} = \underline{\omega}_{23} = 0$$

$$d\omega_{12} = \varepsilon(1-\nu) \left\{ 2(x_1-l) dx_1 - (2x_2-l) dx_2 \right\}$$

$$\Rightarrow \underline{\omega}_{12} = \varepsilon(1-\nu) \left((x_1-l)^2 - (x_2 - \frac{l}{2})^2 \right)$$

$$\text{car } \omega_{ij}(L, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}) = 0$$

$$d\mu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} dx_j = (\omega_{ij} + \varepsilon_{ij}) dx_j$$

$$d\mu_1 = \left[\varepsilon(1-\nu) \left\{ (x_1-l)^2 - (x_2 - \frac{l}{2})^2 \right\} - \varepsilon x_2(x_2-l) \right] dx_2 \\ + \varepsilon(1-\nu)(x_1-l)(2x_2-l) dx_1$$

$$\Rightarrow \underline{\mu}_1 = \varepsilon(1-\nu)(x_1-l)^2(x_2 - \frac{l}{2}) - \varepsilon \left(\frac{2-\nu}{3} \right) (x_2 - \frac{l}{2})^3 \\ + \varepsilon \frac{l^4}{4} (x_2 - \frac{l}{2})$$

$$d\mu_2 = \left[-\varepsilon x_2(x_2-l) - \varepsilon(1-\nu)(x_1-l)^2 + \varepsilon(1-\nu)(x_2 - \frac{l}{2})^2 \right] \\ dx_1 + dx_2 \left[-\varepsilon\nu(x_1-l)(2x_2-l) \right]$$

$$\Rightarrow \underline{\mu}_2 = -\varepsilon\nu(x_1-l)(x_2 - \frac{l}{2})^2 + \varepsilon \frac{l^2}{4}(x_1-l) - \varepsilon \frac{1-\nu}{3}(x_1-l)^3$$

$$d\mu_3 = 0 \Rightarrow \underline{\mu}_3 = 0 \quad \text{car } \mu_i(L, \frac{l}{2}, \frac{l}{2}) = 0$$

$$e) \quad \frac{p}{p_0} = 1 - \varepsilon_{mm} = \underline{1 - \varepsilon(1-2\nu)(x_1-L)(2x_2-l)}$$

f) allongement si $\varepsilon_{11} > 0$

c.a.d. si $\varepsilon(1-\nu)(x_1-L)(2x_2-l) > 0$

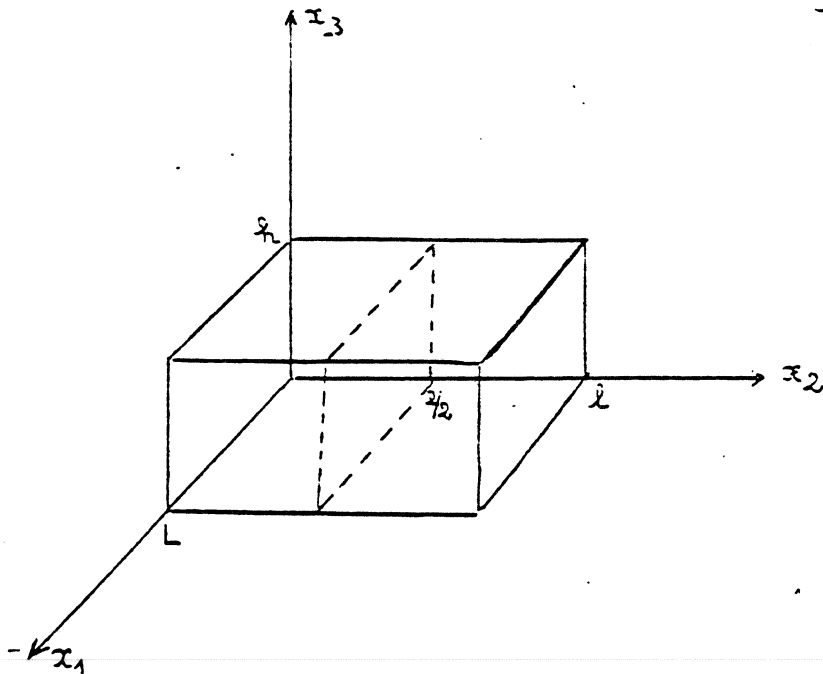
$$\text{or } \begin{cases} \varepsilon > 0 \\ 1-\nu > 0 & \text{car } 0 < \nu < \frac{1}{2} \\ x_1-L \leq 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_2-l < 0 \\ x_1 \neq L \end{cases}$$

c.a.d.

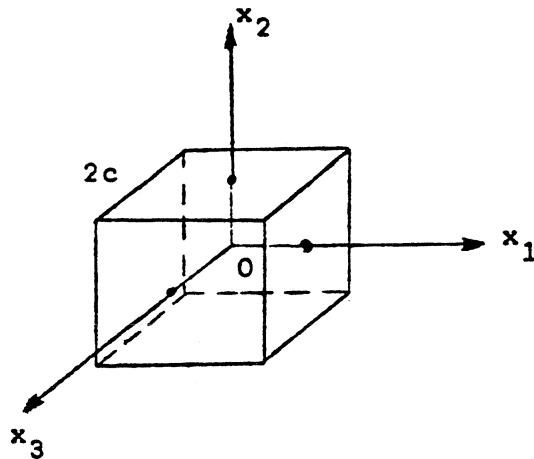
$x_2 < \frac{l}{2}$

at $x_1 \neq L$



(B)

Exercice I.



Un corps solide de forme cubique de côté $2c$ est maintenu immobile sous tension en l'absence de forces à distance.

Le tenseur des contraintes qui en résulte est

$$[\sigma_{ij}] = \begin{pmatrix} a(x_1 - c)x_2 & -b(x_2^2 - c^2) & 0 \\ -b(x_2^2 - c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a et b étant des constantes.

- Déterminer b en fonction de a pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle.
- Quelles sont la résultante et le moment résultant des forces de contact agissant sur la face $x_1 = -c$?
- Quelle est la région du solide où les petits éléments d'aire perpendiculaires à \underline{e}_1 sont en compression à cause des forces de contact agissant sur eux ? (La constante a est > 0).
- Quelle est la contrainte de cisaillement maximum dans tout le solide ? En quel(s) point(s) et pour quelle(s) direction(s) est-elle atteinte ?

a) Les équations d'équilibre $\frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0$

n'écrivent ($f_i = 0$) :

$$\begin{cases} ax_2 - 2bx_2 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

La condition est donc $b = a/2$.

b) La normale sortante est $-\underline{e}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Le vecteur position (courant) est $\begin{bmatrix} -c \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

Le vecteur des forces de contact est, par $t_i = T_{ji} n_j$,

$$\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2acx_2 & -b(x_2^2 - c^2) & 0 \\ -b(x_2^2 - c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2acx_2 \\ -\frac{a}{2}(x_2^2 - c^2) \\ 0 \end{bmatrix}$$

La densité de moment est $\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -c \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}x_3(x_2^2 - c^2) \\ -2acx_2x_3 \\ \frac{ac}{2}(x_2^2 - c^2) + 2acx_2^2 \end{bmatrix}$

La résultante et le moment résultant sont donc :

$$\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} = \int_{-c}^c \int_{-c}^c \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} dx_2 dx_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{4}{3}ac^4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

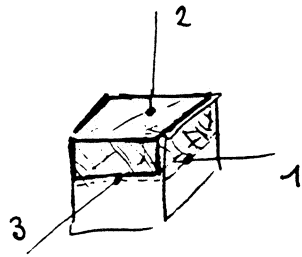
$$\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \int_{-c}^c \int_{-c}^c \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{bmatrix} dx_2 dx_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3}ac^5 \end{bmatrix}$$

③ C'est la région où $\sigma_{11} < 0$,

c.à.d. où $a(x_1 - c)x_2 < 0$.

Comme $x_1 \leq c$ dans tout le solide,

la région est $\begin{cases} x_1 \neq c \\ x_2 > 0 \end{cases}$.



④ Les contraintes principales se tirent de

$$\begin{vmatrix} a(x_1 - c)x_2 - \sigma & -b(x_2^2 - c^2) & 0 \\ -b(x_2^2 - c^2) & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

$$\text{ou } -\sigma (\sigma^2 - a(x_1 - c)x_2 \sigma - b^2(x_2^2 - c^2)^2) = 0,$$

$$\text{soit } \sigma_{\text{I,II,III}} = \begin{cases} 0 \\ \frac{a}{2}(x_1 - c)x_2 \pm \sqrt{\frac{a^2}{4}(x_1 - c)^2 x_2^2 + b^2(x_2^2 - c^2)^2} \end{cases}$$

⑤ Comme l'expression $\sqrt{\dots}$ dépasse la valeur absolue du terme $\frac{a}{2}(x_1 - c)x_2$, il est clair qu'avec le classement

$\sigma_{\text{III}} \leq \sigma_{\text{II}} \leq \sigma_{\text{I}}$ on doit avoir $\sigma_{\text{II}} = 0$ et par

$$\text{conséquent } \sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_{\text{I}} - \sigma_{\text{III}}}{2} = \sqrt{\frac{a^2}{4}(x_1 - c)^2 x_2^2 + b^2(x_2^2 - c^2)^2}.$$

C'est la contrainte de cisaillement maximum en un point, qu'il faut encore maximiser dans le solide, c.à.d. en fonction de (x_1, x_2) .

Un tel maximum s'obtient soit sur la frontière, soit là où les dérivées sont nulles.

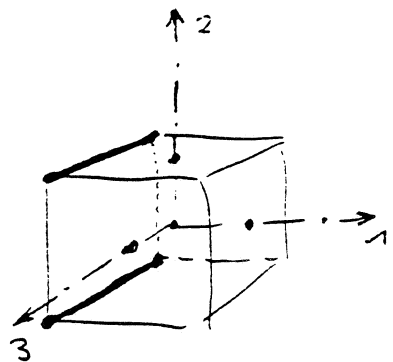
Il est clair qu'ici il faudra prendre $x_1 = -c$,

ce qui donne $\max_{x_1} (\tau_{\max}) = \frac{a}{2} \sqrt{4c^2 x_2^2 + (x_2^2 - c^2)^2}$

$$= \frac{a}{2} (x_2^2 + c^2)$$

Par conséquent, $\max_{x_1, x_2} (\tau_{\max}) = a c^2$,

pour $x_1 = -c$ et $x_2 = \pm c$,
c.-à-d. sur les arêtes indiquées.



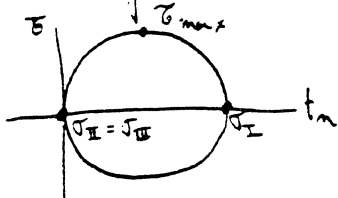
Pour ces valeurs de (x_1, x_2) , le tenseur des

contraintes est $[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} \mp 2ac^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

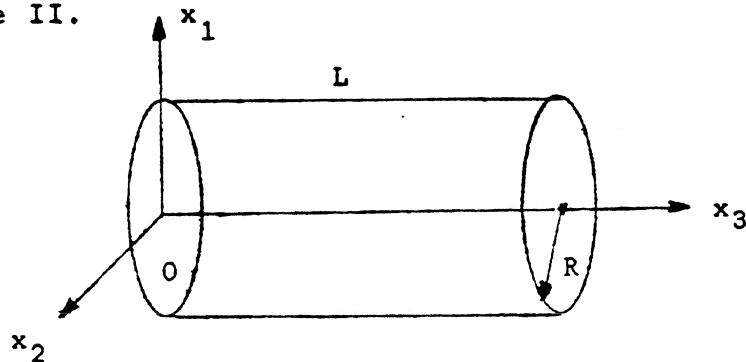
Comme il a une forme diagonale, les vecteurs et valeurs propres s'obtiennent immédiatement :

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\text{I}} = \mp 2ac^2 \\ \sigma_{\text{II}} = \sigma_{\text{III}} = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \rightarrow \text{vecteur propre associé: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \\ \rightarrow \text{de là, tout vecteur de la forme } \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} \\ \text{est un vecteur propre associé.} \end{array}$$

Le diagramme du cercle de Mohr se réduit à un cercle et on sait que la direction de la facette pour laquelle τ_{\max} est obtenue est à 45° avec les directions principales: $\underline{n} = \pm \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} \pm 1 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix}$.



