

MECA 1901
Mécanique des milieux continus

-

Notes de cours

PROFESSEUR FRANÇOIS DUPRET

SEPTEMBRE 2008

Transparents

Chapitre 1

Introduction, concepts de base, calcul tensoriel

Espace-temps en physique classique

- **L'espace-temps est continu**

→ L'ensemble des événements — couples (lieu, instant) — forme un *continuum*

- **L'espace-temps est homogène, stationnaire et isotrope**

→ Les propriétés *intrinsèques* de l'espace-temps sont *indépendantes* du lieu, de l'instant et de l'orientation suivant lesquels les expériences sont effectuées

- **La simultanéité est indépendante de l'observateur**

→ On peut identifier un *temps universel* (à son origine et son échelle près)

- **A chaque instant, l'espace est euclidien**

→ La *géométrie classique* (caractérisée par des propriétés des distances et des angles, ainsi que par les concepts de droites, plans, cercles, sphères...) est en application

Repères

- **Les événements sont désignés** (repérés) **par 3 coordonnées et un temps**

→ Les coordonnées peuvent être *cartésiennes* (le plus souvent orthonormées) ou *curvilignes* (le plus souvent cylindriques ou sphériques)

→ Le temps est déterminé par le choix d'une origine et d'une échelle

- Un repère orthonormé est caractérisé par une origine (par ex. O) **et 3 vecteurs de base orthonormés** (par ex. \underline{e}_i)

→ Les coordonnées x_i d'un point P sont telles que

$$\underline{QP} = \underline{x} = x_i \underline{e}_i \quad (\text{sommation sur } i \text{ muet})$$

→ Orthonormalité :

$$\underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \delta_{ij} \quad (i, j \text{ libres})$$

Coordonnées cylindriques

- **Définition**

→ A partir d'un repère cartésien orthonormé, les coordonnées cylindriques d'un point P sont

$$\begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \\ z = x_3 \end{cases}$$

$$(r \geq 0, -\pi < \theta \leq \pi)$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases}$$

- **Propriétés**

→ Pour chaque coordonnée, il y a une et une seule *surface de coordonnée* qui passe par P :

$$\begin{cases} r = C^{ste} & : \text{cylindre circulaire d'axe } Ox_3 \\ \theta = C^{ste} & : \text{demi-plan issu de } Ox_3 \\ z = C^{ste} & : \text{plan perpendiculaire à } Ox_3 \end{cases}$$

(les surfaces de coordonnées sont orthogonales en P)

→ En tout point P , on peut construire *la base locale orthonormée* $(\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$

→ NB : $\underline{OP} = r \underline{e}_r + z \underline{e}_z$

Coordonnées sphériques

- **Définition**

→ A partir d'un repère cartésien orthonormé, les coordonnées sphériques d'un point P sont

$$\begin{cases} r = (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{1/2} \\ \phi = \arctan \frac{(x_1^2 + x_2^2)^{1/2}}{x_3} \\ \theta = \arctan \frac{x_2}{x_1} \end{cases}$$

$$(r \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi, -\pi < \theta \leq \pi)$$

avec

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \phi \cos \theta \\ x_2 = r \sin \phi \sin \theta \\ x_3 = r \cos \phi \end{cases}$$

- **Propriétés**

→ Pour chaque coordonnée, il y a une et une seule *surface de coordonnée* qui passe par P :

$$\begin{cases} r = C^{ste} & : \text{sphère de centre } O \\ \phi = C^{ste} & : \text{cône (à une nappe) de sommet } O \text{ et d'axe } Ox_3 \\ \theta = C^{ste} & : \text{demi-plan issu de } Ox_3 \end{cases}$$

(les surfaces de coordonnées sont orthogonales en P)

→ En tout point P , on peut construire la *base locale orthonormée* $(\underline{e}_r, \underline{e}_\phi, \underline{e}_\theta)$

→ NB : $\underline{QP} = r \underline{e}_r$

Changements de repères

- Soient deux repères cartésiens orthonormés (O, \underline{e}_i) et (O', \underline{e}'_i)

→ On définit

$$a_{ij} = \cos(\underline{e}'_i, \underline{e}_j) = \underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j$$

▷ La matrice $\mathcal{A} = [a_{ij}]$ est *orthogonale* :

$$a_{ik} a_{jk} = a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij}$$

▷ On a les relations réciproques

$$\underline{e}'_i = a_{ij} \underline{e}_j$$

et

$$\underline{e}_i = a_{ji} \underline{e}'_j$$

→ On définit b_i tel que $\underline{OQ}' = b_i \underline{e}_i$

- **Changement de coordonnées cartésiennes**

→ Pour un point P , de coordonnées (x_i) ou (x'_i) , on prouve que

$$x'_i = a_{ij} (x_j - b_j)$$

et réciproquement, que

$$x_i = a_{ji} x'_j + b_i$$

→ Extension par *composition* de fonctions aux changements de coordonnées quelconques (cartésiennes ou curvilignes)

La matière en Mécanique des Milieux Continus

- **Dans tout corps** (partie de la matière), **les propriétés physiques sont continues, excepté sur certaines surfaces** (lignes, points) **de discontinuité**
 - Exemples de surfaces de discontinuité :
 - ▷ onde de choc
 - ▷ front de solidification
 - ▷ interface entre deux matériaux différents
 - N.B. : La dérivée partielle temporelle ($\frac{\partial}{\partial t}$) et le gradient ($\frac{\partial}{\partial x_i}$) d'une propriété physique sont des propriétés physiques
- **Justification de l'hypothèse de continuité au regard de la nature** (moléculaire, atomique, particulaire, quantique...) **de la matière**
 - Concept de *volume représentatif* :
 - ▷ très petit par rapport aux dimensions caractéristiques du phénomène observé
 - ▷ très grand par rapport aux dimensions caractéristiques de la structure fine de la matière (distances intermoléculaires, libre parcours moyen, ou diamètre des grains...), de sorte qu'il contient "beaucoup" de molécules ou grains...
 - A partir de grandeurs *extensives*, les grandeurs physiques *macroscopiques* de base sont définies en un point P par leurs *moyennes* prises sur un volume représentatif V^{repr} entourant P
 - De par leur construction, les champs ainsi obtenus sont supposés satisfaire l'hypothèse de continuité

- **Exemples**

→ Masse spécifique

$$\rho = \rho^{(e)}(x_i, t) = \frac{\mathcal{M}^{repr}(t)}{V^{repr}}$$

où

▷ $\mathcal{M}^{repr}(t)$ est la masse de matière occupant le volume représentatif au temps t (grandeur extensive)

▷ V^{repr} en est le volume

→ Vitesse

$$\rho v_i = \rho^{(e)}(x_j, t) v_i^{(e)}(x_j, t) = \frac{\mathcal{P}_i^{repr}(t)}{V^{repr}}$$

où $\mathcal{P}_i^{repr}(t)$ est la composante suivant \underline{e}_i de la quantité de mouvement du volume représentatif au temps t (grandeur extensive). De là,

$$v_i = \frac{\rho v_i}{\rho}$$

- **Extension**

→ En répétant l'expérience macroscopique considérée et en faisant la moyenne statistique (*moyenne "d'ensemble"*) des résultats obtenus, on peut travailler avec des volumes représentatifs aussi petits que l'on veut

→ Alors

$$\mathcal{M}^{repr}(t) = \langle \mathcal{M}^{(exp)}(t) \rangle$$

$$\mathcal{P}_i^{repr}(t) = \langle \mathcal{P}_i^{(exp)}(t) \rangle$$

où $\mathcal{M}^{(exp)}$ et $\mathcal{P}_i^{(exp)}$ sont les mesures associées aux différentes expériences et $\langle \cdot \rangle$ désigne leur moyenne d'ensemble

Scalars

- **Définition**

→ Pour un système d'unités choisi, un *champ scalaire* (ou tenseur d'ordre 0) est une grandeur physique représentée dans un certain repère par *une* fonction de la position (c.-à-d. des coordonnées) et du temps

→ Exemple : la masse spécifique

$$\rho = \rho^{(e)}(x_i, t)$$

→ Autres exemples :

▷ T (température absolue)

▷ p (pression)

▷ r (densité de puissance calorifique fournie à distance par rayonnement)

▷ U (énergie interne spécifique, c.-à-d. énergie calorifique et de liaison moléculaire par unité de masse)

▷ S (entropie spécifique)

- **Grandeurs scalaires extensives pour un volume V , au temps t**

$$\mathcal{M}(t) = \int_V \rho^{(e)}(x_i, t) dV \quad (\text{masse})$$

$$\mathcal{U}(t) = \int_V \rho^{(e)}(x_i, t) U^{(e)}(x_i, t) dV \quad (\text{énergie interne})$$

$$\mathcal{S}(t) = \int_V \rho^{(e)}(x_i, t) S^{(e)}(x_i, t) dV \quad (\text{entropie})$$

$$Q^d(t) = \int_V r^{(e)}(x_i, t) dV \quad (\text{puissance calorifique fournie par rayonnement})$$

$$\mathcal{K}(t) = \int_V \frac{1}{2} \rho^{(e)}(x_j, t) (v_i^{(e)}(x_j, t))^2 dV \quad (\text{énergie cinétique}) \quad (\text{N.B. : } i \text{ muet})$$

Changements de repères pour un champ scalaire

- **Invariance**

→ Pour tout *changement* entre deux repères *fixes l'un par rapport à l'autre*, la valeur d'un champ scalaire (par exemple s) à un endroit et à un instant déterminés est *invariante*

→ Si

$$\begin{aligned}s &= s^{(e)}(x_i, t) && \text{dans le repère cartésien } (O, \underline{e}_i) \\ &= s'^{(e)}(x'_i, t) && \text{dans le repère cartésien } (O', \underline{e}'_i)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}s'^{(e)}(x'_j, t) &= s^{(e)}(a_{ji} x'_j + b_i, t) \\ s^{(e)}(x_j, t) &= s'^{(e)}(a_{ij} (x_j - b_j), t)\end{aligned}$$

pourvu que a_{ij} et b_i ne dépendent pas de t

→ Même propriété pour un changement de coordonnées quelconques (cartésiennes, curvilignes ...)

- **Objectivité**

→ Un champ scalaire pour lequel la propriété d'invariance s'étend aux changements de repères quelconques (éventuellement *mobiles* l'un par rapport à l'autre) est dit *objectif*

→ Exemples : ρ, T, p, r, U, S

Vecteurs

- **Définition**

→ Pour un système d'unités choisi, un *champ vectoriel* (tenseur d'ordre 1) est une grandeur physique représentée dans un certain repère par 3 fonctions de la position et du temps. Celles-ci forment les 3 *composantes* du champ vectoriel, c.-à-d. les *projections* de ce champ sur les vecteurs de base (base *locale*, en cas de coordonnées curvilignes)

→ Exemple

Composantes de la vitesse :

$$v_i = \underline{v} \cdot \underline{e}_i = v_i^{(e)}(x_j, t)$$

Vecteur vitesse :

$$\underline{v} = v_i^{(e)}(x_j, t) \underline{e}_i \quad (i \text{ muet})$$

→ Autres exemples :

- ▷ g_i (force à distance par unité de masse ou spécifique)
- ▷ a_i (accélération)
- ▷ q_i (vecteur flux de chaleur)

- **Grandeurs vectorielles extensives pour un volume V , au temps t**

$$\mathcal{P}_i(t) = \int_V \rho v_i dV \quad (\text{quantité de mouvement})$$

$$\mathcal{F}_i^d(t) = \int_V \rho g_i dV \quad (\text{forces à distance externes})$$

Changements de repères pour un champ vectoriel

- **Invariance**

→ Pour tout changement entre deux repères *fixes l'un par rapport à l'autre*, les composantes w_i d'un champ vectoriel \underline{w} à un endroit et à un instant déterminés se *transforment* suivant une loi telle que ce vecteur lui-même soit *invariant*

→ Si

$$\begin{aligned}w_i &= w_i^{(e)}(x_k, t) && \text{dans le repère cartésien } (O, \underline{e}_i) \\w'_i &= w'_i{}^{(e)}(x'_k, t) && \text{dans le repère cartésien } (O', \underline{e}'_i)\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}w'_i{}^{(e)}(x'_l, t) &= a_{ij} w_j^{(e)}(a_{lk} x'_l + b_k, t) \\w_i^{(e)}(x_l, t) &= a_{ji} w'_j{}^{(e)}(a_{kl} (x_l - b_l), t)\end{aligned}$$

pourvu que a_{ij} et b_i ne dépendent pas de t . En abrégé :

$$\begin{aligned}w'_i &= a_{ij} w_j \\w_i &= a_{ji} w'_j\end{aligned}$$

et donc

$$\underline{w} = w_i \underline{e}_i = w'_i \underline{e}'_i$$

- **Objectivité**

→ Un champ vectoriel pour lequel la propriété d'invariance s'étend aux changements de repères quelconques (éventuellement *mobiles* l'un par rapport à l'autre) est dit *objectif*

→ Exemples de champs vectoriels objectifs : q_i, g_i

→ Exemples de champs vectoriels non objectifs : v_i, a_i

Passage aux coordonnées cylindriques ou sphériques pour un champ vectoriel

- **Changement de coordonnées**

→ On utilise l'expression des (x_i) en fonction de (r, θ, z) ou (r, ϕ, θ) pour effectuer le changement de *coordonnées*

- **Nouvelles composantes**

→ Afin de tenir compte, dans le calcul des nouvelles *composantes* des vecteurs, de la rotation des vecteurs de base, on utilise la matrice orthogonale des *cosinus directeurs* des vecteurs de la base locale (notés \underline{e}'_i) par rapport à ceux de la base cartésienne \underline{e}_i :

$$\mathcal{A} = [a_{ij}] = [\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j]$$

où $(\underline{e}'_i) = (\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ ou $(\underline{e}_r, \underline{e}_\phi, \underline{e}_\theta)$

Donc, en coordonnées cylindriques :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et en coordonnées sphériques :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

Ici, \mathcal{A} dépend de la position (et donc des coordonnées)

→ Exemple (coordonnées cylindriques) :

$$\begin{bmatrix} v_r^{(e)}(r, \theta, z, t) \\ v_\theta^{(e)}(r, \theta, z, t) \\ v_z^{(e)}(r, \theta, z, t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^{(e)}(r \cos \theta, r \sin \theta, z, t) \\ v_2^{(e)}(r \cos \theta, r \sin \theta, z, t) \\ v_3^{(e)}(r \cos \theta, r \sin \theta, z, t) \end{bmatrix}$$

Effets agissant à la frontière d'un corps

- **Position du problème**

→ Certaines des grandeurs physiques associées à un corps quelconque s'obtiennent par *addition* de contributions calculées sur les différentes parties de la *frontière* de ce corps

→ Exemples :

▷ La *force de contact* exercée sur un corps au temps t , de composantes cartésiennes $\mathcal{F}_i^c(t)$, est la somme vectorielle de toutes les forces exercées par le reste de la matière sur la surface de ce corps

▷ Le *flux de chaleur* entrant dans un corps au temps t , noté $Q^c(t)$, est la somme de tous les apports calorifiques injectés à la surface de ce corps par unité de temps

→ Méthode de calcul

En général, de telles grandeurs se calculent à l'aide de leur *densité* (grandeur par unité d'aire), qui *dépend* alors de la position et du temps, mais aussi de l'*orientation de la facette* considérée, mesurée par sa *normale* unitaire sortante locale :

$$\underline{n} = n_k \underline{e}_k$$

▷ *Densité de forces de contact* (ou contrainte) :

$$\tau_i(\underline{n}) = \tau_i^{(e)}(x_j, t, \underline{n})$$

(= force par unité d'aire exercée sur une facette de normale unitaire sortante \underline{n})

Par conséquent,

$$\mathcal{F}_i^c(t) = \int_{\partial V} \tau_i^{(e)}(x_j, t, \underline{n}) dS$$

▷ *Densité de flux de chaleur* :

$$q(\underline{n}) = q^{(e)}(x_i, t, \underline{n})$$

(= flux de chaleur par unité d'aire pénétrant dans une facette de normale unitaire sortante \underline{n})

Par conséquent,

$$Q^c(t) = \int_{\partial V} q^{(e)}(x_j, t, \underline{n}) dS$$

- **Linéarité**

→ Le plus souvent, on peut prouver que ces “densités” *dépendent linéairement* de la normale \underline{n} (cf. chapitre III). Dans un repère donné (cartésien ou curviligne), les composantes de ces densités dépendent alors linéairement des composantes de \underline{n} (mesurées par rapport à la base appropriée). Les *coefficients* de la *matrice* représentant la *transformation linéaire* peuvent alors être définis

▷ Densité de force de contact :

$$\tau_i^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) = \sigma_{ji}^{(e)}(x_k, t) n_j \quad (j \text{ muet}, i \text{ libre})$$

où les $\sigma_{ij}^{(e)}(x_k, t)$ définissent les composantes du *tenseur des contraintes* dans la base considérée.

En abrégé :

$$\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$$

▷ Densité de flux de chaleur :

$$q^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) = -q_i^{(e)}(x_k, t) n_i \quad (i \text{ muet})$$

où les $q_i^{(e)}(x_k, t)$ définissent les composantes du *vecteur densité de flux de chaleur* dans la base considérée. En abrégé :

$$q(\underline{n}) = -q_i n_i$$

→ *Interprétation*

La composante de \underline{e}_i (vecteur de base orthonormée cartésienne ou curviligne locale) suivant la direction \underline{e}_j est δ_{ij}

▷ Ainsi,

$$\tau_j(\underline{e}_i) = \sigma_{kj} \delta_{ik} = \sigma_{ij}$$

et σ_{ij} est la composante suivant \underline{e}_j de la densité de force de contact exercée sur une facette de normale unitaire sortante \underline{e}_i .

On a aussi

$$\tau(\underline{e}_i) = \sigma_{ij} \underline{e}_j$$

▷ De même,

$$q(\underline{e}_i) = -q_j \delta_{ij} = -q_i$$

et q_i est l'opposé de la densité de flux de chaleur pénétrant dans une facette de normale unitaire sortante \underline{e}_i .

Tenseurs

- **Définition**

→ Pour un système d'unités choisi, un *champ tensoriel d'ordre 2* est une grandeur physique représentée dans un certain repère par 9 fonctions de la position et du temps. Au champ tensoriel est associé en chaque point P et à chaque instant, une *transformation linéaire (locale)* :

vecteur en $P \rightarrow$ vecteur en P

Les 9 *composantes* du champ tensoriel sont les coefficients de la *matrice* (3×3) représentant la transformation linéaire dans la base considérée (base *locale* en cas de coordonnées curvilignes)

→ *Tenseurs de base* :

$\underline{e}_i \underline{e}_j$ désigne le *produit tensoriel* de \underline{e}_i par \underline{e}_j , c.-à-d. la transformation linéaire qui applique

$$\begin{cases} \underline{e}_j \text{ sur } \underline{e}_i \\ \text{les autres } \underline{e}_k \text{ sur } \underline{0} \text{ (vecteur nul)} \end{cases}$$

La matrice de cette transformation *dans la base* (\underline{e}_k) a pour éléments

$$\begin{cases} 1 \text{ à la } i^{\text{ème}} \text{ ligne, } j^{\text{ème}} \text{ colonne} \\ 0 \text{ ailleurs} \end{cases}$$

Exemple : la transformation linéaire $\underline{e}_2 \underline{e}_3$, qui applique \underline{e}_3 sur \underline{e}_2 , et \underline{e}_1 et \underline{e}_2 sur $\underline{0}$, a pour matrice dans la base $(\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ Exemple

▷ Contraintes :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{(e)}(x_k, t)$$

Tenseur des contraintes :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \sigma_{ij}^{(e)}(x_k, t) \underline{e}_i \underline{e}_j \quad (i, j \text{ muets})$$

▷ *Interprétation*

Il faut d'abord noter que le tenseur des contraintes est *symétrique* (cf. chapitre III) :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

La relation

$$\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ij}n_j$$

indique alors que le tenseur des contraintes, en tant que transformation linéaire, applique le vecteur unitaire \underline{n} sur la densité de force de contact $\tau(\underline{n})$ exercée sur toute facette élémentaire dont \underline{n} est la normale sortante en P .

→ Autre exemple

- ▷ Vitesses (ou taux) de déformation : à partir du champ de vitesses v_i , on définit en *coordonnées cartésiennes orthonormées*

$$d_{ij} = d_{ij}^{(e)}(x_k, t) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

Tenseur des taux de déformations :

$$\underline{d} = d_{ij}^{(e)}(x_k, t) \underline{e}_i \underline{e}_j$$

- ▷ *Interprétation* (cf. chapitre II) :

1. Dans tout repère choisi, une *composante diagonale* de d_{ij} , soit d_{11} , est l'*allongement relatif par unité de temps* d'un segment élémentaire de matière qui, au temps t , est parallèle à \underline{e}_1 :

$$d_{11} = d_{11}^{(e)}(x_k, t) = \lim_{\delta s(t), \delta t \rightarrow 0} \frac{\delta s(t + \delta t) - \delta s(t)}{\delta s(t) \delta t}$$

avec $\delta s(t') = \|\underline{\delta s}(t')\|$ ($t \leq t' \leq t + \delta t$)

2. Dans tout repère choisi, une *composante non diagonale* de d_{ij} , soit d_{12} , est la *moitié du rapprochement angulaire par unité de temps* de deux segments élémentaires de matière qui, au temps t , sont parallèles l'un à \underline{e}_1 , et l'autre à \underline{e}_2 :

$$d_{12} = d_{12}^{(e)}(x_k, t) = \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \frac{\delta \phi_{12}(t + \delta t)}{\delta t}$$

- **Tenseurs d'ordre quelconque**

Généralisation immédiate, par exemple en considérant récursivement qu'à un champ tensoriel d'ordre $(n + 1)$ est associé en chaque point P et à chaque instant une *transformation linéaire (locale)* :

vecteur en $P \rightarrow$ tenseur d'ordre n en P

Changements de repères pour un champ tensoriel

- **Invariance**

→ Pour tout changement entre deux repères *fixes l'un par rapport à l'autre*, les composantes T_{ij} d'un champ tensoriel \underline{T} à un endroit et à un instant déterminés se *transforment* suivant une loi telle que ce tenseur lui-même, en tant que *transformation linéaire*, soit *invariant*

→ Si

$$\begin{aligned} T_{ij} &= T_{ij}^{(e)}(x_m, t) && \text{dans le repère cartésien } (O, \underline{e}_i) \\ T'_{ij} &= T'_{ij}^{(e)}(x'_m, t) && \text{dans le repère cartésien } (O', \underline{e}'_i) \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} T'_{ij}^{(e)}(x'_n, t) &= a_{ik} a_{jl} T_{kl}^{(e)}(a_{nm} x'_n + b_m, t) \\ T_{ij}^{(e)}(x_n, t) &= a_{ki} a_{lj} T'_{kl}^{(e)}(a_{mn} (x_n - b_n), t) \end{aligned}$$

pourvu que a_{ij} et b_i ne dépendent pas de t . En abrégé :

$$\begin{aligned} T'_{ij} &= a_{ik} a_{jl} T_{kl} \\ T_{ij} &= a_{ki} a_{lj} T'_{kl} \end{aligned}$$

et donc

$$\underline{T} = T_{ij} \underline{e}_i \underline{e}_j = T'_{ij} \underline{e}'_i \underline{e}'_j$$

- **Objectivité**

→ Un champ tensoriel pour lequel la propriété d'invariance s'étend aux changements de repères quelconques (*éventuellement mobiles* l'un par rapport à l'autre) est dit *objectif*

→ Exemples de champs tensoriels objectifs : σ_{ij} , d_{ij}

→ Exemples de champs tensoriels non objectifs :

▷ $\frac{\partial v_j}{\partial x_i}$ (gradient de vitesses)

▷ $\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$ (taux de rotation)

Passage aux coordonnées cylindriques ou sphériques pour un champ tensoriel

- **Changement de coordonnées**

→ On utilise l'expression des (x_i) en fonction de (r, θ, z) ou (r, ϕ, θ) pour effectuer le changement de *coordonnées*

- **Nouvelles composantes**

→ Afin de tenir compte, dans le calcul des nouvelles *composantes* des tenseurs, de la rotation des vecteurs de base, on utilise la matrice orthogonale des *cosinus directeurs* des vecteurs de la base locale (notés \underline{e}'_i) par rapport à ceux de la base cartésienne \underline{e}_i :

$$\mathcal{A} = [a_{ij}] = [\underline{e}'_i \cdot \underline{e}_j]$$

où $(\underline{e}'_i) = (\underline{e}_r, \underline{e}_\theta, \underline{e}_z)$ ou $(\underline{e}_r, \underline{e}_\phi, \underline{e}_\theta)$

→ Exemple (coordonnées sphériques) :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{rr}^{(e)}(r, \phi, \theta), t & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} = \mathcal{A} \begin{bmatrix} \sigma_{11}^{(e)}(\hat{x}_i(r, \phi, \theta), t) & \dots \\ \vdots & \ddots \end{bmatrix} \mathcal{A}^T$$

avec

$$\mathcal{A}(r, \phi, \theta) = \begin{bmatrix} \sin \phi \cos \theta & \sin \phi \sin \theta & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \theta & \cos \phi \sin \theta & -\sin \phi \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\hat{x}_1(r, \phi, \theta) = r \sin \phi \cos \theta$$

$$\hat{x}_2(r, \phi, \theta) = r \sin \phi \sin \theta$$

$$\hat{x}_3(r, \phi, \theta) = r \cos \phi$$

Opérations tensorielles ponctuelles

- **Produit tensoriel**

→ *Définition*

Le produit tensoriel de 2 champs de vecteurs, par ex. \underline{u} et \underline{v} , est le champ tensoriel d'ordre 2, noté \underline{uv} , dont les composantes sont, dans tout repère, les produits 2 à 2 des composantes de ces vecteurs :

$$(\underline{uv})_{ij} = u_i v_j$$

→ Caractère tensoriel (*invariance*)