Exercice II.



Une poutre cylindrique de longueur L et de rayon R est fléchie sous l'action de contraintes exercées en ses deux extrémités.

Il s'agit d'un problème de petits déplacements et le tenseur des déformations infinitésimales qui en résulte est :

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{pmatrix} -4\varepsilon(x_3-L)x_1 & 0 & \varepsilon(7(R^2-x_1^2)-x_2^2) \\ 0 & -4\varepsilon(x_3-L)x_1 & -6\varepsilon x_1 x_2 \\ \varepsilon(7(R^2-x_1^2)-x_2^2) & -6\varepsilon x_1 x_2 & 16\varepsilon(x_3-L)x_1 \end{pmatrix},$$

ε étant une constante suffisamment petite ($\varepsilon > 0$).

a) Les petites fibres matérielles issues de points de l'axe Ox_3 et de directions $\frac{\sqrt{2}}{2}(\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$ ou $\frac{\sqrt{2}}{2}(-\underline{e}_1 + \underline{e}_3)$ se sont-elles allongées ou rétrécies lors du passage de la configuration au repos à la configuration sous contraintes ? De combien ?

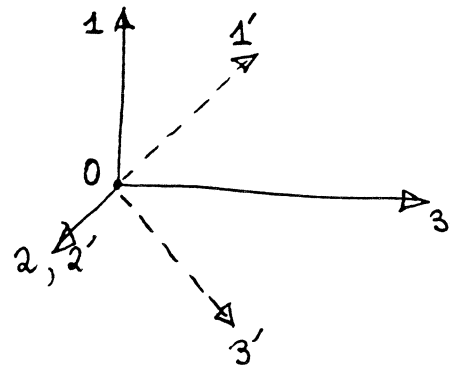
b) Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales, le vecteur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement, si on impose qu'ils soient nuls en $(0,0,0)$?

a) Le long de l'axe Ox_3 , $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ et

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \varepsilon R^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma \varepsilon R^2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Pour orienter les axes parallèlement aux fibres, il faut faire un changement de base de matrice

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}.$$



On trouve, par $\varepsilon'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \varepsilon_{kl}$,

$$\begin{aligned} [\varepsilon'_{ij}] &= [a_{ij}] [\varepsilon_{ij}] [a_{ij}]^T \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \gamma \varepsilon R^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ \gamma \varepsilon R^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \gamma \varepsilon R^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma \varepsilon R^2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Comme $\varepsilon'_{11} > 0$ et $\varepsilon'_{33} < 0$, les petites fibres parallèles à

$$\begin{cases} \underline{e}'_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (\underline{e}_1 + \underline{e}_3) \\ \underline{e}'_3 = \frac{\sqrt{2}}{2} (-\underline{e}_1 + \underline{e}_3) \end{cases} \text{ ont tendance}$$

à s'allonger localement,
à se rétrécir

$$\begin{aligned} \textcircled{b} \quad d\omega_{12} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_1} \right) dx_k \\ &= -2\varepsilon x_2 dx_3 + 4\varepsilon(x_3 - L) dx_2 + 6\varepsilon x_2 dx_3 \\ &= d(4\varepsilon x_2(x_3 - L)) \end{aligned}$$

Donc $\omega_{12} = 4\varepsilon x_2(x_3 - L)$ (nul en 0).

$$\begin{aligned} \text{Ensuite} \quad d\omega_{13} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_1} \right) dx_k \\ &= -4\varepsilon x_1 dx_1 + 14\varepsilon x_1 dx_2 + 6\varepsilon x_2 dx_2 - 16\varepsilon(x_3 - L) dx_3 \\ &= d(5\varepsilon x_1^2 + 3\varepsilon x_2^2 - 8\varepsilon(x_3^2 - 2Lx_3)) \end{aligned}$$

Donc $\omega_{13} = 5\varepsilon x_1^2 + 3\varepsilon x_2^2 - 8\varepsilon x_3(x_3 - 2L)$ (nul en 0).

$$\begin{aligned} \text{On a aussi} \quad d\omega_{23} &= \left(\frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_2} \right) dx_k \\ &= -4\varepsilon x_1 dx_2 + 2\varepsilon x_2 dx_1 + 6\varepsilon x_1 dx_2 \\ &= d(2\varepsilon x_1 x_2) \end{aligned}$$

Donc $\omega_{23} = 2\varepsilon x_1 x_2$ (nul en 0).

$$\text{Comme} \quad \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = [\varepsilon_{ij}] + [\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} -4\varepsilon(x_3 - L)x_1 & 4\varepsilon x_2(x_3 - L) & \varepsilon(x_3^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2) \\ -4\varepsilon x_2(x_3 - L) & -4\varepsilon(x_3 - L)x_1 & -4\varepsilon x_1 x_2 \\ \varepsilon(7R^2 - 12x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_3(x_3 - 2L)) & -8\varepsilon x_1 x_2 & 16\varepsilon(x_3 - L)x_1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{on a} \quad du_1 &= -4\varepsilon(x_3 - L)x_1 dx_1 + 4\varepsilon x_2(x_3 - L) dx_2 + \varepsilon(7R^2 - 2x_1^2 + 2x_2^2 - 8\varepsilon x_3(x_3 - 2L)) dx_3 \\ &= d \left\{ \varepsilon \left[2(x_3 - L)(x_2^2 - x_1^2) + 7R^2 x_3 - 8 \left(\frac{x_3^3}{3} - Lx_3^2 \right) \right] \right\} \end{aligned}$$

Donc $u_1 = \varepsilon \left[2(x_3 - L)(x_2^2 - x_1^2) + 7R^2 x_3 - 8x_3^2 \left(\frac{x_3}{3} - L \right) \right]$,
qui est bien nul en 0.

De même,
$$du_2 = -4\varepsilon x_2(x_3 - L)dx_1 - 4\varepsilon(x_3 - L)x_1 dx_2 - 4\varepsilon x_1 x_2 dx_3$$

$$= d(-4\varepsilon x_1 x_2 (x_3 - L)) .$$

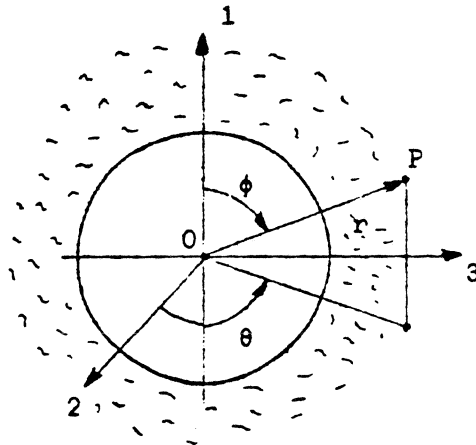
Donc $u_2 = -4\varepsilon x_1 x_2 (x_3 - L)$, nul en 0.

Enfin,
$$du_3 = \varepsilon(7R^2 - 12x_1^2 - 4x_2^2 + 8x_3(x_3 - 2L))dx_1 - 8\varepsilon x_1 x_2 dx_2 + 16\varepsilon(x_3 - L)x_1 dx_3$$

$$= d\left\{ \varepsilon(7R^2 x_1 - 4x_1(x_1^2 + x_2^2) + 8x_1 x_3(x_3 - 2L)) \right\}$$

et $u_3 = \varepsilon(7R^2 - 4(x_1^2 + x_2^2))x_1 + 8x_1 x_3(x_3 - 2L)$.

Exercice III.



Un fluide s'écoule en contournant une sphère de rayon R .
Le champ de vitesses qui en résulte est :

$$\begin{cases} v_r = U \cos \phi \left(1 + \frac{R^3}{2r^3} - \frac{3R}{2r} \right) , \\ v_\phi = U \sin \phi \left(-1 + \frac{R^3}{4r^3} + \frac{3R}{4r} \right) , \\ v_\theta = 0 , \end{cases}$$

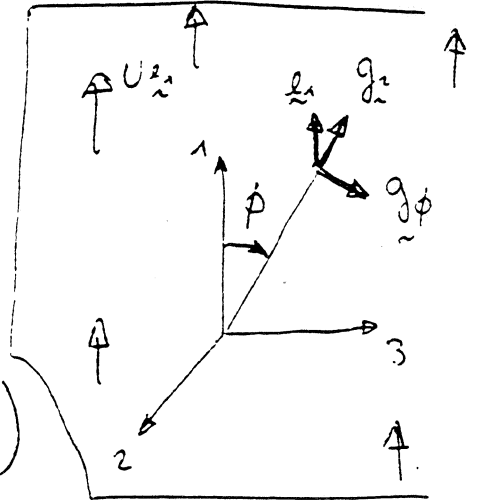
U étant une constante positive.

- Quelle est la vitesse à grande distance du centre de la sphère ? Interpréter.
- Si la masse spécifique du fluide est ρ_0 (constante) à l'infini en amont de toutes les trajectoires, quelle est sa valeur dans le fluide en fonction des coordonnées du point où on l'observe ?
- Quel est le système d'équations différentielles à partir duquel on pourrait chercher les équations des trajectoires ?
- En différents points on trace à un instant dans le fluide deux très petites lignes de colorant, l'une de direction \underline{g}_r et l'autre de direction \underline{g}_ϕ . Dans quelle région ont-elles tendance à se rapprocher angulairement dans les instants qui suivent ? Dans quelle région à s'éloigner ? A quelle vitesse angulaire ?

① A grande distance du centre de la sphère, on a $r \gg R$.

$$\text{Donc } \begin{cases} v_r(\infty) = U \cos \phi \\ v_\phi(\infty) = -U \sin \phi \\ v_\theta(\infty) = 0 \end{cases}$$

$$\text{Donc } \underline{v}(\infty) = U (\cos \phi \underline{g}_r - \sin \phi \underline{g}_\phi) \\ = U \underline{e}_1$$



Il s'agit donc d'un écoulement uniforme à l'infini, de vitesse U , de direction \underline{e}_1 .

② La conservation de la masse s'écrit

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \underline{v} = 0$$

$$\text{Mais } \operatorname{div} \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \\ + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r \tan \phi} v_\phi = 0$$

(après calculs).

Donc $\frac{D\rho}{Dt} = 0$ et ρ est une constante sur chaque trajectoire (en Lagrangien, $\rho = \rho(\underline{x})$).

Donc $\rho = \rho_0$ partout.

③ Comme l'écoulement est stationnaire, les trajectoires sont les lignes de courant, mais l'écriture en coordonnées sphériques des équations correspondantes est délicate.

En sphériques, le gradient est $(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi}, \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta})$.