Les composantes de \underline{uv} se transforment, pour un changement de repères *fixes* l'un par rapport à l'autre, comme celles d'un *tenseur d'ordre 2* :

$$(u'_i v'_j) = a_{ik} a_{jl} (u_k v_l)$$

→ Extension : le produit tensoriel d'un champ tensoriel d'ordre m par un champ tensoriel d'ordre n est le champ tensoriel d'ordre $(m + n)$ dont les composantes sont dans tout repère les produits 2 à 2 des composantes de ces tenseurs

- **Contraction**

→ *Définition*

La contraction (ou *trace*) d'un champ tensoriel d'ordre 2, par ex. \underline{w} , est le champ scalaire (tenseur d'ordre 0), noté $\text{tr}(\underline{w})$, égal dans tout repère à la somme des composantes *diagonales* de ce tenseur :

$$\text{tr}(\underline{w}) = w_{ii} \quad (i \text{ muet})$$

→ *Invariance*

Le scalaire $\text{tr}(\underline{w})$ conserve la même valeur dans n'importe quel repère fixe par rapport au premier :

$$w'_{ii} = w_{ii}$$

si

$$w'_{ij} = a_{ik} a_{jl} w_{kl}$$

→ Extension

La contraction sur 2 indices choisis d'un champ tensoriel d'ordre $(n + 2)$ est le champ tensoriel d'ordre n obtenu par *sommation* sur les *valeurs répétées* de ces 2 indices

Exemple : pour un tenseur \underline{T} d'ordre 3, la contraction sur le 1^{er} et le 3^{ème} indice donne le vecteur (tenseur d'ordre 1) de composantes T_{jij}

• **Transposition**

→ *Définition*

La transposition d'un champ tensoriel d'ordre 2, par ex. \underline{T} , est le champ tensoriel d'ordre 2, noté \underline{T}^T , obtenu en transposant la matrice représentative de ce tenseur dans tout repère :

$$(\underline{T}^T)_{ij} = T_{ji}$$

→ Caractère tensoriel (*invariance*)

Pour un changement de repères *fixes* l'un par rapport à l'autre :

$$T'_{ji} = a_{ik}a_{jl}(T_{lk})$$

→ Extension (immédiate) : transposition sur 2 indices choisis d'un champ tensoriel d'ordre $(n + 2)$

→ Concepts associés :

▷ Tenseur symétrique : un champ tensoriel d'ordre 2 est dit *symétrique* si, en tout point, à tout instant,

$$\underline{T} = \underline{T}^T,$$

c.-à-d.

$$T_{ij} = T_{ji} \quad \text{dans tout repère}$$

▷ Tenseur antisymétrique : un champ tensoriel d'ordre 2 est dit *antisymétrique* si, en tout point, à tout instant,

$$\underline{T} = -\underline{T}^T,$$

c.-à-d.

$$T_{ij} = -T_{ji} \quad \text{dans tout repère}$$

▷ *Partie symétrique* d'un tenseur \underline{T} d'ordre 2 :

$$\frac{1}{2} (\underline{T} + \underline{T}^T), \quad \text{de composantes} \quad \frac{1}{2} (T_{ij} + T_{ji})$$

▷ *Partie antisymétrique* d'un tenseur \underline{T} d'ordre 2 :

$$\frac{1}{2} (\underline{T} - \underline{T}^T), \quad \text{de composantes} \quad \frac{1}{2} (T_{ij} - T_{ji})$$

▷ Tout tenseur d'ordre 2 est la somme de sa partie symétrique et de sa partie antisymétrique

→ Généralisations :

▷ On peut définir les concepts de tenseur d'ordre quelconque *complètement symétrique* (dont les composantes sont inchangées pour toute permutation de 2 indices quelconques), et *complètement antisymétrique* (dont les composantes sont opposées 2 à 2 pour toute permutation de 2 indices quelconques)

▷ On considère fréquemment en *élasticité* des tenseurs d'ordre 4 (par exemple \underline{S}) symétriques par rapport aux permutations des indices 1 et 2, des indices 3 et 4, et des paires d'indices (1, 2) et (3, 4) :

$$S_{ijkl} = S_{jikl} = S_{ijlk} = S_{klij}$$

$$(= S_{jilk} = S_{lkij} = S_{klji} = S_{lkji} \text{ par conséquent})$$

• **Opérations tensorielles ponctuelles élémentaires**

→ *Addition* de deux champs tensoriels de même ordre, *multiplication* d'un champ tensoriel par un *scalaire*

→ Ces opérations se font aisément composante par composante

• **Composition d'opérations tensorielles ponctuelles**

→ *Produit scalaire* de deux champs vectoriels \underline{u} et \underline{v}

$$\underline{u} \cdot \underline{v} = u_i v_i$$

(trace ou contraction du produit tensoriel de \underline{u} et \underline{v})

→ *Produit* d'un champ tensoriel \underline{T} d'ordre 2 et d'un champ vectoriel \underline{u}

$$(\underline{T} \cdot \underline{u})_i = T_{ij} u_j$$

(contraction sur les 2 derniers indices du produit tensoriel de \underline{T} et \underline{u})

- **Coordonnées curvilignes orthogonales**

→ En coordonnées *cylindriques* ou *sphériques*, les opérations tensorielles ponctuelles (produit tensoriel, contraction ...) s'effectuent exactement comme en coordonnées cartésiennes

→ Exemple : contraction d'un tenseur \underline{T} d'ordre 2 en coordonnées-composantes cylindriques :

$$\text{tr}(\underline{T}) = T_{rr} + T_{\theta\theta} + T_{zz}$$

Tenseurs à composantes invariantes

- **Tenseur identité (tenseur de substitution)**

→ Les δ_{ij} forment les *composantes* d'un *même tenseur* d'ordre 2 dans tout repère :

$$\delta_{ij} = a_{ik} a_{jl} \delta_{kl}$$

→ Formule de *substitution*

Par exemple, pour un tenseur T_{ij} d'ordre 2, on a

$$\delta_{ij} T_{jk} = T_{ik}$$

$$\delta_{ij} T_{kj} = T_{ki}$$

(substitution de i à j)

→ N.B. :

$$\delta_{ii} = 3$$

- **Pseudo-tenseur de permutation**

→ *Définition* du symbole ϵ_{ijk} :

▷ si (i, j, k) est une permutation *paire* de $(1, 2, 3)$,

c.-à-d. si $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1)$ ou $(3, 1, 2)$, alors

$$\epsilon_{ijk} = 1$$

▷ si (i, j, k) est une permutation *impaire* de $(1, 2, 3)$,

c.-à-d. si $(i, j, k) = (2, 1, 3), (3, 2, 1)$ ou $(1, 3, 2)$, alors

$$\epsilon_{ijk} = -1$$

▷ dans tous les autres cas,

$$\epsilon_{ijk} = 0$$

→ Caractère pseudo-tensoriel : les ϵ_{ijk} forment les composantes d'un *même tenseur* d'ordre 3 dans tout repère, *pourvu que* celui-ci ait la *même orientation* que le repère de départ :

$$\epsilon_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} \epsilon_{lmn}$$

pourvu que $\det(a_{ij}) = +1$

Physiquement, on se *limitera* à considérer des repères dits d'*orientation directe* (orientés suivant les 3 premiers doigts de la main droite)

• **Propriétés de ϵ_{ijk}**

→ Le pseudo-tenseur ϵ_{ijk} est *complètement antisymétrique*

$$\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik} = \epsilon_{jki} = -\epsilon_{kji} = \epsilon_{kij} = -\epsilon_{ikj}$$

→ On a les relations

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} = 0! \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}$$

$$\epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} = 1! \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} = \delta_{ik} \delta_{jl} - \delta_{il} \delta_{jk}$$

$$\epsilon_{ikl} \epsilon_{jkl} = 2! |\delta_{ij}| = 2 \delta_{ij}$$

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 3! = 6$$

→ A tout *tenseur d'ordre 2 antisymétrique* \underline{a} est associé un et un seul vecteur \underline{A} tel que

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} a_{kj} \\ a_{ij} &= -\epsilon_{ijk} A_k \end{aligned}$$

et donc

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & -A_3 & A_2 \\ A_3 & 0 & -A_1 \\ -A_2 & A_1 & 0 \end{bmatrix}$$

→ *Produit vectoriel*

Pour deux vecteurs quelconques \underline{u} et \underline{v} , on a

$$(\underline{u} \times \underline{v})_i = \epsilon_{ijk} u_j v_k$$

→ *Déterminant d'un tenseur*

Pour un tenseur d'ordre 2 quelconque \underline{T} , on définit

$$\det(\underline{T}) = \frac{1}{3!} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} T_{il} T_{jm} T_{kn}$$

C'est donc un *scalaire* (indépendant du repère), qui vaut dans tout repère le déterminant de la matrice des composantes du tenseur :

$$\det(\underline{T}) = \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{vmatrix}$$

- **Coordonnées cylindriques et sphériques**

→ En coordonnées curvilignes orthogonales, les symboles δ_{ij} et ϵ_{ijk} ont la *même signification* et le *même usage* qu'en coordonnées cartésiennes orthonormées

→ Exemples :

▷ composantes cylindriques

$$\delta_{rr} = 1, \quad \delta_{\theta z} = 0, \quad \epsilon_{r\theta z} = 1, \quad \epsilon_{\theta z\theta} = 0$$

▷ composantes sphériques

$$\delta_{\phi\phi} = 1, \quad \delta_{r\theta} = 0, \quad \epsilon_{r\phi\theta} = 1, \quad \epsilon_{\theta\phi r} = -1$$

Gradient en coordonnées cartésiennes orthonormées

- Gradient d'un scalaire

→ *Définition*

Le gradient d'un champ scalaire s est le champ vectoriel $\underline{\nabla}s$ dont les composantes sont dans tout repère *cartésien orthonormé* les *dérivées partielles spatiales* de ce scalaire :

$$(\underline{\nabla}s)_i = \frac{\partial s}{\partial x_i}$$

→ *Caractère vectoriel* (invariance)

Les composantes de $\underline{\nabla}s$ se transforment, pour un changement de repères *fixes* l'un par rapport à l'autre, comme celles d'un *vecteur* :

$$\frac{\partial s}{\partial x'_i} = a_{ij} \frac{\partial s}{\partial x_j}$$

ou, en détail,

$$\frac{\partial s^{(e)}}{\partial x'_i}(x'_l, t) = a_{ij} \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_j}(a_{lk} x'_l + b_k, t)$$

→ Exemple d'application : loi de *Fourier* de la conduction thermique

▷ cas isotrope :

$$q_i = -K \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

(K est le coefficient de *conduction thermique*)

▷ cas non-isotrope :

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

(K_{ij} est le *tenseur de conduction thermique*)

- **Gradient d'un vecteur**

→ *Définition*

Le gradient d'un champ vectoriel \underline{w} est le champ tensoriel d'ordre deux $\underline{\nabla w}$ dont les composantes sont dans tout repère *cartésien orthonormé* les *dérivées* partielles *spatiales* des composantes de ce vecteur :

$$(\underline{\nabla w})_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_i} (w_j) = \frac{\partial w_j}{\partial x_i}$$

→ *Caractère vectoriel* (invariance)

Les composantes de $\underline{\nabla w}$ se transforment, pour un changement de repères *fixes* l'un par rapport à l'autre, comme celles d'un *tenseur d'ordre 2* :

$$\frac{\partial w'_j}{\partial x'_i} = a_{ik} a_{jl} \frac{\partial w_l}{\partial x_k}$$

ou, en détail,

$$\frac{\partial w'_j{}^{(e)}}{\partial x'_i}(x'_n, t) = a_{ik} a_{jl} \frac{\partial w_l{}^{(e)}}{\partial x_k}(a_{nm} x'_n + b_m, t)$$

→ Exemple d'application

Le tenseur des *taux de déformation* est la partie symétrique du tenseur gradient de vitesses

$$d_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

ou

$$\underline{d} = \frac{1}{2} (\underline{\nabla v}^T + \underline{\nabla v})$$

Opérations composées avec le gradient en coordonnées cartésiennes orthonormées

• Divergence

→ *Définitions*

- ▷ La divergence $\underline{\nabla} \cdot \underline{w}$ d'un champ vectoriel \underline{w} est la *trace* de son gradient :

$$\underline{\nabla} \cdot \underline{w} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

C'est un champ scalaire (invariant) :

$$\frac{\partial w_i}{\partial x_i} = \frac{\partial w'_i}{\partial x'_i}$$

- ▷ La divergence $\underline{\nabla} \cdot \underline{T}$ d'un champ tensoriel symétrique d'ordre 2 est la *contraction*, sur l'un quelconque de ses indices, de son gradient :

$$(\underline{\nabla} \cdot \underline{T})_i = \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j}$$