Comme $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\text{grad}} = \frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$,

on trouve, par calculs en Eulérien:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{D_r}{Dt} = v_r \\ \frac{D_\phi}{Dt} = \frac{1}{r} v_\phi \\ \frac{D_\theta}{Dt} = \frac{1}{r \sin \phi} v_\theta \end{array} \right.$$

On en déduit le système différentiel cherché:

$$\frac{dr}{v_r} = \frac{r d\phi}{v_\phi} = \frac{r \sin \phi d\theta}{v_\theta} = dt$$

En intégrant, on pourrait trouver une représentation lagrangienne du mouvement (et donc des trajectoires)

$$r = r(\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{O}, t), \quad \phi = \phi(\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{O}, t), \quad \theta = \theta(\mathbb{R}, \mathbb{I}, \mathbb{O}, t).$$

④ La vitesse angulaire de rapprochement entre de telles fibres est donnée par $2 d_{r\phi}$.

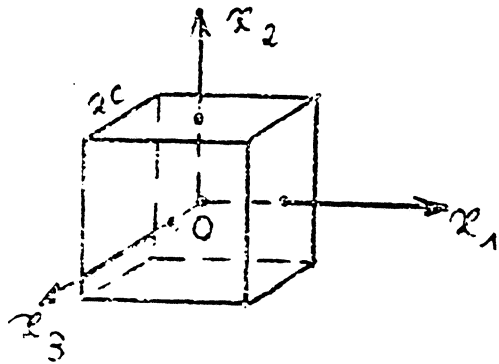
$$\begin{aligned} \text{On a } 2 d_{r\phi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi}{r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial r} \\ &= -\frac{3}{2} U \sin \phi \frac{R^3}{r^4} \end{aligned}$$

Comme $U > 0$, $r > 0$ et $\sin \phi > 0$, sauf sur l'axe 1 (car $0 \leq \phi \leq \pi$), on constate qu'il y a éloignement angulaire partout, sauf sur cet axe, à la vitesse $2 d_{r\phi}$.

(C)

Interrogation de Mécanique des Milieux Continus

I



Un corps solide de forme cubique de côté $2c$ est maintenu immobile sous tension en l'absence de forces à distance.

Le problème est un problème de petits déplacements et les tenseurs des contraintes et des déformations infinitésimales sont :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha(x_1^2 - x_2^2) \\ 0 & 0 & \beta x_1 x_2 \\ \alpha(x_1^2 - x_2^2) & \beta x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{et } [\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha(x_1^2 - x_2^2) \\ 0 & 0 & -2\alpha x_1 x_2 \\ \alpha(x_1^2 - x_2^2) & -2\alpha x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix},$$

α , α et β étant des constantes ($\alpha > 0$ et $\alpha > 0$)

(a) Déterminer β en fonction de α pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle.

(b) Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales, le vecteur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement si on impose qu'ils soient nuls en $(0,0,0)$?

(c) Quelle est la résultante des contraintes,

exercées sur la face d'équation $x_3 = -c$?

(d) En chaque point du solide, on considère deux petites fibres matérielles parallèles, avant déformation, l'une à x_1 , l'autre à x_3 .

Dans quelle région se sont-elles rapprochées angulairement à cause de la déformation ?

(e) Quel est le maximum dans tout le solide de la contrainte de cisaillement maximum en chacun de ses points ?

En quel(s) point(s) ce maximum est-il atteint ?

① Equations d'équilibre : $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0$.

Donc
$$\begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 2\alpha x_1 + \beta x_1 = 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad \beta = -2\alpha$$

② $d\omega_{12} = -2\alpha x_2 dx_3 + 2\alpha x_2 dx_3 = 0$
 $\rightarrow \omega_{12} = 0$

$d\omega_{23} = 2\alpha x_2 dx_1 + 2\alpha x_1 dx_2 = d(2\alpha x_1 x_2)$

$\rightarrow \omega_{23} = 2\alpha x_1 x_2$

$d\omega_{31} = 2\alpha x_1 dx_1 - 2\alpha x_2 dx_2 = d(a(x_1^2 - x_2^2))$

$\rightarrow \omega_{31} = a(x_1^2 - x_2^2)$

Donc
$$[\omega_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a(x_1^2 - x_2^2) \\ 0 & 0 & 2\alpha x_1 x_2 \\ a(x_1^2 - x_2^2) & -2\alpha x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Le vecteur des rotations infinitésimales est

$$\begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2\alpha x_1 x_2 \\ a(x_2^2 - x_1^2) \\ 0 \end{bmatrix} \quad \left(= \begin{bmatrix} \omega_{32} \\ \omega_{13} \\ \omega_{21} \end{bmatrix} \right)$$

Le gradient de déplacements est $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$:

$$\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha(x_1^2 - x_2^2) & -4\alpha x_1 x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

Donc
$$\begin{cases} du_1 = 0 \\ du_2 = 0 \\ du_3 = 2a(x_1^2 - x_2^2) dx_1 - 4ax_1 x_2 dx_2 \end{cases}$$

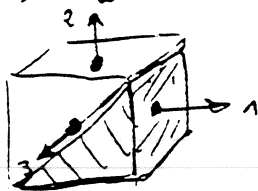
et
$$\begin{cases} u_1 = 0 \\ u_2 = 0 \\ u_3 = 2a\left(\frac{x_1^3}{3} - x_1 x_2^2\right) \end{cases} \quad (\text{nul en } O).$$

② $\underline{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ et $\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$
 donc $\underline{t}(\underline{x}, t, \underline{m}) = \begin{bmatrix} 2(x_1^2 - x_2^2) \\ -2ax_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Donc
$$\underline{R} = \int_{-c}^c \int_{-c}^c \begin{bmatrix} 2(x_1^2 - x_2^2) \\ -2ax_1 x_2 \\ 0 \end{bmatrix} dx_1 dx_2$$

$$= \int_{-c}^c \begin{bmatrix} 2\left(\frac{c^3}{3} - 2x_2^2 c\right) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} dx_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

③ C'est la région $\varepsilon_{13} > 0$, ou $a(x_1^2 - x_2^2) > 0$,
 c.-à-d. $x_1^2 > x_2^2$ ou $|x_1| > |x_2|$.



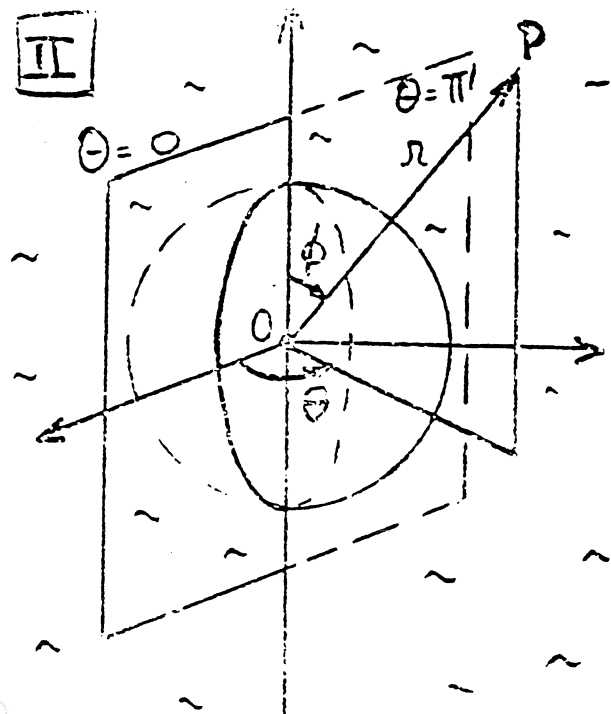
④ $\sigma_{I,II,III}$ sont solutions de
$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & 2(x_1^2 - x_2^2) \\ 0 & -\sigma & -2ax_1 x_2 \\ 2(x_1^2 x_2^2) & -2ax_1 x_2 & -\sigma \end{vmatrix} = 0,$$

soit de
$$-\sigma^3 - \sigma(2^2(x_1^2 - x_2^2)^2 + 4x_1^2 x_2^2) = 0,$$

Donc, en un point
$$\begin{cases} \sigma_I = 2(x_1^2 + x_2^2) \\ \sigma_{II} = 0 \\ \sigma_{III} = -2(x_1^2 + x_2^2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \tau_{\max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} = 2(x_1^2 + x_2^2)$$

et $\max_{(x_1, x_2)} (\tau_{\max}) = 2 \times c^2$ pour $x_1 = \pm c, x_2 = \pm c$ (4 axes).

II



Un fluide s'écoule en contournant une sphère de rayon R .

Le champ de vitesses qui en résulte est

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega R^3 \frac{\sin \phi}{r^2} \end{bmatrix},$$

le tenseur des contraintes est

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3\mu\Omega R^3 \frac{\sin \phi}{r^3} \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\mu\Omega R^3 \frac{\sin \phi}{r^3} & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Ω et μ étant des constantes > 0 .

a) Quelles sont géométriquement les trajectoires des points matériels ?

Si on prend pour configuration de référence la configuration en $t=0$ ($\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0(0)$), trouver la description Lagrangienne du mouvement :

$$\begin{cases} r = \chi_r (\mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{H}, t), \\ \phi = \chi_\phi (\mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{H}, t), \\ \theta = \chi_\theta (\mathbb{R}, \mathbb{F}, \mathbb{H}, t). \end{cases}$$

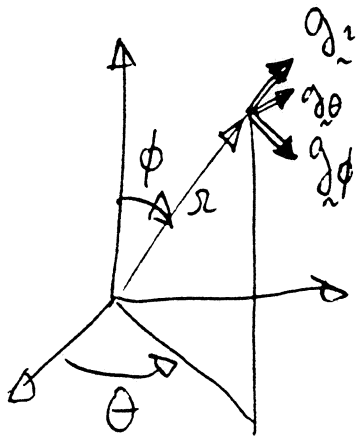
⑥ Peut-il s'agir de l'écoulement d'un fluide incompressible ?

⑦ Quelles sont les forces de contact exercées par unité de surface par le fluide sur la sphère ?

Quels sont les moments par rapport à O de ces forces par unité de surface ?

⑧ Que veut, en représentation Eulérienne, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, θ, ϑ) , la variation par unité de temps de sa distance au plan fixe d'équation $\vartheta = 0$, $\vartheta = \pi$?

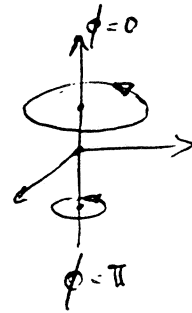
(a)



Le vecteur vitesse est

$$\begin{aligned} \underline{v} &= v_r \underline{g}_r + v_\phi \underline{g}_\phi + v_\theta \underline{g}_\theta \\ &= \Omega R^3 \frac{\sin\phi}{R^2} \underline{g}_\theta \end{aligned}$$

Comme l'écoulement est stationnaire, les trajectoires sont les lignes de courant. Celles-ci, tangentes en chaque point à la vitesse, sont manifestement des cercles de centre sur l'axe $\phi=0, \phi=\pi$ et de plan perpendiculaire à cet axe.



Il est alors clair que la description Lagrangienne est du type $r = c^{te}$ et $\phi = c^{te}$, car on a ainsi l'équation de ces cercles. D'autre part, la vitesse angulaire est $\frac{D\theta}{Dt} = \frac{v_\theta}{r \sin\phi}$, car le rayon du cercle est $(r \sin\phi)$. Comme r et ϕ sont constants, v_θ et $\frac{D\theta}{Dt}$ le sont aussi et l'intégration dans le temps de $\frac{D\theta}{Dt}$ est du type $\theta = t \frac{D\theta}{Dt} + c^{te}$.

Enfin, les constantes sont nécessairement les valeurs en $t=0$.

Enfinement, la description Lagrangienne est

$$\left\{ \begin{aligned} r &= R \\ \phi &= \Phi \\ \theta &= t \Omega R^3 \frac{\sin\Phi}{R^2} \frac{1}{R \sin\Phi} + \Theta \end{aligned} \right. \quad (H)$$

$$= (H) + \Omega t R^3 / R^3 .$$

⑥ Il peut s'agir d'un fluide incompressible si l'écoulement est isochore, c.-à-d. si et seulement si la contrainte cinématique correspondante $\text{div } \underline{v} = 0$ est satisfaite.

$$\text{On a } \text{div } \underline{v} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2}{r} v_r + \frac{1}{r \tan \phi} v_\phi = 0.$$

○ Donc il peut bien s'agir d'un fluide incompressible.

⑦ A la surface de la sphère, $r = R$ et $\underline{n} = \underline{e}_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Donc, par $t_i = \sigma_{ji} n_j$, on trouve :

$$\begin{bmatrix} t_r \\ t_\phi \\ t_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3\mu \Omega \sin \phi \\ 0 & 0 & 0 \\ -3\mu \Omega \sin \phi & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\mu \Omega \sin \phi \end{bmatrix}$$

○ qui sont la densité des forces de contact exercées par le fluide sur la sphère.

Le moment de ces forces est $\underline{m} = \underline{x} \times \underline{t}$.

Comme le vecteur \underline{x} est $\underline{x} = R \underline{e}_r = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, la

densité de moment est :

$$\underline{m} = \begin{bmatrix} m_r \\ m_\phi \\ m_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -3\mu \Omega \sin \phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3\mu \Omega R \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}.$$

(d) Cette distance est $d = r \sin \phi \sin \theta$.

La variation par unité de temps de d est $\frac{Dd}{Dt}$.

Le calcul d'une dérivée matérielle doit être fait attentivement en sphériques. Comme on a,

en Cartésiennes, $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_i \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla}$,

il suffit de prendre l'expression du gradient $\underline{\nabla}$

en sphériques: $\underline{\nabla} f = \begin{bmatrix} \partial f / \partial r \\ \frac{1}{r} \partial f / \partial \phi \\ \frac{1}{r \sin \phi} \partial f / \partial \theta \end{bmatrix}$.

En appliquant cette formule à d ,

on trouve $\underline{\nabla} d = \begin{bmatrix} \sin \phi \sin \theta \\ \cos \phi \sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$.

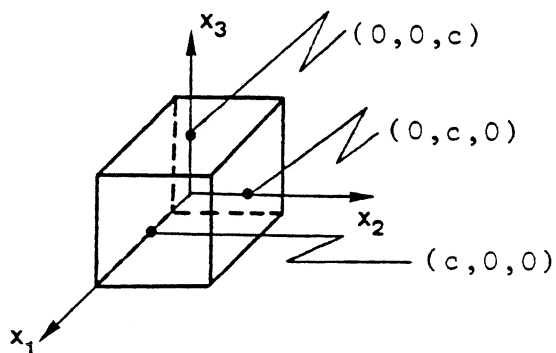
$$\text{Donc } \frac{Dd}{Dt} = \frac{\partial d}{\partial t} + \cancel{v_r} \sin \phi \sin \theta + \cancel{v_\phi} \cos \phi \sin \theta + v_\theta \cos \theta$$

$$= \Omega R^3 \frac{\sin \phi \cos \theta}{R^2}$$

(D)

Interrogation de Mécanique des Milieux Continus.

Exercice I.



Un corps solide de forme cubique de côté $2c$ est maintenu immobile sous tension en l'absence de forces à distance.

Le tenseur des contraintes qui en résulte est

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} a(x_1 - c)x_2 & -b(x_2^2 - c^2) & 0 \\ -d(x_2^2 - c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

a, b, d étant des constantes ($a > 0$).

- Déterminer b et d en fonction de a pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle.
- Quel est le moment résultant par rapport à l'origine des forces de contact agissant sur la face $x_1 = -c$. (Donner les résultats sous forme d'intégrales avec les bornes adéquates mais ne pas effectuer l'intégration).
- Quelle est la région du solide où les petits éléments d'aire perpendiculaires à e_1 sont en compression à cause des forces de contact agissant sur eux.
- Soit, au point de coordonnées $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{c}{2}, \frac{c}{2}, \frac{c}{2})$, un petit élément d'aire de normale sortante \vec{n} de composantes $(n_1, n_2, n_3) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$. Quelle est la norme de la composante tangentielle de la force de contact exercée sur cet élément d'aire ?

Exercice II.

Sous les mêmes hypothèses que dans l'exercice I, le champ de déformations de la configuration sous contraintes à la configuration étudiée est

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1(x_1-c)x_2 & -\frac{\varepsilon_2}{2}(x_2^2-c^2) & 0 \\ -\frac{\varepsilon_2}{2}(x_2^2-c^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} ;$$

ε_1 et ε_2 sont deux constantes positives suffisamment petites pour qu'il s'agisse d'un problème de petits déplacements.

a) Quel est le rapport entre la masse spécifique du matériau après et avant déformation ?

b) Quel est le champ de déplacements dans le solide si $w_{ij}(c,c,0) = u_i(c,c,0) = 0$?

a) $\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \Rightarrow b = d$ (I)

$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0 \Rightarrow ax_2 - 2bx_2 = 0 \text{ ou } b = a/2 \end{array} \right.$

Donc $b = d = a/2$

b) Densité de forces de contact : \underline{t} , avec $t_i(\underline{x}) = \sigma_{ji}(\underline{x}) n_j$,
 où $\underline{n} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = -\underline{e}_1$ et $\underline{x} = \begin{bmatrix} -c \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

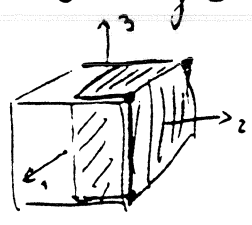
Donc $\begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2acx_2 \\ -\frac{a}{2}(x_2^2 - c^2) \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2acx_2 \\ -\frac{a}{2}(x_2^2 - c^2) \\ 0 \end{bmatrix}$

La densité de moment est $\underline{m} = \underline{x} \times \underline{t} = \begin{bmatrix} -c \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a}{2}(x_2^2 - c^2)x_3 \\ -2acx_2x_3 \\ \frac{ac}{2}(5x_2^2 - c^2) \end{bmatrix}$

Le moment résultant est donc :

$\underline{M} = \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix} = \int_S \underline{m} d\sigma = \int_{-c}^c \int_{-c}^c \begin{bmatrix} \frac{a}{2}(x_2^2 - c^2)x_3 \\ -2acx_2x_3 \\ \frac{ac}{2}(5x_2^2 - c^2) \end{bmatrix} dx_2 dx_3$

c) C'est la région $\sigma_{11} < 0$, c.-à-d. la région où $a(x_1 - c)x_2 < 0$. Comme $a > 0$, et que $x_1 \leq c$ dans le solide, c'est la région $(x_1 - c)x_2 < 0$, ou $\left. \begin{array}{l} x_1 \neq c \\ x_2 > 0 \end{array} \right\}$



d) $t_i = \sigma_{ji} n_j \Rightarrow \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \\ t_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{ac^2}{4} \\ \frac{3ac^2}{8} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3ac^2}{8} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{ac^2}{8\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

La composante normale est $t_n = \underline{t} \cdot \underline{n} = \frac{ac^2}{4}$.

La norme de la composante tangentielle est :

$$\tau = \|\underline{t}(\underline{n}) - t_n \underline{n}\| = \left\| \begin{bmatrix} \frac{ac^2}{8\sqrt{2}} \\ 3\frac{ac^2}{8\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{ac^2}{4\sqrt{2}} \\ \frac{ac^2}{4\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \left\| \begin{bmatrix} -\frac{ac^2}{8\sqrt{2}} \\ \frac{ac^2}{8\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = \frac{ac^2}{8}.$$

(II)

a) $\frac{p}{p_0} = 1 - \varepsilon_{mm} = 1 - \varepsilon_1 (x_1 - c) x_2$.

b)
$$d\omega_{12} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_k} - \frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_1} \right) dx_k = \varepsilon_1 (x_1 - c) dx_2 - \varepsilon_2 x_2 dx_1$$

$$= d \left(\varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) - \varepsilon_2 \frac{x_2^2}{2} \right)$$

$$\rightarrow \omega_{12} = \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) - \varepsilon_2 \frac{x_2^2}{2}, \text{ nul en } O.$$

c)
$$d\omega_{13} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_1} \right) dx_k = 0$$

$$d\omega_{23} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_2} \right) dx_k = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} d\omega_{13} = 0 \\ d\omega_{23} = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \omega_{13} = \omega_{23} = 0, \text{ nuls en } O.$$

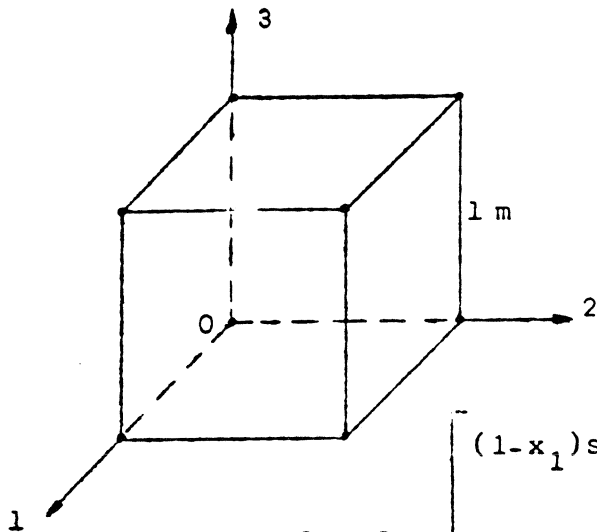
Comme $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \varepsilon_{ij} + \omega_{ij}$, $\left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right] = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 (x_1 - c) x_2 & -\varepsilon_2 \left(\frac{x_2^2}{2} - cx_1 \right) + \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) & 0 \\ \varepsilon_2 c^2 - \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Donc
$$\begin{cases} du_1 = \varepsilon_1 (x_1 - c) x_2 dx_1 - \varepsilon_2 \left(\frac{x_2^2}{2} - cx_1 \right) dx_2 + \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) dx_1 \\ du_2 = \frac{\varepsilon_2}{2} c^2 dx_1 - \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) dx_1 \\ du_3 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u_1 = \varepsilon_1 \left(\frac{x_1^2}{2} - cx_1 \right) x_2 \\ \quad - \varepsilon_2 \left(\frac{x_2^3}{3} - \frac{c^2}{2} x_2 \right), \\ u_2 = -\varepsilon_1 \left(\frac{x_1^3}{6} - c \frac{x_1^2}{2} \right) \\ \quad + \varepsilon_2 c^2 x_1, \\ u_3 = 0, \\ \text{nuls en } O. \end{cases}$$

(E)

(ROSE)

QUESTION I.