C'est un champ vectoriel (invariant) :

$$\frac{\partial T'_{ik}}{\partial x'_k} = a_{ij} \frac{\partial T_{jl}}{\partial x_l}$$

→ *Théorème de la divergence* (ou de Green)

Pour tout volume V , de frontière ∂V de normale unitaire sortante \underline{n} ,

$$\int_{\partial V} w_i n_i dS = \int_V \frac{\partial w_i}{\partial x_i} dV$$
$$\int_{\partial V} T_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial T_{ji}}{\partial x_j} dV$$

• Rotationnel

→ *Définition*

Le rotationnel $\underline{\nabla} \times \underline{w}$ d'un champ vectoriel \underline{w} est la double contraction du produit tensoriel du pseudo-tenseur de permutation par le gradient de ce vecteur :

$$(\underline{\nabla} \times \underline{w})_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial w_k}{\partial x_j}$$

C'est un champ vectoriel (invariant) :

$$\epsilon_{ikl} \frac{\partial w'_l}{\partial x'_k} = a_{ij} \epsilon_{jmn} \frac{\partial w_n}{\partial x_m}$$

→ Exemple d'application en mécanique des fluides

▷ Le vecteur *tourbillon* $2\dot{\underline{\Omega}}$ est le rotationnel du champ de *vitesse* :

$$2\dot{\underline{\Omega}} = \nabla \times \underline{v}$$

ou

$$2\dot{\Omega}_i = \epsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

▷ Le vecteur *taux de rotation* $\dot{\underline{\Omega}}$ est la moitié du vecteur tourbillon

▷ Le tenseur *taux de rotation* $\dot{\underline{\omega}}$ est la partie antisymétrique du gradient de vitesse transposé :

$$\dot{\underline{\omega}} = \frac{1}{2} (\nabla \underline{v}^T - \nabla \underline{v})$$

ou

$$\dot{\omega}_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} - \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

On a les relations réciproques

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_{ij} &= -\epsilon_{ijk} \dot{\Omega}_k \\ \dot{\Omega}_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \dot{\omega}_{kj} \end{aligned}$$

▷ Interprétation (cf. chapitre II)

Dans tout repère choisi, le *vecteur taux de rotation* à un endroit P et à un certain instant donne la *direction* et la *vitesse angulaire* de *rotation* instantanée d'un élément infinitésimal de matière en ce point à cet instant

Pour tout Q voisin de P , la partie rotative autour de P de la vitesse en Q est

$$\dot{\underline{\omega}} \cdot \underline{dx} = \dot{\underline{\Omega}} \times \underline{dx}$$

(effet sur \underline{dx} de la transformation linéaire représentée par $\dot{\underline{\omega}}$)

→ *Théorème de Stokes*

Pour tout champ vectoriel \underline{w} et pour toute surface S de normale sortante \underline{n} , délimitée par une ligne fermée C orientée dans le sens direct par rapport à \underline{n} ,

$$\begin{aligned} \int_C w_i dx_i &= \int_S \epsilon_{ijk} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} n_i dS \\ \int_C \underline{w} \cdot \underline{dx} &= \int_S (\nabla \times \underline{w}) \cdot \underline{n} dS \end{aligned}$$

Opérateurs ∇ et Δ en coordonnées cartésiennes orthonormées

- Opérateur ∇ (nabla)

→ *Définition* : c'est l'opérateur défini en coordonnées *cartésiennes orthonormées* par

$$\nabla = \underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (i \text{ muet})$$

→ Applications : on opère comme si ∇ était un vecteur et on développe

▷ Gradient d'un scalaire

$$\nabla s = \left(\underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (s) = \frac{\partial s}{\partial x_i} \underline{e}_i$$

(les composantes sont donc bien $\frac{\partial s}{\partial x_i}$)

▷ Gradient d'un vecteur

$$\nabla \underline{w} = \left(\underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (\underline{e}_j w_j) = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \underline{e}_j$$

(les composantes sont donc bien $\frac{\partial w_j}{\partial x_i}$)

▷ Divergence d'un vecteur

$$\nabla \cdot \underline{w} = \left(\underline{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \cdot (\underline{e}_j w_j) = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \underline{e}_i \cdot \underline{e}_j = \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \delta_{ij} = \frac{\partial w_i}{\partial x_i}$$

(formule correcte)

▷ Rotationnel d'un vecteur

$$\nabla \times \underline{w} = \epsilon_{ijk} \left(\underline{e}_l \frac{\partial}{\partial x_l} \right)_j w_k = \epsilon_{ijk} \frac{\partial w_k}{\partial x_j} \underline{e}_i$$

(formule correcte)

• **Laplacien (opérateur Δ)**

→ *Définition* : c'est l'opérateur défini en coordonnées *cartésiennes orthonormées* par

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} \quad (i \text{ muet})$$

et donc, formellement,

$$\Delta = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla}$$

Le laplacien s'applique aux champs scalaires, vectoriels, tensoriels d'ordre *quelconque*, et donne un tenseur de *même ordre*

→ Exemples

▷ Laplacien d'un *scalaire* s

$$\begin{aligned} \Delta s &= \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \quad (i \text{ muet}) \\ &= \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} s) \end{aligned}$$

C'est la *divergence* du *gradient* de ce scalaire

▷ Laplacien d'un *vecteur* \underline{w}

$$(\Delta \underline{w})_i = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} \quad (i \text{ libre, } j \text{ muet})$$

et

$$\Delta \underline{w} = \underline{\nabla} \cdot (\underline{\nabla} \underline{w})$$

C'est la *divergence* du *gradient* de ce vecteur. C'est aussi le *gradient* de la *divergence* de ce vecteur moins le *double rotationnel* de ce vecteur :

$$\Delta \underline{w} = \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{w}) - \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{w})$$

ou

$$\frac{\partial^2 w_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial w_j}{\partial x_j} \right) - \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\epsilon_{klm} \frac{\partial w_m}{\partial x_l} \right)$$

Gradient en coordonnées curvilignes orthogonales

• Principe

- A cause de la dépendance des vecteurs de base locale par rapport à la position, les opérations impliquant des *dérivations spatiales* se font par des formules *différentes* en coordonnées *cylindriques et sphériques* et en coordonnées cartésiennes orthonormées
- Les formules sont dérivées de façon à ce que les *tenseurs* ainsi obtenus soient *invariants* (c.-à-d. représentent les mêmes tenseurs qu'en coordonnées cartésiennes)
- L'expression de l'*opérateur nabla* (∇) en coordonnées curvilignes et la *différentiation* des vecteurs de *base locale* permettent de trouver les formules cherchées

• Technique de calcul

- Expression de l'*opérateur* ∇
 - ▷ En coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

- ▷ En coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\nabla = \underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

- *Différentiation* de la *base locale*
 - ▷ En coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\begin{cases} d\underline{e}_r = \underline{e}_\theta d\theta \\ d\underline{e}_\theta = -\underline{e}_r d\theta \\ d\underline{e}_z = \underline{0} \end{cases}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial \theta} & \frac{\partial \underline{e}_r}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial \theta} & \frac{\partial \underline{e}_\theta}{\partial z} \\ \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial r} & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial \theta} & \frac{\partial \underline{e}_z}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{e}_\theta & \underline{0} \\ \underline{0} & -\underline{e}_r & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix}$$

▷ En coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\begin{cases} d\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_\phi d\phi + \sin\phi \mathbf{e}_\theta d\theta \\ d\mathbf{e}_\phi = -\mathbf{e}_r d\phi + \cos\phi \mathbf{e}_\theta d\theta \\ d\mathbf{e}_\theta = -(\sin\phi \mathbf{e}_r + \cos\phi \mathbf{e}_\phi) d\theta \end{cases}$$

et donc

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{e}_\phi & \sin\phi \mathbf{e}_\theta \\ 0 & -\mathbf{e}_r & \cos\phi \mathbf{e}_\theta \\ 0 & 0 & -(\sin\phi \mathbf{e}_r + \cos\phi \mathbf{e}_\phi) \end{bmatrix}$$

• **Gradient**

→ Gradient d'un *scalaire*

▷ Coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\begin{aligned} \nabla s &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (s) \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial s}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial s}{\partial z} \end{aligned}$$

Les composantes sont donc

$$\left(\frac{\partial s}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \theta}, \frac{\partial s}{\partial z} \right)$$

▷ Coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\begin{aligned} \nabla s &= \left(\mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin\phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (s) \\ &= \mathbf{e}_r \frac{\partial s}{\partial r} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \phi} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r \sin\phi} \frac{\partial s}{\partial \theta} \end{aligned}$$

Les composantes sont donc

$$\left(\frac{\partial s}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial \phi}, \frac{1}{r \sin\phi} \frac{\partial s}{\partial \theta} \right)$$

→ Gradient d'un vecteur

▷ Coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\begin{aligned}
\nabla \underline{w} &= \left(\underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \underline{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (w_r \underline{e}_r + w_\theta \underline{e}_\theta + w_z \underline{e}_z) \\
&= \frac{\partial w_r}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_r + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_\theta + \frac{\partial w_z}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_z \\
&+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) \underline{e}_\theta \underline{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} \right) \underline{e}_\theta \underline{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \underline{e}_\theta \underline{e}_z \\
&+ \frac{\partial w_r}{\partial z} \underline{e}_z \underline{e}_r + \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \underline{e}_z \underline{e}_\theta + \frac{\partial w_z}{\partial z} \underline{e}_z \underline{e}_z
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} (\nabla \underline{w})_{rr} & (\nabla \underline{w})_{r\theta} & (\nabla \underline{w})_{rz} \\ (\nabla \underline{w})_{\theta r} & (\nabla \underline{w})_{\theta\theta} & (\nabla \underline{w})_{\theta z} \\ (\nabla \underline{w})_{zr} & (\nabla \underline{w})_{z\theta} & (\nabla \underline{w})_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_r}{\partial r} & \frac{\partial w_\theta}{\partial r} & \frac{\partial w_z}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} \\ \frac{\partial w_r}{\partial z} & \frac{\partial w_\theta}{\partial z} & \frac{\partial w_z}{\partial z} \end{bmatrix}$$

▷ Coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\begin{aligned}
\nabla \underline{w} &= \left(\underline{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \underline{e}_\phi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} + \underline{e}_\theta \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (w_r \underline{e}_r + w_\phi \underline{e}_\phi + w_\theta \underline{e}_\theta) \\
&= \frac{\partial w_r}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_r + \frac{\partial w_\phi}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_\phi + \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \underline{e}_r \underline{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r} \right) \underline{e}_\phi \underline{e}_r + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{w_r}{r} \right) \underline{e}_\phi \underline{e}_\phi + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} \underline{e}_\phi \underline{e}_\theta \\
&+ \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} \right) \underline{e}_\theta \underline{e}_r + \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r \tan \phi} \right) \underline{e}_\theta \underline{e}_\phi \\
&+ \left(\frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_\phi}{r \tan \phi} \right) \underline{e}_\theta \underline{e}_\theta
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{bmatrix} (\nabla \underline{w})_{rr} & (\nabla \underline{w})_{r\phi} & (\nabla \underline{w})_{r\theta} \\ (\nabla \underline{w})_{\phi r} & (\nabla \underline{w})_{\phi\phi} & (\nabla \underline{w})_{\phi\theta} \\ (\nabla \underline{w})_{\theta r} & (\nabla \underline{w})_{\theta\phi} & (\nabla \underline{w})_{\theta\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial w_r}{\partial r} & \frac{\partial w_\phi}{\partial r} & \frac{\partial w_\theta}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{w_r}{r} & \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} \\ \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r} & \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r \tan \phi} & \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{w_r}{r} + \frac{w_\phi}{r \tan \phi} \end{bmatrix}$$

Opérations composées en coordonnées curvilignes orthogonales

- **Divergence d'un vecteur**

La divergence d'un vecteur \underline{w} est la trace de son gradient

→ En coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\nabla \cdot \underline{w} = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{1}{r} w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial w_z}{\partial z}$$

→ En coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\nabla \cdot \underline{w} = \frac{\partial w_r}{\partial r} + \frac{2}{r} w_r + \frac{1}{r} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} + \frac{1}{r \tan \phi} w_\phi + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta}$$

- **Divergence d'un tenseur**

La divergence d'un tenseur symétrique \underline{T} est la *contraction*, sur n'importe lequel de ses indices, de son *gradient*

→ En coordonnées-composantes *cylindriques* :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \underline{T})_r &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zr}}{\partial z} + \frac{T_{rr} - T_{\theta\theta}}{r} \\ (\nabla \cdot \underline{T})_\theta &= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{z\theta}}{\partial z} + \frac{T_{\theta r} + T_{r\theta}}{r} \\ (\nabla \cdot \underline{T})_z &= \frac{\partial T_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial T_{zz}}{\partial z} + \frac{T_{rz}}{r} \end{aligned}$$