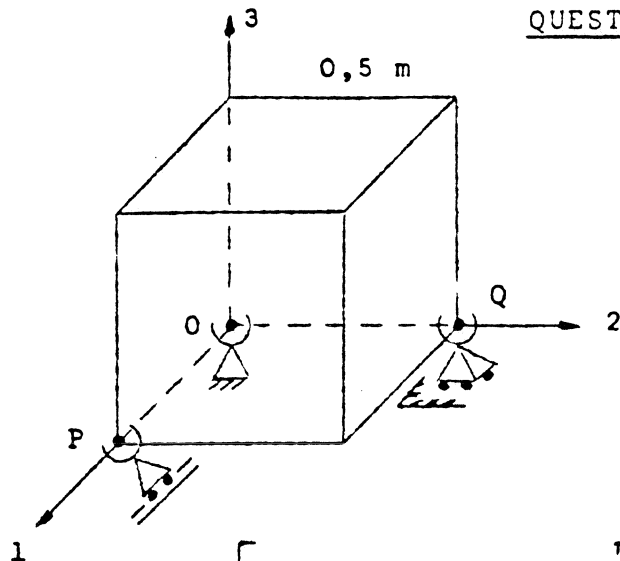


Un corps solide de forme cubique de côté de longueur 1 mètre est maintenu immobile sous tension. On travaille dans le système M.K.S.A. et le tenseur des contraintes est :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} (1-x_1)\sin x_2 e^{x_1} & -x_1 \cos x_2 e^{x_1} & 0 \\ -x_1 \cos x_2 e^{x_1} & (1+x_1)\sin x_2 e^{x_1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

- Quelles valeurs faut-il donner aux forces à distance par unité de volume pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle ?
- Quelle est le moment résultant des forces de contact exercées sur la face d'équation $x_1 = 1$?
- Quel est le maximum de la contrainte de cisaillement maximum aux points de la face d'équation $x_1 = 1$?
En quel(s) point(s) est-il atteint ?

QUESTION II.

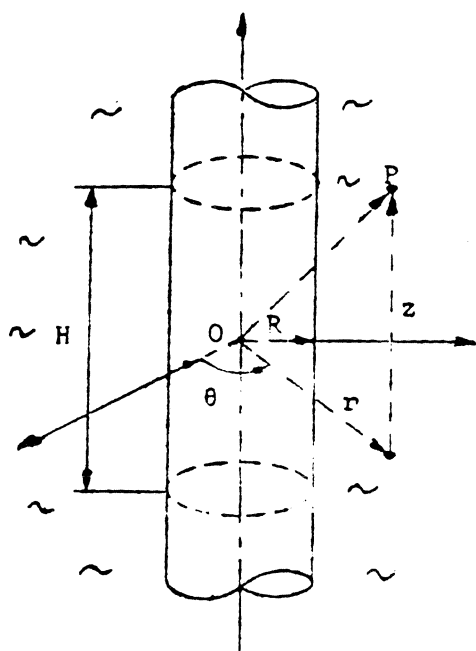


Un corps solide cubique de côté 0,5 m est déformé et prend une configuration R. Il s'agit d'un problème de petits déplacements. On travaille dans le système I.K.S.A. et le tenseur des déformations infinitésimales est :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} -\epsilon(x_1 + \sin \pi x_2 e^{\pi x_1}) & -\epsilon \cos \pi x_2 e^{\pi x_1} & 0 \\ -\epsilon \cos \pi x_2 e^{\pi x_1} & \epsilon(x_1 + \sin \pi x_2 e^{\pi x_1}) & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon v x_1 \end{bmatrix}.$$

(ϵ et v sont des constantes positives).

- Quel est l'accroissement de volume du solide ?
- Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement, si le sommet situé à l'origine O est maintenu fixe, le sommet en P est maintenu le long de Ox_1 et le sommet en Q est maintenu dans le plan Ox_1x_2 ?
- Dans quelle région du solide deux petites fibres, l'une parallèle à Ox_1 et l'autre parallèle à Ox_2 se sont-elles rapprochées angulairement ?



QUESTION III.

Un fluide est en mouvement dans la région entourant un cylindre circulaire droit de rayon R .

On travaille en coordonnées cylindriques et la description Lagrangienne du mouvement est :

$$\begin{cases} r = R & , \\ \theta = \Theta + At & , \\ z = Z + Bt \ln R & , \end{cases}$$

(R, Θ, Z) étant les coordonnées lagrangiennes des points.

La description Eulérienne du tenseur des contraintes est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\rho A^2 r^2}{2} & 0 & \frac{\mu B}{r} \\ 0 & \frac{\rho A^2 r^2}{2} & 0 \\ \frac{\mu B}{r} & 0 & \frac{\rho A^2 r^2}{2} \end{bmatrix} ,$$

A, B, ρ et μ étant des constantes positives.

a) Trouver les descriptions Lagrangienne et Eulérienne de la vitesse.
Décrire géométriquement les trajectoires des points matériels.

b) Quelle est, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, θ, z) , la variation par unité de temps du carré de sa distance au point fixe de coordonnées $(R, 0, 0)$?

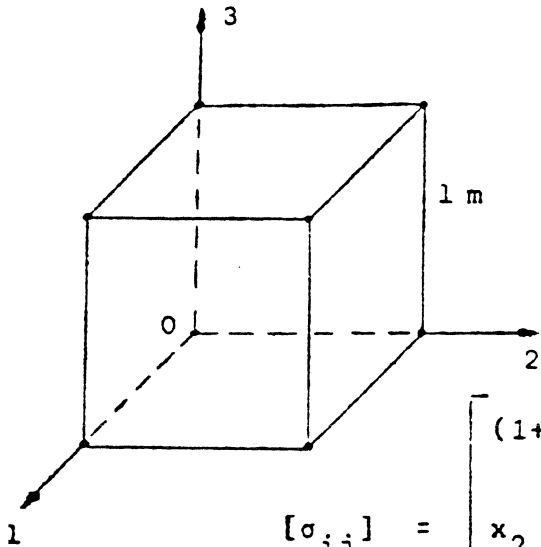
c) Quelles sont les forces de contact exercées par unité de surface par le fluide sur le cylindre ?
Quelle est leur résultante sur un tronçon de cylindre de hauteur H ?

d) La surface du cylindre est-elle en traction ou en compression sous l'effet du fluide ?

(E)

(VERT)

QUESTION I.

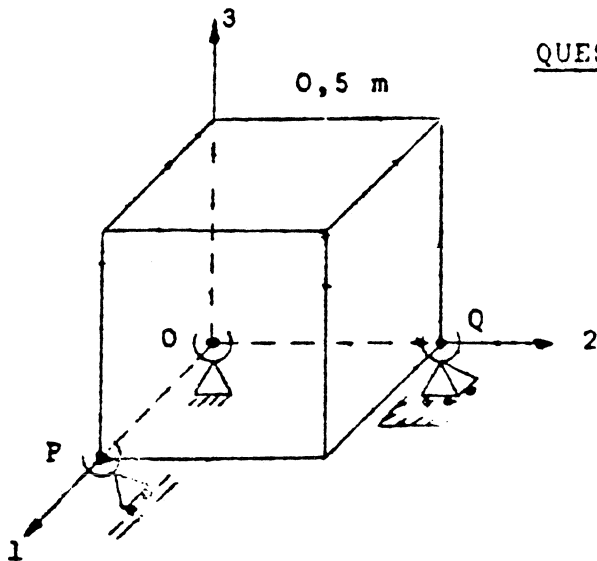


Un corps solide de forme cubique de côté de longueur 1 mètre est maintenu immobile sous tension. On travaille dans le système M.K.S.A. et le tenseur des contraintes est :

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} (1+x_2)\cos x_1 e^{x_2} & x_2 \sin x_1 e^{x_2} & 0 \\ x_2 \sin x_1 e^{x_2} & (1-x_2)\cos x_1 e^{x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

- a) Quelles valeurs faut-il donner aux forces à distance par unité de volume pour que toute partie du solide soit en équilibre sous l'action des forces exercées sur elle ?
- b) Quelle est le moment résultant des forces de contact exercées sur la face d'équation $x_2 = 1$?
- c) Quel est le maximum de la contrainte de cisaillement maximum aux points de la face d'équation $x_2 = 1$?
En quel(s) point(s) est-il atteint ?

QUESTION II.



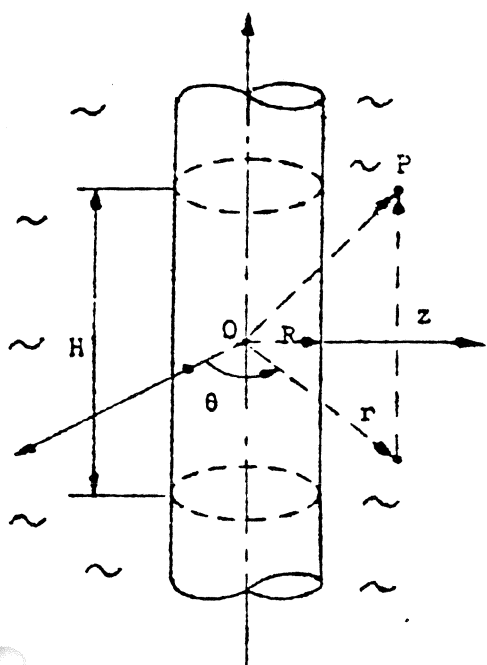
Un corps solide cubique de côté 0,5 m est déformé et prend une configuration R. Il s'agit d'un problème de petits déplacements. On travaille dans le système M.K.S.A. et le tenseur des déformations infinitésimales est :

$$[\epsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \epsilon(x_2 + \cos \pi x_1 e^{\pi x_2}) & \epsilon \sin \pi x_1 e^{\pi x_2} & 0 \\ \epsilon \sin \pi x_1 e^{\pi x_2} & -\epsilon(v x_2 + \cos \pi x_1 e^{\pi x_2}) & 0 \\ 0 & 0 & -\epsilon v x_2 \end{bmatrix} .$$

(ϵ et v sont des constantes positives).

- Quel est l'accroissement de volume du solide ?
- Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement, si le sommet situé à l'origine O est maintenu fixe, le sommet en P est maintenu le long de Ox_1 et le sommet en Q est maintenu dans le plan Ox_1x_2 ?
- Dans quelle région du solide deux petites fibres, l'une parallèle à Ox_1 et l'autre parallèle à Ox_2 se sont-elles rapprochées angulairement ?

QUESTION III.



Un fluide est en mouvement dans la région entourant un cylindre circulaire droit de rayon R .

On travaille en coordonnées cylindriques et la description Lagrangienne du mouvement est :

$$\begin{cases} r = R, \\ \theta = \Theta + At \frac{1}{R}, \\ z = Z - Bt \ln R, \end{cases}$$

(R, θ, Z) étant les coordonnées Lagrangiennes des points.

La description Eulérienne du tenseur des contraintes est :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\theta} & \sigma_{rz} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\theta} & \sigma_{\theta z} \\ \sigma_{zr} & \sigma_{z\theta} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\rho A^2}{2r^2} & -\frac{2\mu A}{r^2} & -\frac{\mu B}{r} \\ -\frac{2\mu A}{r^2} & -\frac{\rho A^2}{2r^2} & 0 \\ -\frac{\mu B}{r} & 0 & -\frac{\rho A^2}{2r^2} \end{bmatrix},$$

A, B, ρ et μ étant des constantes positives.

- Trouver les descriptions Lagrangienne et Eulérienne de la vitesse. Décrire géométriquement les trajectoires des points matériels.
- Quelle est, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, θ, z) , la variation par unité de temps du carré de sa distance au point fixe de coordonnées $(R, 0, 0)$?
- Quelles sont les forces de contact exercées par unité de surface par le fluide sur le cylindre ? Quelle est leur résultante sur un tronçon de cylindre de hauteur H ?
- La surface du cylindre est-elle en traction ou en compression sous l'effet du fluide ?