→ En coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \underline{T})_r &= \frac{\partial T_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi r}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{2T_{rr} - T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta} + T_{\phi r} \cot \phi}{r} \\ (\nabla \cdot \underline{T})_\phi &= \frac{\partial T_{r\phi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{2T_{r\phi} + T_{\phi r} + (T_{\phi\phi} - T_{\theta\theta}) \cot \phi}{r} \\ (\nabla \cdot \underline{T})_\theta &= \frac{\partial T_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial T_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{2T_{r\theta} + T_{\theta r} + (T_{\phi\theta} + T_{\theta\phi}) \cot \phi}{r} \end{aligned}$$

- **Rotationnel d'un vecteur**

→ Le rotationnel $\nabla \times \underline{w}$ d'un champ vectoriel \underline{w} vaut, en coordonnées *cylindriques*,

$$\begin{aligned}(\nabla \times \underline{w})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial z} \\(\nabla \times \underline{w})_\theta &= \frac{\partial w_r}{\partial z} - \frac{\partial w_z}{\partial r} \\(\nabla \times \underline{w})_z &= \frac{\partial w_\theta}{\partial r} + \frac{w_\theta}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \theta}\end{aligned}$$

→ En coordonnées-composantes *sphériques* :

$$\begin{aligned}(\nabla \times \underline{w})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial w_\theta}{\partial \phi} + \frac{w_\theta}{r \tan \phi} - \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \theta} \\(\nabla \times \underline{w})_\phi &= \frac{1}{r \sin \phi} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{\partial w_\theta}{\partial r} - \frac{w_\theta}{r} \\(\nabla \times \underline{w})_\theta &= \frac{\partial w_\phi}{\partial r} + \frac{w_\phi}{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial w_r}{\partial \phi}\end{aligned}$$

- **Laplacien d'un scalaire**

→ Le laplacien $\Delta s = \nabla \cdot (\nabla s)$ vaut, en coordonnées *cylindriques*,

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

→ Le laplacien $\Delta s = \nabla \cdot (\nabla s)$ vaut, en coordonnées *sphériques*,

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \tan \phi} \frac{\partial s}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2}$$

• **Laplacien d'un vecteur**

→ Le laplacien $\Delta \underline{w} = \nabla (\nabla \cdot \underline{w}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{w})$ d'un champ vectoriel \underline{w} vaut, en coordonnées-composantes *cylindriques*,

$$\begin{aligned}(\Delta \underline{w})_r &= \Delta w_r - \frac{w_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \\(\Delta \underline{w})_\theta &= \Delta w_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r^2} \\(\Delta \underline{w})_z &= \Delta w_z\end{aligned}$$

où $\Delta w_r, \Delta w_\theta, \Delta w_z$ désignent les laplaciens scalaires formels de w_r, w_θ, w_z :

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 s}{\partial z^2}$$

→ Le laplacien $\Delta \underline{w} = \nabla (\nabla \cdot \underline{w}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{w})$ d'un champ vectoriel \underline{w} vaut, en coordonnées-composantes *sphériques*,

$$\begin{aligned}(\Delta \underline{w})_r &= \Delta w_r - 2 \frac{w_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_\phi}{\partial \phi} - \frac{2w_\phi}{r^2 \tan \phi} - \frac{2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \\(\Delta \underline{w})_\phi &= \Delta w_\phi + \frac{2}{r^2} \frac{\partial w_r}{\partial \phi} - \frac{w_\phi}{r^2 \sin^2 \phi} - \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial w_\theta}{\partial \theta} \\(\Delta \underline{w})_\theta &= \Delta w_\theta + \frac{2}{r^2 \sin \phi} \frac{\partial w_r}{\partial \theta} + \frac{2 \cos \phi}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial w_\phi}{\partial \theta} - \frac{w_\theta}{r^2 \sin^2 \phi}\end{aligned}$$

où $\Delta w_r, \Delta w_\phi, \Delta w_\theta$ désignent les laplaciens scalaires formels de w_r, w_ϕ, w_θ :

$$\Delta s = \frac{\partial^2 s}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial s}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 s}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2 \tan \phi} \frac{\partial s}{\partial \phi} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} \frac{\partial^2 s}{\partial \theta^2}$$

Intégration en coordonnées curvilignes orthogonales

- **Intégrales de volume**

→ L'élément de volume dV vaut

$$dV = r \, dr \, d\theta \, dz \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$dV = r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

→ En coordonnées-composantes curvilignes, on ne peut *pas* effectuer les intégrales de volume vectorielles (ou tensorielles) *composante* par *composante*, car les vecteurs (tenseurs) de *base locale* ne peuvent *pas* être *sortis des intégrales*. Il faut donc travailler en *composantes cartésiennes* et *coordonnées curvilignes*

- **Intégrales de ligne**

→ L'élément de longueur vectoriel \underline{dx} vaut

$$\underline{dx} = \underline{e}_r \, dr + r \, \underline{e}_\theta \, d\theta + \underline{e}_z \, dz \quad \text{en coordonnées cylindriques}$$

$$\underline{dx} = \underline{e}_r \, dr + r \, \underline{e}_\phi \, d\phi + r \sin \phi \, \underline{e}_\theta \, d\theta \quad \text{en coordonnées sphériques}$$

- **Intégrales de surface**

→ L'élément d'aire dS multiplié par la normale unitaire sortante à la facette \underline{n} vaut

▷ en coordonnées-composantes cylindriques :

$$\underline{n} \, dS = \underline{e}_r \, r \, d\theta \, dz \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_r$$

$$= \underline{e}_\theta \, dr \, dz \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_\theta$$

$$= \underline{e}_z \, r \, dr \, d\theta \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_z$$

▷ en coordonnées-composantes sphériques :

$$\underline{n} \, dS = \underline{e}_r \, r^2 \sin \phi \, d\phi \, d\theta \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_r$$

$$= \underline{e}_\phi \, r \sin \phi \, dr \, d\theta \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_\phi$$

$$= \underline{e}_\theta \, r \, dr \, d\phi \quad \text{pour une facette de normale sortante } \underline{e}_\theta$$

Moments

- **Définition**

→ Soit une grandeur *vectorielle extensive* calculée par intégration, sur un volume V , de sa densité (par exemple \underline{w} par unité de masse, et donc $\rho \underline{w}$ par unité de volume)

▷ La *densité de moment* de cette grandeur *par rapport à l'origine* O du repère est le vecteur

$$\underline{x} \times \rho \underline{w}$$

Ce vecteur forme avec \underline{x} et \underline{w} un trièdre d'*orientation directe*, et sa norme est le produit de la norme de $\rho \underline{w}$ par le "bras de levier" OP^* correspondant

▷ Alors, le *moment* de cette grandeur *vectorielle par rapport à* O est également une *grandeur extensive*, obtenue par intégration sur V de $\underline{x} \times \rho \underline{w}$

→ De même, soit une "action" *vectorielle* exercée à la *frontière* de V et mesurée par *intégration* sur ∂V d'une densité *vectorielle* (par ex. $\underline{p}(\underline{n})$), qui représente la densité de cette action *vectorielle* par unité d'aire, sur une facette de normale sortante \underline{n})

▷ Alors, le *moment* de cette action *vectorielle par rapport à* O est une "action" sur la frontière de V obtenue par intégration sur ∂V de $\underline{x} \times \underline{p}(\underline{n})$

- **Exemples**

→ *Moment par rapport à O de la quantité de mouvement* d'un volume V :

$$\underline{\mathcal{N}}(t) = \int_V \underline{x} \times \rho \underline{v} dV$$

ou, par composantes,

$$\mathcal{N}_i(t) = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV$$

→ *Moment par rapport à O des forces à distances* exercées sur V :

$$\underline{\mathcal{M}}^d(t) = \int_V \underline{x} \times \rho \underline{g} dV$$

ou, par composantes,

$$\mathcal{M}_i^d(t) = \int_V \epsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV$$

→ *Moment par rapport à O des forces de contact* exercées sur ∂V :

$$\underline{\mathcal{M}}^c(t) = \int_{\partial V} \underline{x} \times \underline{\tau}(\underline{n}) dS$$

ou, par composantes,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_i^c(t) &= \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} x_j \tau_k(\underline{n}) dS \\ &= \int_{\partial V} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} n_l dS \end{aligned}$$

Chapitre 2

Cinématique

Représentation lagrangienne du mouvement

- **Définitions**

→ Point matériel, configurations

- ▷ Un *point matériel* est défini par le mouvement d'un petit volume représentatif de matière, c.-à-d. qu'il se déplace à la *vitesse macroscopique* $v_i^{(e)}(x_j, t)$
- ▷ Une *ligne matérielle*, une *surface matérielle* ou un *volume matériel* sont formés par un ensemble de points matériels formant une ligne, une surface ou un volume de matière en mouvement
- ▷ Un corps en mouvement occupe des *configurations successives* $\mathcal{R}(t)$, chacune formée par l'ensemble des positions macroscopiques de ses points matériels à un instant t

→ Configuration et coordonnées de référence

- ▷ Une *configuration de référence* \mathcal{R}_0 est une *image virtuelle* (fictive) *figée* d'un corps, à laquelle on va se référer pour *désigner* ses différents points matériels
- ▷ La *position de référence* d'un point matériel déterminé est caractérisée par ses *coordonnées de référence* (ou *lagrangiennes*) X_A . Le système de coordonnées de référence est *indépendant* du repère utilisé pour décrire le mouvement et les champs (ils n'ont pas de rapport a priori)

- **Description lagrangienne du mouvement**

→ Relations de base

- ▷ Le mouvement d'un corps est entièrement décrit par trois relations

$$x_i = x_i^{(t)}(X_A, t)$$

Celles-ci donnent la position x_i au temps t du point matériel de coordonnées de référence (lagrangiennes) X_A

- ▷ En faisant varier t , pour X_A fixé, le point de coordonnées x_i décrit la *trajectoire* du point matériel. En faisant varier X_A dans \mathcal{R}_0 , pour t fixé, le point de coordonnées x_i balaie $\mathcal{R}(t)$

▷ Les relations *réciproques*

$$X_A = X_A^{(e)}(x_j, t)$$

sont supposées *définies* de manière *unique*

→ Intégration des relations de base

▷ Partant d'une *représentation eulérienne* des vitesses

$$v_i = v_i^{(e)}(x_j, t)$$

on considère le problème de Cauchy

$$\frac{d\hat{x}_{i0}(t)}{dt} = v_i^{(e)}(\hat{x}_{j0}(t), t)$$

et $\hat{x}_{i0}(t_0) = x_{i0}$

pour un *temps initial* (t_0) et une *position initiale* (x_{i0}) donnés

▷ La *solution* de ce problème

$$x_i = \hat{x}_{i0}(x_{j0}, t)$$

donne une représentation lagrangienne du mouvement, la configuration de référence étant la configuration au temps t_0 :

$$\mathcal{R}_0^* = \mathcal{R}(t_0)$$

▷ Le passage à une *autre* configuration de référence \mathcal{R}_0 (arbitraire) est immédiat par les relations

$$x_{i0} = x_{i0}^*(X_A)$$

qui lient *biunivoquement* les coordonnées de référence X_A et les coordonnées x_{i0} au temps t_0 .