Réponses de l'interrogation de Mécanique des milieux Continus.

	Questionnaire Rose	Questionnaire Vert
<p>I (a) [1]</p> $\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i = 0 \rightarrow \underline{f} =$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$
<p>I (b) [2]</p> $t_i = \sigma_{ji} n_j$ $\underline{m} = \underline{x} \times \underline{t}$ $\underline{M} = \int_{\text{face}} \underline{m} d\sigma$	$\underline{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{t} = \begin{bmatrix} 0 \\ -l \cos \alpha_2 \\ 0 \end{bmatrix} (\alpha_2 = 1)$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ $\underline{m} = \begin{bmatrix} l \alpha_3 \cos \alpha_2 \\ 0 \\ -l \cos \alpha_2 \end{bmatrix}$ $d\sigma = dx_2 dx_3$ $\underline{M} = \begin{bmatrix} \frac{l}{2} \sin 1 \\ 0 \\ -l \sin 1 \end{bmatrix}$	$\underline{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\underline{t} = \begin{bmatrix} l \sin \alpha_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} (\alpha_2 = 1)$ $\underline{x} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ 1 \\ \alpha_3 \end{bmatrix}$ $\underline{m} = \begin{bmatrix} 0 \\ l \alpha_3 \sin \alpha_1 \\ -l \sin \alpha_1 \end{bmatrix}$ $d\sigma = dx_1 dx_3$ $\underline{M} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l}{2} (1 - \cos 1) \\ -l (1 - \cos 1) \end{bmatrix}$
<p>I (c) [2]</p> $[\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}] =$ <p>(sur la face)</p> $\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) =$ <p>en ordre croissant,</p> $(\sigma_{III}, \sigma_{II}, \sigma_{I}) =$ $\tau_{\max.} \text{ (sur la face)} = \frac{\sigma_{II} - \sigma_{III}}{2}$	$\begin{bmatrix} -\sigma & -l \cos \alpha_2 & 0 \\ -l \cos \alpha_2 & 2l \sin \alpha_2 - \sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$ $-\sigma (\sigma^2 - 2l \sin \alpha_2 \sigma - l^2 \cos^2 \alpha_2)$ $(l(\sin \alpha_2 - 1), 0, l(\sin \alpha_2 + 1))$ $= \frac{l}{2} \text{ (constant sur la face)}$	$\begin{bmatrix} 2l \cos \alpha_1 - \sigma & l \sin \alpha_1 & 0 \\ l \sin \alpha_1 & -\sigma & 0 \\ 0 & 0 & -\sigma \end{bmatrix}$ $-\sigma (\sigma^2 - 2l \cos \alpha_1 \sigma - l^2 \sin^2 \alpha_1)$ $(l(\cos \alpha_1 - 1), 0, l(\cos \alpha_1 + 1))$ $= \frac{l}{2} \text{ (constant sur la face)}$

II (a) [2]

$$\epsilon_{min} = \frac{dv - dv_0}{dv} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33} =$$

$$V - V_0 = \int dv - \int dv_0$$

$$= \int \frac{dv - dv_0}{dv} dv = \int_V \epsilon_{min} dv =$$

	rose	vert
ϵ_{min}	$\epsilon x_1 (1 - 2v)$	$\epsilon x_2 (1 - 2v)$
$V - V_0$	$\frac{1}{32} \epsilon (1 - 2v)$	$\frac{1}{32} \epsilon (1 - 2v)$

II (b) [4]

à partir de $\left\{ \begin{array}{l} d\omega_{12} = \\ d\omega_{23} = \\ d\omega_{13} = \end{array} \right.$

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k$$

$$= \left(\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

$$\Rightarrow [\omega_{ij}] =$$

$$d\mu_i = \frac{\partial \mu_i}{\partial x_j} dx_j$$

$$= (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j \Rightarrow$$

(après une intégration délicate)

Détermination des constantes à partir des conditions en O, P, Q.

En O (0,0,0), $\left\{ \begin{array}{l} \mu_1 = 0 \Rightarrow C_4 = \\ \mu_2 = 0 \Rightarrow C_5 = \\ \mu_3 = 0 \Rightarrow C_6 = \end{array} \right.$

En Q (0, 1/2, 0), $\mu_3 = 0 \Rightarrow C_3 =$

En P (1/2, 0, 0), $\left\{ \begin{array}{l} \mu_3 = 0 \Rightarrow C_2 = \\ \mu_2 = 0 \Rightarrow C_1 = \end{array} \right.$

$d\omega_{12}$	$-\epsilon dx_2$	ϵdx_1
$d\omega_{23}$	0	$\epsilon v dx_3$
$d\omega_{13}$	$\epsilon v dx_3$	0
$[\omega_{ij}]$	$\begin{pmatrix} 0 & -\epsilon x_2 + C_1 & \epsilon v x_3 + C_2 \\ \epsilon x_2 - C_1 & 0 & C_3 \\ -\epsilon v x_3 - C_2 & -C_3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & \epsilon x_1 + C_1 & C_2 \\ -\epsilon x_1 - C_1 & 0 & \epsilon v x_3 + C_3 \\ -C_2 & -\epsilon v x_3 - C_3 & 0 \end{pmatrix}$
μ_1	$-\frac{\epsilon v}{2} x_1^2 - \frac{\epsilon}{2} x_2^2 + \frac{\epsilon v}{2} x_3^2$ $-\frac{\epsilon}{\pi} \sin \pi x_2 e^{\pi x_1}$ $+ C_1 x_2 + C_2 x_3 + C_4$	$\epsilon x_1 x_2$ $+\frac{\epsilon}{\pi} \sin \pi x_1 e^{\pi x_2}$ $+ C_1 x_2 + C_2 x_3 + C_4$
μ_2	$\epsilon x_1 x_2$ $-\frac{\epsilon}{\pi} \cos \pi x_2 e^{\pi x_1}$ $- C_1 x_1 + C_3 x_3 + C_5$	$-\frac{\epsilon}{2} x_1^2 - \frac{\epsilon v}{2} x_2^2 + \frac{\epsilon v}{2} x_3^2$ $-\frac{\epsilon}{\pi} \cos \pi x_1 e^{\pi x_2}$ $- C_1 x_1 + C_3 x_3 + C_5$
μ_3	$-\epsilon v x_1 x_3 - C_2 x_1 - C_3 x_2 + C_6$	$-\epsilon v x_2 x_3 - C_2 x_1 - C_3 x_2 + C_6$
En O	0 ϵ/π 0	0 ϵ/π 0
En Q	0	0
En P	$2 \frac{\epsilon}{\pi} (e^{\pi/2} - 1)$	$\epsilon \left(\frac{2}{\pi} - \frac{1}{4} \right)$

II (c) [1,5]


$\phi_{12} = 2 \varepsilon_{12} =$
 On cherche la région $\phi > 0$
 On a toujours
 Dans le domaine étudié,
 La région cherchée


rose
 $-2\varepsilon \cos \pi x_2 e^{\pi x_1}$
 $e^{\pi x_1} > 0$
 $0 < x_2 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \cos \pi x_2 > 0$
 n'existe pas

vert
 $2\varepsilon \sin \pi x_1 e^{\pi x_2}$
 $e^{\pi x_2} > 0$
 $0 < x_1 \leq \frac{1}{2} \Rightarrow \sin \pi x_1 > 0$
 est tout le cube
 sauf la face $x_1 = 0$.

III (a) [2]

Lagrangiens $\begin{cases} V_r = \frac{Dr}{Dt} = \\ V_\theta = r \frac{D\theta}{Dt} = \\ V_z = \frac{Dz}{Dt} = \end{cases}$
 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} |_{R, \theta, z}$
 Eulériennes $\begin{cases} v_r = \\ v_\theta = \\ v_z = \end{cases}$
 (à l'aide de $R=r \cos \theta$)
 Trajectoires : hélices

0
 $r A R = A R^2$
 $B \ln R$
 0
 $A r^2$
 $B \ln r$


0
 $r A \frac{1}{R} = A$
 $- B \ln R$
 0
 A
 $- B \ln r$


III (b) [2]

La distance (au carré)
 en question se
 calcule en coordonnées
 Cartésiennes : $d^2 =$
 Méthode Eulérienne :
 $\frac{Dd^2}{Dt} = \frac{\partial d^2}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad}(d^2)$
 $\text{grad}(d^2) = \begin{bmatrix} \frac{\partial d^2}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial d^2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial d^2}{\partial z} \end{bmatrix}$
 $\frac{Dd^2}{Dt} =$

$(r \cos \theta - R)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2$
 $= R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \theta$
 $\begin{bmatrix} 2(r - R \cos \theta) \\ 2R \sin \theta \\ 2z \end{bmatrix}$
 $2ARr^2 \sin \theta$
 $+ 2Bz \ln r$

$(r \cos \theta - R)^2 + (r \sin \theta)^2 + z^2$
 $= R^2 + r^2 + z^2 - 2Rr \cos \theta$
 $\begin{bmatrix} 2(r - R \cos \theta) \\ 2R \sin \theta \\ 2z \end{bmatrix}$
 $2AR \sin \theta$
 $- 2Bz \ln r$

Méthode Lagrangienne

$$\frac{Dd^2}{Dt} = \frac{\partial d^2}{\partial t} \Big|_{R, \Theta, Z} =$$

rose	vert
$R^2 + R^2$ $+ (Z + Bt \ln R)^2$ $- 2 R R \cos(\Theta + AtR)$	$R^2 + R^2$ $+ (Z - Bt \ln R)^2$ $- 2 R R \cos(\Theta - At \frac{1}{R})$
$2 A R R^2 \sin(\Theta + AtR)$ $+ 2 B (Z + Bt \ln R) \ln R$	$2 A R \sin(\Theta - At \frac{1}{R})$ $- 2 B (Z - Bt \ln R) \ln R$

III (c) [2]

La normale sortante du cylindre est $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Les forces de contact sont données par $t_i = \sigma_{ji} n_j$ pour $r = R \Rightarrow \vec{t} =$

$$\begin{pmatrix} \frac{PA^2 R^2}{2} \\ 0 \\ \frac{\mu B}{R} \end{pmatrix}$$

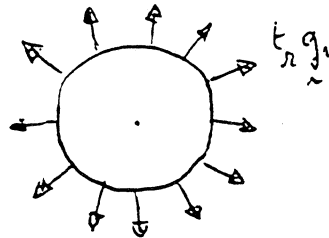
$$\begin{pmatrix} -\frac{PA^2}{2 R^2} \\ -\frac{2\mu A}{R^2} \\ -\frac{\mu B}{R} \end{pmatrix}$$

La résultante est

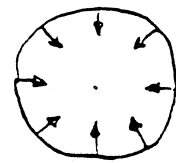
$$\vec{R} = \int \vec{t} d\sigma = \int (t_r \vec{g}_r + t_\theta \vec{g}_\theta + t_z \vec{g}_z) d\sigma$$

\vec{g}_r et \vec{g}_θ ne peuvent être sortis de l'intégrale

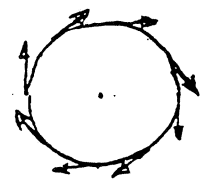
Mais les effets de t_r et t_θ s'annihilent:



résultante nulle



résultantes nulles



(couple)

Il reste donc

$$\vec{R} = \vec{g}_z \int_{\sigma} t_z d\sigma = \vec{g}_z \int_0^{H} \int_0^{2\pi} t_z r dr d\theta$$

$$= 2\pi \mu B H \vec{g}_z$$

$$= - 2\pi \mu B H \vec{g}_z$$

III (d) [1,5]

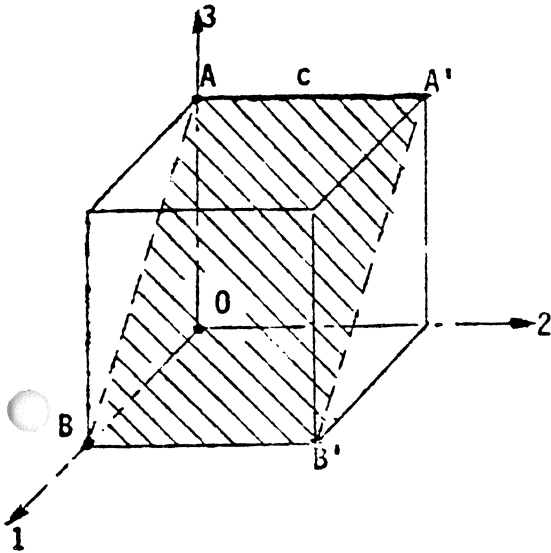
On est en traction (compression) si $t_m = \vec{t} \cdot \vec{n} = \sigma_{rr}$ est positif (négatif).

traction

compression

(F) (JAUNE)

QUESTION I.



Un cube solide de côté c est maintenu immobile sous tension en l'absence de forces à distance.

Le tenseur des contraintes est

$$[\sigma_{ij}] = K \begin{bmatrix} x_2 x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 4x_2 x_3 & -2x_3^2 \\ 0 & -2x_3^2 & 0 \end{bmatrix} .$$

Il s'agit d'un problème de petits déplacements (pour le passage de la configuration de référence à la configuration sous tension) et le tenseur des déformations infinitésimales est

$$[\epsilon_{ij}] = \epsilon \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3x_2 x_3 & -2x_3^2 \\ 0 & -2x_3^2 & -x_2 x_3 \end{bmatrix} .$$

On travaille dans le système MKSA et les x_i et c sont exprimés en mètres.

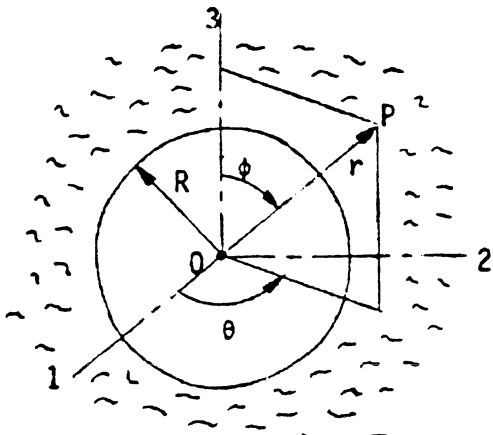
- a. Quelles sont les dimensions physiques des constantes données.
- b. Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement si on impose qu'ils soient nuls à l'origine du système d'axes?
- c. Le cube est divisé en deux parties par un plan diagonal passant par les points A, A', B et B' (de coordonnées respectives

$(0,0,c)$, $(0,c,c)$, $(c,0,0)$ et $(c,c,0)$)

Quel est le moment résultant par rapport à l'origine des forces exercées par la partie supérieure avant sur la partie inférieure arrière?

- d. Quel est l'accroissement de longueur qu'a subi la fibre joignant les points A et A' ?
- e. Si on exige que la contrainte de cisaillement maximum ne dépasse nulle part une valeur imposée σ_p , quelle est la condition qui en résulte pour K et c ?

QUESTION 2.



Un fluide est en mouvement dans la région qui entoure une sphère de rayon R .
On travaille en coordonnées sphéro-polaires et la description Eulérienne du champ de vitesses est

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U \left(1 - \frac{R}{r}\right) \cos \phi \\ -U \left(1 - \frac{2R}{r}\right) \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} .$$

Le tenseur des contraintes est

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{S}{r^2} \cos \phi \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} ,$$

S ayant la dimension voulue.

- Quelle est la vitesse à grande distance du centre de la sphère? Interpréter. Montrer que le fluide ne traverse pas la surface de la sphère.
- Quelle est la densité des forces de contact exercées par le fluide sur la sphère? Déterminer si le fluide glisse (sans frottement) ou colle (sans glissement) sur la surface de la sphère.
- Que vaut, en représentation Eulérienne, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, ϕ, θ) , la variation par unité de temps de sa distance au plan fixe d'équation $\phi = \pi/2$?
- Au temps $t=0$, dans le plan $\phi = \pi/2$, on trace une petite croix de couleur. On demande quelle orientation lui donner pour que ses bras, perpendiculaires en $t=0$, le restent approximativement en leur point d'intersection dans les courts instants qui suivent.

(F)

(BLEU)

QUESTION I.

Un cube solide de côté c est maintenu immobile sous tension en l'absence de forces à distance. Le tenseur des contraintes est

$$[\sigma_{ij}] = K \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3x_1^2 \\ 0 & 2x_1x_3 & 0 \\ -3x_1^2 & 0 & 6x_1x_3 \end{bmatrix} .$$

Il s'agit d'un problème de petits déplacements (pour le passage de la configuration de référence à la configuration sous tension) et le tenseur des déformations infinitésimales est

$$[\epsilon_{ij}] = \epsilon \begin{bmatrix} -2x_1x_3 & 0 & -3x_1^2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3x_1^2 & 0 & 4x_1x_3 \end{bmatrix} .$$

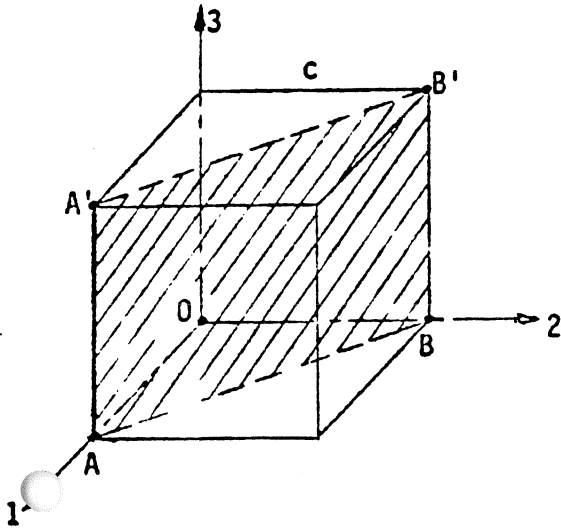
On travaille dans le système MKSA et les x_i et c sont exprimés en mètres.

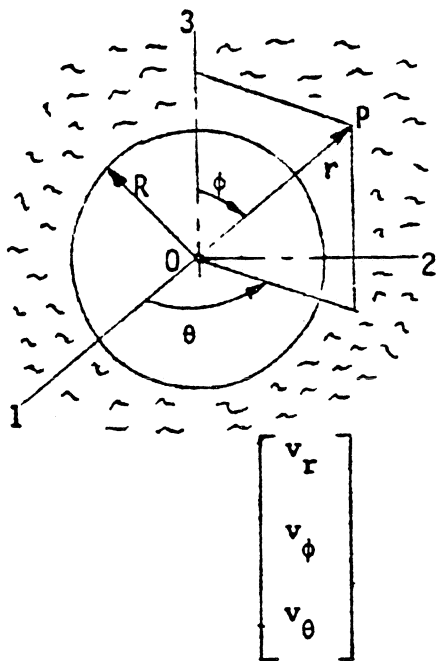
- Quelles sont les dimensions physiques des constantes données
- Quels sont le tenseur des rotations infinitésimales et le vecteur déplacement si on impose qu'ils soient nuls à l'origine du système d'axes?
- Le cube est divisé en deux parties par un plan diagonal passant par les points A, A', B et B' (de coordonnées respectives

$(c,0,0)$, $(c,0,c)$, $(0,c,0)$ et $(0,c,c)$)

Quel est le moment résultant par rapport à l'origine des forces exercées par la partie avant droite sur la partie arrière gauche?

- Quel est l'accroissement de longueur qu'a subi la fibre joignant les points A et A'?
- Si on exige que la contrainte de cisaillement maximum ne dépasse nulle part une valeur imposée σ_p , quelle est la condition qui en résulte pour K et c ?





QUESTION 2.

Un fluide est en mouvement dans la région qui entoure une sphère de rayon R .

On travaille en coordonnées sphéro-polaires et la description Eulérienne du champ de vitesses est

$$\begin{bmatrix} -U \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \cos \phi \\ U \left(1 + \frac{R^3}{2r^3}\right) \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Le tenseur des contraintes est

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr} & \sigma_{r\phi} & \sigma_{r\theta} \\ \sigma_{\phi r} & \sigma_{\phi\phi} & \sigma_{\phi\theta} \\ \sigma_{\theta r} & \sigma_{\theta\phi} & \sigma_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \frac{S}{r^3} \left((3\cos^2\phi - 1) \left(1 - \frac{R^3}{4r^3}\right) - \frac{R^3}{2r^3} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

S ayant la dimension voulue.

- Quelle est la vitesse à grande distance du centre de la sphère? Interpréter. Montrer que le fluide ne traverse pas la surface de la sphère.
- Quelle est la densité des forces de contact exercées par la sphère sur le fluide? Déterminer si le fluide glisse (sans frottement) ou colle (sans glissement) sur la surface de la sphère.
- Que vaut, en représentation Eulérienne, pour un observateur accompagnant le mouvement du fluide et occupant au temps t la position (r, ϕ, θ) , la variation par unité de temps de sa distance à l'axe fixe d'équation $\phi=0$, $\phi=\pi$?
- Au temps $t=0$, dans le plan $\phi = \pi/2$, on trace une petite croix de colorant. On demande quelle orientation lui donner pour que ses bras, perpendiculaires en $t=0$, le restent approximativement en leur point d'intersection dans les courts instants qui suivent.