Dès lors, par *composition* :

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{(l)}(X_A, t) \\ &= \hat{x}_{i0}(x_{j0}^*(X_A), t) \end{aligned}$$

Représentation lagrangienne des champs

- **Définition**

→ A partir de l'expression (ou la représentation) eulérienne d'un champ quelconque (scalaire, vectoriel, tensoriel)

$$s = s^{(e)}(x_i, t)$$

la *représentation lagrangienne* de ce champ se définit par expression de ce champ en fonction des coordonnées lagrangiennes et du temps :

$$s = s^{(l)}(X_A, t)$$

→ On trouve par *composition*

$$s^{(l)}(X_A, t) = s^{(e)}(x_j^{(l)}(X_A, t), t)$$

et réciproquement

$$s^{(e)}(x_i, t) = s^{(l)}(X_A^{(e)}(x_i, t), t)$$

- **Vitesses**

Les composantes *lagrangiennes* du champ de vitesses sont

$$v_i^{(l)}(X_A, t) = v_i^{(e)}(x_j^{(l)}(X_A, t), t)$$

Réciproquement,

$$v_i^{(e)}(x_j, t) = v_i^{(l)}(X_A^{(e)}(x_j, t), t)$$

Trajectoires, lignes de courant, lignes d'émission

- **Trajectoires**

→ Définition

La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions qu'il occupe dans son mouvement

→ Calcul

▷ En représentation *lagrangienne* :

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$$

pour X_A donnés

▷ En représentation *eulérienne* : résolution du problème de Cauchy

$$\frac{d\hat{x}_i}{dt} = v_i^{(e)}(\hat{x}_j, t)$$

$$\text{et } \hat{x}_i = x_{i0} \quad \text{pour } t = t_0$$

pour trouver la trajectoire $x_i = \hat{x}_i(t)$ passant par x_{i0} en t_0

- **Lignes de courant**

→ Définition

Une ligne de courant est l'une des *enveloppes* du champ de vitesses à un *instant* déterminé

→ Calcul en représentation *eulérienne*

On résoud le problème de Cauchy

$$\frac{d\hat{x}_i}{d\tau} = v_i^{(e)}(\hat{x}_j, t)$$

$$\text{et } \hat{x}_i = x_{i0} \quad \text{pour } \tau = t$$

pour trouver la ligne de courant $x_i = \hat{x}_i(\tau)$ passant par x_{i0} en t . La variable indépendante est τ

→ Interprétation

On fait comme si le champ de vitesses était stationnaire, c.-à-d. qu'on définit, pour tous les instants τ , un champ de vitesses *fictif* égal au champ de vitesses réel au temps particulier t :

$$v_i^*(x_j, \tau) = v_i^{(e)}(x_j, t)$$

Ensuite, les lignes de courant sont les trajectoires associées à ce champ de vitesses fictif

• Lignes d'émission

→ Définition

Une ligne d'émission est la ligne générée par émission continue de points matériels à partir d'une position donnée de l'espace

→ Calcul en représentation *lagrangienne*

La ligne d'émission émise depuis le point fixe x_{i0} à partir du temps t_0 a pour équation au temps $t \geq t_0$:

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$$

pour tous les X_A tels que, pour un certain temps d'émission τ compris entre t_0 et t ,

$$x_{i0} = x_i^{(l)}(X_A, \tau)$$

Donc, au temps t :

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A^{(e)}(x_{j0}, \tau), t)$$

pour toutes les valeurs du *paramètre* τ telles que

$$t_0 \leq \tau \leq t$$

• Propriété

→ Dans un problème *stationnaire*, les trajectoires, lignes de courant et lignes d'émission sont *confondues*

→ NB : un problème est stationnaire pour un *certain repère* quand la représentation *eulérienne* de toutes les grandeurs physiques dans ce repère est *indépendante du temps*

Dérivée matérielle

- **Définition**

Dans un certain repère, la dérivée matérielle d'une grandeur physique (scalaire, vectorielle, tensorielle) est la *variation* de cette propriété par rapport au *temps* pour un observateur qui *accompagne* le mouvement du point matériel pour lequel cette propriété est mesurée

- **Calcul pour un scalaire**

→ En représentation *lagrangienne*

▷ Soit une grandeur *scalaire*

$$s = s^{(l)}(X_A, t)$$

La dérivée matérielle $\frac{Ds}{Dt}$ de s s'obtient par *dérivation partielle* de cette grandeur par rapport au *temps* :

$$\begin{aligned}\frac{Ds}{Dt} &= \frac{\partial s^{(l)}}{\partial t}(X_A, t) \\ &= \frac{\partial s^{(l)}}{\partial t} \quad (\text{en abrégé})\end{aligned}$$

▷ La même formule est utilisée pour un scalaire en coordonnées *curvilignes*

→ En représentation *eulérienne*

▷ Soit un *scalaire*

$$s = s^{(e)}(x_i, t)$$

La dérivée matérielle $\frac{Ds}{Dt}$ de s s'obtient en reliant ses expressions eulérienne et lagrangienne

$$s^{(l)}(X_A, t) = s^{(e)}(x_i^{(l)}(X_A, t), t)$$

et, en procédant par *composition* de *dérivées* :

$$\begin{aligned}\frac{Ds}{Dt} &= \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i}(x_j, t) v_i^{(e)}(x_j, t) + \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t}(x_j, t) \\ &= \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t} + v_i^{(e)} \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i} \quad (\text{en abrégé}) \\ &= \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \underline{\nabla}) s^{(e)} \\ &= \frac{\partial s}{\partial t} + \underline{v} \cdot \underline{\nabla} s \quad (\text{contexte eulérien})\end{aligned}$$

-
- ▷ Pour passer en coordonnées *curvilignes*, il suffit de prendre la formule appropriée de l'opérateur ∇

• **Extension au cas d'un vecteur ou d'un tenseur**

→ Principe

- ▷ La dérivée matérielle d'un *vecteur* ou d'un *tenseur* d'ordre quelconque s'obtient en coordonnées-composantes *cartésiennes* de la même façon que pour un scalaire (en appliquant les formules *composante par composante*). En effet, les \underline{e}_i sont constants dans le repère choisi

- ▷ Ainsi, pour l'accélération \underline{a} :

$$a_i = \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial t} \quad (\text{en lagrangien})$$

$$= \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial t} + v_j^{(e)} \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_j} \quad (\text{en eulérien})$$

→ Coordonnées-composantes curvilignes

- ▷ Il faut tenir compte de la *dépendance* des vecteurs de *base locale* par rapport à la *position*, ce qui se fait par usage de l'opérateur ∇ .

- ▷ Par exemple, en représentation *eulérienne*, on trouve pour l'accélération

$$\underline{a} = \frac{D\underline{v}}{Dt} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{v}$$

Par conséquent, le développement des composantes du tenseur $\nabla \underline{v}$ donne, en coordonnées-composantes *cylindriques*,

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z}$$

$$a_z = \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

et, en coordonnées-composantes *sphériques*,

$$a_r = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{v_\phi^2}{r} + \frac{v_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r}$$

$$a_\phi = \frac{\partial v_\phi}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\phi}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{v_\phi v_r}{r} + \frac{v_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\phi}{\partial \theta} - \frac{v_\theta^2}{r \tan \phi}$$

$$a_\theta = \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\phi}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \frac{v_\theta}{r \sin \phi} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta v_r}{r} + \frac{v_\theta v_\phi}{r \tan \phi}$$

Théorème du transport (Reynolds)

- **Position du problème**

→ Soit une grandeur physique *extensive*, par exemple scalaire, $\mathcal{I}(t)$ calculée par intégration de sa *densité* volumique $f^{(e)}(x_i, t)$ ou massique $g^{(e)}(x_i, t)$ sur le *volume matériel* $V(t)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(t) &= \int_{V(t)} f^{(e)}(x_i, t) dV = \int_{V(t)} \rho^{(e)}(x_i, t) g^{(e)}(x_i, t) dV \\ &= \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \rho g dV \quad (\text{en abrégé})\end{aligned}$$

→ On veut calculer

$$\frac{d\mathcal{I}(t)}{dt}$$

- **Cas scalaire**

→ Enoncés

$$1) \quad \frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \underline{v} \right) dV$$

$$2) \quad \frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f \underline{v}) \right) dV$$

$$3) \quad \frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} f \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

$$4) \quad \frac{d\mathcal{I}(t)}{dt} = \int_{V(t)} \rho \frac{Dg}{Dt} dV$$

→ **Commentaire :**

Les formules précédentes sont utilisables aussi bien en coordonnées *cartésiennes orthonormées* qu'en coordonnées *cylindriques* ou *sphériques*, mais elles se développent différemment suivant le cas. Par exemple,

$$\nabla \cdot \underline{v} = \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$$

en coordonnées-composantes cartésiennes orthonormées seulement

- **Cas vectoriel ou tensoriel**

→ Les formules précédentes *s'étendent* immédiatement au cas d'une *grandeur extensive* vectorielle ou tensorielle.

Exemple :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{w} dV = \int_{V(t)} \left(\frac{D\underline{w}}{Dt} + \underline{w} \nabla \cdot \underline{v} \right) dV$$

→ Calcul pratique

▷ En coordonnées *cartésiennes orthonormées*, la formule peut être appliquée *composante par composante* :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} w_i dV = \int_{V(t)} \left(\frac{Dw_i}{Dt} + w_i \frac{\partial v_j}{\partial x_j} \right) dV$$

▷ En coordonnées *cylindriques* ou *sphériques*, les vecteurs de *base locale* dépendent de la position et ne peuvent *pas* être *sortis* des *intégrales*. On peut alors travailler en *coordonnées curvilignes* et *composantes cartésiennes*

- **Interprétation**

→ Formule 1)

▷ On considère les intégrales comme des *limites* de *sommes de produits* :

$$\int_{V(t)} f dV = \lim \sum_K f_K \delta V_K$$

où f_K est la valeur de f en un point *matériel* de coordonnées lagrangiennes X_A^K :

$$f_K = f^{(l)}(X_A^K, t)$$

tandis que δV_K est un "*petit*" *volume matériel* centré en ce point matériel :

$$\delta V_K = \delta V_K(t)$$

▷ Par *dérivation temporelle* et passage à la limite, on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f dV = \int_{V(t)} \left(\frac{Df}{Dt} dV + f \frac{D}{Dt} (dV(t)) \right)$$

▷ Par comparaison avec la formule 1), il vient :

$$\frac{D}{Dt} (dV(t)) = (\nabla \cdot \mathbf{v}) dV(t)$$

et la divergence du champ de vitesse $\nabla \cdot \mathbf{v}$ est *l'accroissement relatif* par unité de temps d'un *volume matériel élémentaire* $dV(t)$

→ Formule 3)

▷ On observe que

$$\int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV$$

est la variation par rapport au temps de l'intégrale de la densité f sur le *volume fixé* à sa valeur au temps t (c.-à-d. qu'on dérive *sous* le signe d'intégration comme si $V(t)$ ne dépendait pas de t)

▷ D'autre part,

$$\int_{\partial V(t)} f \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dS$$

est le *flux à travers* $\partial V(t)$ de la grandeur extensive de densité f (compté positivement pour un flux sortant)

→ Formule 4)

▷ Considérant de nouveau les intégrales comme des limites de sommes de produits :

$$\int_{V(t)} \rho g dV = \lim \sum_K g_K (\rho_K \delta V_K)$$

on trouve par *dérivation temporelle* et passage à la limite :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho g dV = \int_{V(t)} \left(\frac{Dg}{Dt} \rho dV + g \frac{D}{Dt} (\rho dV(t)) \right)$$

▷ Par comparaison avec la formule 4), il vient :

$$\frac{D}{Dt} (\rho dV(t)) = 0$$

et la masse $\rho dV(t)$ d'un volume matériel élémentaire $dV(t)$ est *invariable* dans le temps (chapitre III)

Dérivées convectives

- **Position du problème**

La dérivée matérielle d'un champ vectoriel ou tensoriel *objectif* n'est *pas nécessairement* objective. Lorsque cette propriété est requise (comme en rhéologie), d'autres opérateurs de dérivation sont introduits

- **Définitions**

→ La *dérivée convective supérieure* d'un champ vectoriel \underline{w} est

$$\overset{\nabla}{\underline{w}} = \frac{D\underline{w}}{Dt} - \underline{w} \cdot \nabla \underline{v}$$

→ La *dérivée convective inférieure* d'un champ vectoriel \underline{w} est

$$\overset{\Delta}{\underline{w}} = \frac{D\underline{w}}{Dt} + (\nabla \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

→ On peut définir par des formules similaires les dérivées convectives supérieures et inférieures de champs *tensoriels* quelconques

- **Propriété**

Les dérivées convectives supérieures et inférieures d'un champ vectoriel ou tensoriel *objectif* sont *objectives*

Gradient de déformation

- **Définition**

→ Partant d'une représentation *lagrangienne* du mouvement

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$$

le tenseur des gradients de déformation est défini par

$$F_{iA} = F_{iA}^{(l)}(X_B, t) = \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_A}(X_B, t)$$

→ L'un des indices (i) de F_{iA} se rapporte à la configuration réelle $\mathcal{R}(t)$, tandis que l'autre indice (A) se rapporte à la configuration de référence \mathcal{R}_0

- **Interprétation**

→ Un segment matériel infinitésimal "virtuel" dX_A , issu du point X_A dans la configuration de référence \mathcal{R}_0 , se *transforme* au temps t en un segment infinitésimal "réel" dx_i , issu du point (x_i) dans $\mathcal{R}(t)$ avec $x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$, suivant la loi *linéaire*

$$dx_i = F_{iA}(X_B, t) dX_A$$

Décomposition polaire

- **Théorème**

→ *Premier énoncé*

- ▷ Pour tout point matériel (X_A), à tout instant t , le gradient de déformation se *décompose* de façon *unique* en le produit d'un tenseur *orthogonal* \underline{R} par un tenseur *symétrique défini positif* \underline{U} :

$$F_{iA}^{(l)}(X_C, t) = R_{iB}^{(l)}(X_C, t) U_{BA}^{(l)}(X_C, t)$$

- ▷ En abrégé :

$$F_{iA} = R_{iB} U_{BA}$$

avec

$$R_{iA} R_{iB} = \delta_{AB} \quad (\text{orthogonalité})$$

$$R_{iA} R_{jA} = \delta_{ij} \quad (\text{orthogonalité})$$

$$U_{AB} = U_{BA} \quad (\text{symétrie})$$

$$\forall a_A \neq 0, \quad a_A U_{AB} a_B > 0 \quad (\text{définie positivité})$$

- ▷ On écrit aussi

$$\underline{F} = \underline{R} \cdot \underline{U}$$

avec

$$\underline{R}^T \cdot \underline{R} = \underline{I}$$

$$\underline{R} \cdot \underline{R}^T = \underline{I}$$

$$\underline{U} = \underline{U}^T$$

$$\forall \underline{a} \neq \underline{0}, \quad \underline{a} \cdot \underline{U} \cdot \underline{a} > 0$$

→ *Second énoncé*

- ▷ Le gradient de déformation se *décompose* de manière *unique* en le produit d'un tenseur *symétrique défini positif* \underline{V} par un tenseur *orthogonal* \underline{R} (le même que précédemment)

- ▷ En abrégé :

$$F_{iA} = V_{ij} R_{jA}$$

ou

$$\underline{F} = \underline{V} \cdot \underline{R}$$

avec

$$V_{ij} = V_{ji} \quad (\text{symétrie})$$

$$\forall a_i \neq 0, \quad a_i V_{ij} a_j > 0 \quad (\text{définie positivité})$$

- **Interprétation**

→ *Transformation*

- ▷ Soit, dans un certain système d'*axes communs* à \mathcal{R}_0 et \mathcal{R} , une transformation affine (homogène) entre ces deux configurations :

$$x_i = L_{ij} X_j + b_i$$

où les L_{ij} et b_i sont constants

- ▷ Un second point (Y_j) de \mathcal{R}_0 se transforme dans \mathcal{R} suivant la loi

$$y_i = L_{ij} Y_j + b_i$$

- ▷ Par différence,

$$(y_i - x_i) = L_{ij}(Y_j - X_j)$$

et les *vecteurs matériels* ($Y_i - X_i$) de \mathcal{R}_0 sont transformés en vecteurs ($y_i - x_i$) de \mathcal{R} par la transformation *linéaire* de matrice $[L_{ij}]$

→ *Transformation orthogonale*

- ▷ Si la transformation linéaire, et donc la matrice $[L_{ij}]$, sont orthogonales, le *produit scalaire* de toute paire de vecteurs matériels

$$S = (Y_i - X_i)(Z_i - X_i)$$

est conservé par la transformation :

$$\begin{aligned} s &= (y_i - x_i)(z_i - x_i) \\ &= L_{ij} L_{ik} (Y_j - X_j)(Z_k - X_k) \\ &= S \end{aligned}$$

- ▷ La *distance* entre (X_i) et (Y_i) est donc *conservée* :

$$(Y_i - X_i)^2 = (y_i - x_i)^2$$

- ▷ L'*angle* entre les vecteurs ($Y_i - X_i$) et ($Z_i - X_i$) est également *conservé*, puisque son cosinus vaut

$$\frac{(Y_i - X_i)(Z_i - X_i)}{\|Y_j - X_j\| \|Z_k - X_k\|} = \frac{(y_i - x_i)(z_i - x_i)}{\|y_j - x_j\| \|z_k - x_k\|}$$

- ▷ Lorsque le *déterminant* de $[L_{ij}]$ est positif (c.-à-d. lorsqu'il vaut +1, puisque cette matrice est orthogonale), l'*orientation* de tout triplet de vecteurs est aussi *conservée*

-
- ▷ Une transformation linéaire homogène *orthogonale* de déterminant positif correspond donc à une *rotation* de tous les vecteurs matériels autour du point matériel considéré, superposée à la *translation* de \mathcal{R}_0 à \mathcal{R} qui amène (X_i) en (x_i)

→ *Transformation symétrique définie positive*

- ▷ Si la transformation linéaire, et donc la matrice $[L_{ij}]$, sont symétriques définies positives, elles ont trois *vecteurs propres ortho-normés* \underline{e}'_i et trois *valeurs propres* réelles λ_i strictement *positives*
- ▷ Passant à la base \underline{e}'_i , la transformation linéaire prend alors une forme *diagonale* :

$$[L'_{ij}] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

- ▷ Un *vecteur matériel* $\delta S \underline{e}'_i$, issu de (X'_i) et parallèle à \underline{e}'_i , se transforme en un vecteur matériel issu de (x'_i) qui lui est *parallèle* :

$$(\lambda_i \delta S) \underline{e}'_i \quad (\text{sans sommation})$$

- ▷ Une transformation homogène *symétrique définie positive* correspond donc à une *déformation pure* de tous les vecteurs matériels autour du point matériel considéré, superposée à la *translation* de \mathcal{R}_0 à \mathcal{R} qui applique (X_i) sur (x_i)

→ *Conclusion*

- ▷ On combine les résultats précédents avec le théorème de *décomposition polaire* : la transformation d'un *voisinage infinitésimal* de X_A dans \mathcal{R}_0 en un voisinage infinitésimal de $x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$ dans $\mathcal{R}(t)$ est, *localement*, la *composition* d'une *déformation pure* U_{AB} suivie d'une *rotation* R_{iA} , ou également la composition de la rotation R_{jA} suivie de la déformation pure V_{ij}
- ▷ NB : pour arriver à ce résultat, il faut supposer que le tenseur F_{iA} a un déterminant positif, c.-à-d. que l'*orientation* des axes est la même dans \mathcal{R}_0 et $\mathcal{R}(t)$. En *pratique*, c'est toujours le cas

Tenseurs de déformation

• Introduction

→ *Point de départ*

▷ Soit (X_A) les coordonnées lagrangiennes d'un point matériel, et

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$$

ses coordonnées eulériennes au temps t

▷ Un vecteur *élémentaire* (dX_A) dans \mathcal{R}_0 , issu de (X_A) et de longueur dS , se transforme dans $\mathcal{R}(t)$ en un vecteur élémentaire (dx_i), issu de (x_i) et de longueur ds , suivant la loi *locale*

$$dx_i = F_{iA}^{(l)}(X_B, t) dX_A$$

▷ Un second vecteur élémentaire (dY_A) issu du même point se transforme en un vecteur (dy_i) suivant la même loi

→ *Objectif*

▷ On veut calculer la *différence* ($dx_i dy_i - dX_A dY_A$) des *produits scalaires* de ces vecteurs résultant de cette transformation

▷ En particulier, on veut calculer la *différence* ($ds^2 - dS^2$) des *carrés longueurs* d'un vecteur élémentaire résultant de la transformation

▷ Il s'agit d'effets de *déformation locale*, car la rotation locale R_{iA} n'a aucun effet sur ces grandeurs

• Calculs

→ On trouve

$$\begin{aligned} dx_i dy_i - dX_A dY_A &= (F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB}) dX_A dY_B \\ &= \left(\delta_{ij} - F_{Ai}^{-1} F_{Aj}^{-1} \right) dx_i dy_j \end{aligned}$$

où F_{Ai}^{-1} est l'inverse du tenseur F_{iA} , avec

$$F_{iA} F_{Aj}^{-1} = \delta_{ij}$$

$$F_{Ai}^{-1} F_{iB} = \delta_{AB}$$

→ On définit

▷ le tenseur de déformation de *Lagrange* E_{AB} :

$$\begin{aligned} 2 E_{AB} &= F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB} \\ &= U_{AC} U_{CB} - \delta_{AB} \quad (\text{par décomposition polaire}) \end{aligned}$$

▷ le tenseur de déformation d'*Euler* e_{ij} :

$$\begin{aligned} 2 e_{ij} &= \delta_{ij} - F_{Ai}^{-1} F_{Aj}^{-1} \\ &= \delta_{ij} - V_{ik}^{-1} V_{kj}^{-1} \quad (\text{par décomposition polaire}) \end{aligned}$$

• Conclusions

→ *Mesures de déformation*

▷ Variation de \mathcal{R}_0 à $\mathcal{R}(t)$ du produit scalaire de deux vecteurs élémentaires :

$$\begin{aligned} dx_i dy_j - dX_A dY_A &= 2 E_{AB} dX_A dY_B \\ &= 2 e_{ij} dx_i dy_j \end{aligned}$$

▷ Variation de \mathcal{R}_0 à $\mathcal{R}(t)$ du carré de la longueur d'un vecteur élémentaire :

$$\begin{aligned} ds^2 - dS^2 &= 2 E_{AB} dX_A dX_B \\ &= 2 e_{ij} dx_i dx_j \end{aligned}$$

→ Les tenseurs de Lagrange et d'Euler permettent donc, comme les tenseurs U_{AB} et V_{ij} (auxquels ils sont biunivoquement liés), de mesurer la *déformation locale* de \mathcal{R}_0 à $\mathcal{R}(t)$

Suivant la nécessité, on travaille avec les vecteurs $dX_A, dY_A \dots$ (dans \mathcal{R}_0) ou $dx_i, dy_i \dots$ (dans $\mathcal{R}(t)$)

Petits déplacements

- **Vecteur déplacement**

→ Il faut que les *axes* pour les configurations \mathcal{R}_0 et $\mathcal{R}(t)$ soient *communs*. Le même type d'*indices* ($i, j \dots$) est alors utilisé pour les coordonnées eulériennes (x_i) et lagrangiennes (X_i)

→ En coordonnées-composantes *cartésiennes*, le vecteur déplacement (de \mathcal{R}_0 à $\mathcal{R}(t)$) est la différence

$$u_i = x_i - X_i$$

En représentations lagrangienne et eulérienne, il s'écrit respectivement

$$\begin{aligned} u_i^{(l)}(X_j, t) &= x_i^{(l)}(X_j, t) - X_i \\ u_i^{(e)}(x_j, t) &= x_i - X_i^{(e)}(x_j, t) \end{aligned}$$

- **Position du problème**

→ Soit, pour \mathcal{R}_0 donné, une *famille* de champs de *déplacements* (et donc d'histoires du mouvement) dépendant d'un paramètre petit ϵ :

$$u_{i,\epsilon} = O(\epsilon L) = O(\epsilon)$$

On fait la même supposition pour toutes les *dérivées partielles* successives du déplacement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_{i,\epsilon}^{(l)}}{\partial X_j} &= O(\epsilon) \\ &\dots \end{aligned}$$

→ Le *problème effectif* qu'on considère correspond à une *valeur particulière* ($\bar{\epsilon}$) suffisamment petite de ϵ ($0 < \bar{\epsilon} \ll 1$). On note

$$u_i = u_{i,\bar{\epsilon}}$$

- Propriétés des petits déplacements

→ Les *représentations lagrangienne* et *eulérienne* de tous les champs sont *confondues*

Par exemple, pour un champ scalaire s ,

$$s^{(e)}(x_i, t) = s^{(l)}(x_i, t)$$

(remplacement direct de X_i par x_i , et vice-versa)

→ Les *dérivées partielles spatiales* de tous les champs s'effectuent *indifféremment* par rapport aux coordonnées lagrangiennes et eulériennes

Par exemple, pour $x_i = x_i^{(l)}(X_j, t)$,

$$\frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i}(x_j, t) = \frac{\partial s^{(l)}}{\partial X_i}(X_j, t)$$

ou, en abrégé,

$$\frac{\partial s}{\partial x_i} = \frac{\partial s}{\partial X_i}$$

→ Les dérivées *matérielles* de tous les champs sont *confondues* avec leurs dérivées *temporelles eulériennes* :

$$\frac{Ds^{(e)}}{Dt}(x_i, t) = \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t}(x_i, t)$$

ou, en abrégé,

$$\frac{Ds}{Dt} = \frac{\partial s}{\partial t}$$

En particulier, la dérivée temporelle eulérienne du déplacement est le champ de vitesses :

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{Du_i}{Dt} && \text{(en général)} \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} && \text{(petits déplacements)} \end{aligned}$$

Déformations et rotations infinitésimales

- **Définitions** (petits déplacements seulement)

→ Tenseur des déformations infinitésimales :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

→ Tenseur et vecteur des rotations infinitésimales :

$$\omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

et

$$\Omega_i = \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \frac{\partial u_k}{\partial x_j}$$

avec

$$\begin{aligned} \omega_{ij} &= -\epsilon_{ijk} \Omega_k \\ \Omega_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_{kj} \end{aligned}$$

- **Interprétation**

→ Dans le repère considéré, une *composante diagonale* de ϵ_{ij} , soit ϵ_{11} , est l'*allongement relatif* d'un segment élémentaire de matière qui, dans \mathcal{R}_0 , est parallèle à \underline{e}_1 :

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{11}^{(e)}(x_k, t) = \lim_{\delta S \rightarrow 0} \frac{\delta s(t) - \delta S}{\delta S}$$

avec $\delta s(t) = \|\underline{\delta s}(t)\|$

→ Dans le repère considéré, une *composante non diagonale* de ϵ_{ij} , soit ϵ_{12} , est la *moitié du rapprochement angulaire* de deux segments élémentaires de matière qui, dans \mathcal{R}_0 , sont parallèles l'un à \underline{e}_1 et l'autre à \underline{e}_2 :

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{12}^{(e)}(x_k, t) = \frac{1}{2} \delta \phi_{12}(t)$$

→ Dans le repère considéré, le *vecteur de rotation infinitésimale* à un endroit P donne la *direction* et l'*angle de rotation* d'un élément infinitésimal de matière à cet endroit depuis \mathcal{R}_0 jusque $\mathcal{R}(t)$

- **Propriétés (en petits déplacements)**

→ *Décomposition polaire*

Les tenseurs U_{ij} , V_{ij} et R_{ij} s'écrivent

$$U_{ij} = V_{ij} = \delta_{ij} + \epsilon_{ij}$$

$$R_{ij} = \delta_{ij} + \omega_{ij}$$

→ *Tenseurs de déformation de Lagrange et d'Euler*

$$E_{ij} = e_{ij} = \epsilon_{ij}$$

→ *Vitesse de déformation*

$$d_{ij} = \frac{D\epsilon_{ij}}{Dt} = \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}$$

Intégration du champ de déplacements

- **Position du problème**

→ Connaissant le champ de *déformations infinitésimales*

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^{(e)}(x_k, t)$$

on cherche à répondre aux questions suivantes :

▷ Y a-t-il toujours un champ de *déplacements*

$$u_i = u_i^{(e)}(x_j, t)$$

dont ces déformations dérivent ?