Interrogation de Mécanique des Milieux Continues

Réponses

	Questionnaire jaune	Questionnaire bleu
<p>I (a) [1]</p> <p>$K \rightarrow N/m^4 = kg \cdot m^{-3} \cdot sec^{-2}$</p> <p>$\varepsilon \rightarrow m^{-2}$</p>		
<p>I (b) [3]</p> <p>à partir de</p> $d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k$ $= \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$ <p>$\Rightarrow [\omega_{ij}] =$</p> <p>(les constantes d'intégration étant nulles puisque $\omega_{ij}(0,0,0) = 0$)</p> <p>à partir de</p> $du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j$ $= (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$ <p>\Rightarrow</p> <p>(les constantes d'intégration étant nulles puisque $u_i(0,0,0) = 0$)</p>	$\begin{cases} d\omega_{12} = 0 \\ d\omega_{23} = 3\varepsilon\alpha_2 dx_2 - 3\varepsilon\alpha_3 dx_3 \\ d\omega_{13} = 0 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2}\varepsilon(\alpha_2^2 - \alpha_3^2) \\ \frac{3}{2}\varepsilon(\alpha_3^2 - \alpha_2^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{cases} 0 \\ 0 \\ 4\varepsilon\alpha_1 dx_1 - 4\varepsilon\alpha_3 dx_3 \end{cases}$ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2\varepsilon(\alpha_1^2 - \alpha_3^2) \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\varepsilon(\alpha_3^2 - \alpha_1^2) & 0 & 0 \end{bmatrix}$
<p>I (c) [3]</p> <p>Normale <u>soutante</u> du morceau <u>sur</u> lequel sont exercées les forces</p> <p>$\underline{n} =$</p>	$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \end{bmatrix}$

Forces de contact exercées par unité de surface sur le morceau étudié ($t_i = \sigma_{ji} n_j$):

$$\underline{t} =$$

jaune

$$K \begin{bmatrix} x_2 x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 4x_1 x_3 & -2x_3^2 \\ 0 & -2x_3^2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -2x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

bleu

$$K \begin{bmatrix} 0 & 0 & -3x_1^2 \\ 0 & 2x_1 x_3 & 0 \\ -3x_3^2 & 0 & 6x_1 x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 x_3 \\ -3x_3^2 \end{bmatrix}$$

Equation de la surface de séparation:

$$x_1 = c - x_3$$

$$x_2 = c - x_1$$

Vecteur position: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$

$$\begin{bmatrix} c - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ c - x_1 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Moment élémentaire: $\underline{x} \times \underline{t} =$

$$\begin{bmatrix} c - x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} x_2 x_3 \\ -2x_3^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 2x_2 x_3^3 \\ x_2 x_3^2 \\ [-2x_3^2(c - x_3) \\ -x_1^2 x_3] \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ c - x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} \times \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 2x_1 x_3 \\ -3x_1^2 \end{bmatrix} = \frac{K}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} [-3x_1^2(c - x_1) \\ -2x_1 x_3^2 \\ -2x_1^2 x_3] \\ 2x_1^2 x_3 \end{bmatrix}$$

Élément d'aire: $d\sigma =$

$$\sqrt{2} dx_2 dx_3$$

$$\sqrt{2} dx_1 dx_3$$

Moment résultant:

$$\underline{M} = \int_{\text{surface}} \underline{x} \times \underline{t} d\sigma =$$

$$K \int_0^c \int_0^c \begin{bmatrix} 2x_2 x_3^3 \\ x_2 x_3^2 \\ -2x_3^2(c - x_3) \\ -x_1^2 x_3 \end{bmatrix} dx_2 dx_3$$

$$K \int_0^c \int_0^c \begin{bmatrix} -3x_1^2(c - x_1) \\ -2x_1 x_3^2 \\ 3x_1^2 \\ 2x_1^2 x_3 \end{bmatrix} dx_1 dx_3$$

$$= K c^5 \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/6 \\ -1/3 \end{bmatrix}$$

$$K c^5 \begin{bmatrix} -7/12 \\ 3/4 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

I (a) [2]

Élongement relatif d'une fibre infinitésimale $\left. \frac{ds - ds_0}{ds_0} \right| \approx$

$$\epsilon_{22} (x_1=0, x_3=c) = 3\epsilon x_2 c$$

$$\epsilon_{33} (x_1=c, x_2=0) = 4\epsilon x_3 c$$

Élongement: $l - L = \int_{\text{fibre}} (ds - ds_0)$

$$= \int_{\text{fibre}} \frac{ds - ds_0}{ds_0} ds_0 \approx \int_{\text{fibre}} \frac{ds - ds_0}{ds_0} ds_0$$

$$\approx \int_0^c \epsilon_{22} dx_2 = \frac{3}{2} \epsilon c^3$$

$$\approx \int_0^c \epsilon_{33} dx_3 = 2\epsilon c^3$$

I (b) [2]

Contraintes principales:

$$0 = \det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) =$$

$$\begin{vmatrix} Kx_2 x_3 - \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 4Kx_1 x_3 - \sigma & -2Kx_3^2 \\ 0 & -2Kx_3^2 & -\sigma \end{vmatrix} = (Kx_2 x_3 - \sigma) (\sigma^2 - 4Kx_2 x_3 \sigma - 4K^2 x_3^4)$$

$$\begin{vmatrix} -\sigma & 0 & -3Kx_1^2 \\ 0 & 2Kx_1 x_3 - \sigma & 0 \\ -3Kx_1^2 & 0 & 6Kx_1 x_3 - \sigma \end{vmatrix} = (2Kx_1 x_3 - \sigma) (\sigma^2 - 6Kx_1 x_3 \sigma - 9K^2 x_1^4)$$

Solutions : $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III} \rightarrow$

Valeurs propres extrêmes

Remarque : l'une est positive et l'autre négative, et elles enferment la troisième.

Cisaillement maximum en un point $\tau_{max} = \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2} =$

Maximum dans le solide de ce maximum en un point

○ Critère

jaune
 $K \alpha_2 \alpha_3, 2K \alpha_3 (\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2})$

$$2K \alpha_3 (\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2})$$

$$\sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2} \geq |\alpha_2|$$

$$|2K \alpha_3| \sqrt{\alpha_2^2 + \alpha_3^2}$$

$$|2Kc| \sqrt{2c^2}$$

$$2\sqrt{2} c^2 |K| \leq \sigma_p$$

bleu
 $2K \alpha_1 \alpha_3, 3K \alpha_1 (\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2})$

$$3K \alpha_1 (\alpha_3 \pm \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2})$$

$$\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2} \geq |\alpha_3|$$

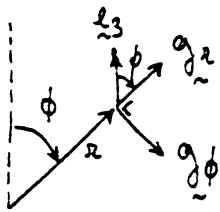
$$|3K \alpha_1| \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}$$

$$|3Kc| \sqrt{2c^2}$$

$$3\sqrt{2} c^2 |K| \leq \sigma_p$$

II (a) [2]

A grande distance, $\frac{r}{R} \rightarrow \infty$:



On a $e_3 = g_2 \cos \phi - g_\phi \sin \phi$

Donc on a à l'infini une vitesse uniforme :

Le fluide ne traverse pas la surface de la sphère si $v_n = 0$ sur celle-ci. Comme $\underline{n} = g_2$,

on a $v_n = v_r =$

On a bien $v_r|_{r=R} = 0$.

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} U \cos \phi \\ -U \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $\underline{v} = v_r g_2 + v_\phi g_\phi + v_\theta g_\theta$ tend vers $U(\cos \phi g_2 - \sin \phi g_\phi) = U e_3$

$$U e_3$$

$$U \left(1 - \frac{R}{r}\right) \cos \phi$$

$$\begin{bmatrix} v_r \\ v_\phi \\ v_\theta \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} -U \cos \phi \\ U \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$$

Donc $\underline{v} = v_r g_2 + v_\phi g_\phi + v_\theta g_\theta$ tend vers $U(-\cos \phi g_2 + \sin \phi g_\phi) = -U e_3$

$$-U e_3$$

$$-U \left(1 - \frac{R^3}{r^3}\right) \cos \phi$$

II (b) [2.5]

On a $r = R$ et $\underline{n} =$

Donc, par $t_i = \sigma_{ji} n_j$, $\underline{t}(\underline{n}) = \begin{bmatrix} t_2 \\ t_\phi \\ t_\theta \end{bmatrix} = \frac{S}{R^2} \cos \phi \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (densité des forces fluide sur sphère)

glisser sans frottement $v_n = \tau = 0$ ($r = R$)
 coller sans glissement $v_r = 0$ ($r = R$)

$g_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (normale sortante de la sphère)

(τ est la composante tangentielle des forces de contact)

$-g_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (normale sortante du fluide)

$= \frac{S}{4R^3} (9 \cos^2 \phi - 5) \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ (densité des forces sphère sur fluide)

(τ : composante tangentielle des forces de contact)

<p>Formule vitesse: $-g_z$ } \Rightarrow $t_n = t_z =$ $\tau = \frac{\ t_n(t_n) - t_n\ }{\ t_n\ ^2} =$ $= (t_\phi^2 + t_\theta^2) =$</p> <p>Donc en $r=R$, $v_n = \tau = 0$ mais $v \neq 0$ } \Rightarrow</p>	<p><u>jaune</u></p> $-\frac{5}{R^2} \cos \phi$ 0	<p><u>bleu</u></p> $\frac{5}{4R^3} (5 - 9 \cos^2 \phi)$ 0
	Le fluide glisse sans frottement (et sans coller)	Le fluide glisse sans frottement (et sans coller)

<p>II (c) [2.5]</p> <p>Distance d</p> <p>On cherche $\frac{Dd}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v \cdot \nabla\right) d$</p> <p>On a, en fixant r, ϕ, θ :</p> <p>Plus, en sphériques, $\nabla d = \begin{bmatrix} \frac{\partial d}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial d}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial d}{\partial \theta} \end{bmatrix}$</p> <p>Par conséquent, $\frac{Dd}{Dt} =$</p> <p>(N.B: d était exprimée en coordonnées Eulériennes)</p>	<p>à $\phi = \frac{\pi}{2}$: $d = r \cos \phi$</p> $\frac{\partial}{\partial t} (r \cos \phi) = 0$ $\begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} U(1 - \frac{R}{r}) \cos \phi \\ -U(1 - \frac{2R}{r}) \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos \phi \\ -\sin \phi \\ 0 \end{bmatrix}$ $= U \left(1 - \frac{R}{r}\right) (3 - \cos 2\phi)$	<p>à $\phi = 0, \pi$: $d = r \sin \phi$</p> $\frac{\partial}{\partial t} (r \sin \phi) = 0$ $\begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} -U(1 - \frac{R^3}{r^3}) \cos \phi \\ U(1 + \frac{R^3}{2r^3}) \sin \phi \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin \phi \\ \cos \phi \\ 0 \end{bmatrix}$ $= \frac{3}{4} U \frac{R^3}{r^3} \sin 2\phi$
--	---	---

<p>II (d) [2]</p> <p>Il faut calculer les d_{ij}</p> <p>pour $(i,j) = (r,r), (r,\theta) \text{ ou } (\theta,\theta)$ } $[d_{ij}] =$</p> <p>avec $\phi = \pi/2$ ($\sin \phi = 1, \cos \phi = 0$)</p> <p>On a donc $d_{rr} = d_{r\theta} = d_{\theta\theta} = 0$</p>	$\begin{bmatrix} \frac{UR}{r^2} \cos \phi & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & \frac{UR}{r^2} \cos \phi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -3 \frac{UR^3}{r^4} \cos \phi & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & \frac{3}{2} \frac{UR^3}{r^4} \cos \phi \end{bmatrix}$ $= \begin{bmatrix} 0 & * & 0 \\ * & * & * \\ 0 & * & 0 \end{bmatrix}$
--	---	--

<p>En faisant, avec une matrice a_{ij}, un changement de base de façon à orienter celle-ci parallèlement aux bras de la croix et à g_θ, on a $d'_{ij} = a_{ik} a_{jl} d_{kl}$</p> <p>On voit que $d_{13} = 0$ pour tout a_{ij}</p> <p>Donc toute orientation convient.</p>	$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{1r} & 0 & a_{1\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{3r} & 0 & a_{3\theta} \end{bmatrix}$ $d_{13} = a_{1r} a_{3r} d_{rr} + a_{1r} a_{3\theta} d_{r\theta} + a_{1\theta} a_{3r} d_{\theta r} + a_{1\theta} a_{3\theta} d_{\theta\theta}$	$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{1r} & 0 & a_{1\theta} \\ 0 & 1 & 0 \\ a_{3r} & 0 & a_{3\theta} \end{bmatrix}$ $d_{13} = a_{1r} a_{3r} d_{rr} + a_{1r} a_{3\theta} d_{r\theta} + a_{1\theta} a_{3r} d_{\theta r} + a_{1\theta} a_{3\theta} d_{\theta\theta}$
--	--	--