▷ Quelles sont les *données* additionnelles nécessaires pour que ce champ soit *unique* (s'il y en a un) ?

▷ Comment calculer le champ de déplacements ?

→ *Stratégie*

On *construit* effectivement d'abord le champ de *rotations infinitésimales* et puis le champ de *déplacements*, tout en examinant les conditions qui permettent d'effectuer les calculs et de fixer le résultat de manière unique

- **Solution**

→ *Lemmes* :

La solution doit vérifier les relations

$$\frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} = \frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i}$$

et

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \epsilon_{ij} + \omega_{ij}$$

→ Intégration des *rotations infinitésimales*

▷ Partant de la forme différentielle

$$d\omega_{ij} = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x_k} dx_k = \left(\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

on trouve

$$\begin{aligned}\omega_{ij} &= \omega_{ij}^{(e)}(x_l, t) \\ &= \omega_{ij}^0 + \int_{x_i^0}^{x_i} \left(\frac{\partial \epsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \epsilon_{jk}}{\partial x_i} \right)_{(\xi_l, t)} d\xi_k\end{aligned}$$

- ▷ Cette intégrale est *indépendante* du *chemin* d'intégration (et fournit un champ de rotations infinitésimales acceptable) si la *différentielle* $d\omega_{ij}$ est *exacte*
- ▷ Le champ $\omega_{ij}^{(e)}(x_l, t)$ est fixé de façon *unique* par la *donnée* de la rotation infinitésimale ω_{ij}^0 (antisymétrique) au point x_i^0 , ou de conditions équivalentes

→ Intégration des *déplacements*

- ▷ Partant de la forme différentielle

$$du_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j = (\epsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

on trouve

$$\begin{aligned}u_i &= u_i^{(e)}(x_k, t) \\ &= u_i^0 + \int_{x_k^0}^{x_k} (\epsilon_{ij} + \omega_{ij})_{(\xi_k, t)} d\xi_j\end{aligned}$$

Cette intégrale est *indépendante* du *chemin* d'intégration (et fournit un champ de déplacements acceptable) si la *différentielle* du_i est *exacte*

- ▷ Le champ $u_i^{(e)}(x_k, t)$ est fixé de façon *unique* par la *donnée* du déplacement u_i^0 au point x_k^0 , ou de conditions équivalentes

→ *Remarques*

- ▷ Une forme différentielle

$$df = p_i(x_j) dx_i$$

est *fermée* lorsque ses dérivées croisées sont égales :

$$\frac{\partial p_i}{\partial x_j} = \frac{\partial p_j}{\partial x_i}$$

- ▷ Cette différentielle est *exacte* s'il existe une fonction $f(x_i)$ dont elle dérive :

$$p_i(x_j) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_j)$$

▷ Une différentielle *exacte* est obligatoirement *fermée*

Lorsque le domaine de calcul est *simplement connexe*, une différentielle *fermée* est toujours *exacte*

Par contre, lorsque le domaine de calcul n'est pas simplement connexe, des *conditions supplémentaires* de raccordement doivent être remplies pour qu'une différentielle fermée soit exacte

Chapitre 3

Dynamique

Lois de conservation globales

- **Conservation de la masse**

Dans tout repère, la dérivée temporelle de la masse d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est nulle :

$$\forall V(t), \quad \frac{d\mathcal{M}(t)}{dt} = 0$$

et donc la masse \mathcal{M} de ce volume matériel est constante

- **Conservation de la quantité de mouvement**

Dans tout repère *inertiel* (galiléen), la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est égale à la somme des *forces* à distance et de contact exercées sur lui :

$$\forall V(t), \forall \text{repère inertiel}, \\ \frac{d\underline{\mathcal{P}}(t)}{dt} = \underline{\mathcal{F}}^d(t) + \underline{\mathcal{F}}^c(t)$$

- **Conservation du moment de la quantité de mouvement**

→ Dans tout repère *inertiel* (galiléen), la dérivée temporelle du moment de la quantité de mouvement d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est égale à la somme des *moments des forces* à distance et de contact exercés sur lui :

$$\forall V(t), \forall \text{repère inertiel}, \\ \frac{d\underline{\mathcal{N}}(t)}{dt} = \underline{\mathcal{M}}^d(t) + \underline{\mathcal{M}}^c(t)$$

→ Les moments sont calculés par rapport à l'*origine* du repère

- **Conservation de l'énergie**

→ Dans tout repère *inertiel* (galiléen) la dérivée temporelle de l'énergie *cinétique* plus l'énergie *interne* d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est égale à la somme des *puissances des forces* à distance et de contact exercées sur lui et des *flux calorifiques* qui lui sont apportés par *rayonnement* et *conduction* :

$$\forall V(t), \forall \text{ repère inertiel,}$$
$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} + \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = P^d(t) + P^c(t) + Q^d(t) + Q^c(t)$$

→ Les *puissances* (travail par unité de temps) fournies à $V(t)$ sont calculées comme suit :

▷ Puissance des forces à distance :

$$P^d(t) = \int_{V(t)} \rho \underline{g} \cdot \underline{v} dV$$
$$= \int_{V(t)} \rho g_i v_i dV$$

▷ Puissance des forces de contact :

$$P^c(t) = \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}(\underline{n}) \cdot \underline{v} dS = \int_{\partial V(t)} \underline{v} \cdot \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{n} dS$$
$$= \int_{\partial V(t)} v_i \sigma_{ji} n_j dS$$

Théorèmes globaux

- Centre de masse

→ Le *centre de masse* $\underline{x}^m(t)$ d'un volume matériel $V(t)$ est défini par la relation

$$\mathcal{M} \underline{x}^m(t) = \int_{V(t)} \rho \underline{x} dV$$

→ On prouve que le *mouvement* du centre de masse de tout volume matériel s'obtient en y *concentrant* toute la masse de ce corps et les forces exercées sur lui :

$$\frac{d}{dt} \left(\mathcal{M} \frac{d\underline{x}^m(t)}{dt} \right) = \underline{F}^d(t) + \underline{F}^c(t)$$

• **Changements de repère**

- Il suffit de *postuler* que les lois de conservation sont vérifiées dans *un* repère *inertiel* pour qu'elles soient vérifiées dans *tout* repère inertiel
- ▷ Tout autre repère inertiel (O', \underline{e}'_i) est en mouvement de *translation rectiligne uniforme* à la vitesse \underline{v}_0 par rapport au premier (O, \underline{e}_i) :

$$\begin{aligned}\underline{x}' &= \underline{x} - \underline{OO}'(t) \\ \underline{v}' &= \underline{v} - \underline{v}_0\end{aligned}$$

- ▷ Les grandeurs ρ , \underline{g} , $\underline{\sigma}$, U , r et \underline{q} sont *conservées* par le changement de repère
- ▷ Dès lors, après calcul, on trouve

$$\mathcal{P}'(t) = \mathcal{P}(t) - \mathcal{M} \underline{v}_0$$

$$\underline{\mathcal{N}}'(t) = \underline{\mathcal{N}}(t) - \underline{OO}'(t) \times \mathcal{P}(t) - \mathcal{M} (\underline{x}^m(t) - \underline{OO}'(t)) \times \underline{v}_0$$

$$\underline{\mathcal{M}}'^d(t) = \underline{\mathcal{M}}^d(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^d(t)$$

$$\underline{\mathcal{M}}'^c(t) = \underline{\mathcal{M}}^c(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^c(t)$$

$$\mathcal{K}'(t) = \mathcal{K}(t) - \mathcal{P}(t) \cdot \underline{v}_0 + \frac{1}{2} \mathcal{M} \underline{v}_0 \cdot \underline{v}_0$$

$$P'^d(t) = P^d(t) - \underline{\mathcal{F}}^d(t) \cdot \underline{v}_0$$

$$P'^c(t) = P^c(t) - \underline{\mathcal{F}}^c(t) \cdot \underline{v}_0$$

- ▷ Les grandeurs globales \mathcal{M} , $\underline{\mathcal{F}}^d(t)$, $\underline{\mathcal{F}}^c(t)$, $\mathcal{U}(t)$, $\mathcal{Q}^d(t)$ et $\mathcal{Q}^c(t)$ sont *conservées* par le changement de repère
- ▷ En injectant les relations précédentes dans les lois de conservation globales à établir dans le nouveau repère, on prouve le résultat
- Il suffit de *postuler* que la loi de conservation de la *masse* est vérifiée dans un repère *quelconque* pour qu'elle soit vérifiée dans *tout* repère. Ceci tient au fait que la masse spécifique est une grandeur *objective*
- Soit un repère *parallèle* à un repère *inertiel*, mais dont l'*origine* est placée au *centre de masse* d'un certain volume matériel. Alors, les lois de conservation du *moment de la quantité de mouvement* et de l'*énergie* s'appliquent à ce volume matériel dans ce repère (les calculs étant faits par rapport au centre de masse)

Volumes de contrôle et flux convectifs

- **Introduction**

→ Dans un certain repère (souvent inertiel), un *volume de contrôle* V_0 est un volume *invariable* dans l'espace

→ Il peut être utile (surtout en mécanique des fluides) d'exprimer les lois de conservation globales sur les volumes de contrôle

▷ Seules certaines *dérivées temporelles* de grandeurs *extensives* doivent être réécrites. Soit τ un instant choisi et $\hat{V}_0(\tau)$ le volume matériel qui, précisément au temps $t = \tau$, *coïncide* avec V_0

Pour $t = \tau$:

$$\frac{d}{dt} \int_{\hat{V}_0(t)} f(\underline{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} f(\underline{x}, t) dV + \int_{\partial V_0} f(\underline{x}, t) \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

(d'après la variante 3 du théorème de Reynolds)

On considère les grandeurs extensives $\hat{\mathcal{I}}(t)$ calculée pour $\hat{V}_0(t)$, et $\mathcal{I}_0(t)$ calculée pour V_0 , ainsi que le *flux convectif* $\dot{\mathcal{I}}^c(t)$ entrant dans V_0 :

$$\dot{\mathcal{I}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} f(\underline{x}, t) \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

▷ Le théorème de Reynolds donne en $t = \tau$:

$$\frac{d\mathcal{I}_0(t)}{dt} = \frac{d\hat{\mathcal{I}}(t)}{dt} + \dot{\mathcal{I}}^c(t)$$

▷ Ainsi, la variation par unité de temps du "contenu" $\mathcal{I}_0(t)$ du volume de contrôle V_0 est égale à la somme des apports externes fournis au volume matériel $\hat{V}_0(t)$ (ces apports étant tirés des lois de conservation) et d'un apport *convectif* supplémentaire $\dot{\mathcal{I}}^c(t)$

• **Réécriture des lois de conservation globales pour un volume de contrôle**

→ Conservation de la *masse* de V_0 :

$$\frac{d\mathcal{M}_0(t)}{dt} = \dot{\mathcal{M}}^c(t)$$

avec

$$\dot{\mathcal{M}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} \rho \underline{v} \cdot \underline{n} dS$$

→ Conservation de la quantité de *mouvement* de V_0 dans un repère inertiel :

$$\frac{d\underline{\mathcal{P}}_0(t)}{dt} = \underline{F}^d(t) + \underline{F}^c(t) + \dot{\underline{\mathcal{P}}}^c(t)$$

avec

$$\dot{\underline{\mathcal{P}}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} \rho \underline{v} (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

ou

$$\dot{\mathcal{P}}_i^c(t) = - \int_{\partial V_0} \rho v_i v_j n_j dS$$

→ Conservation du *moment* de la quantité de *mouvement* de V_0 dans un repère inertiel :

$$\frac{d\underline{\mathcal{N}}_0(t)}{dt} = \underline{M}^d(t) + \underline{M}^c(t) + \dot{\underline{\mathcal{N}}}^c(t)$$

avec

$$\dot{\underline{\mathcal{N}}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} (\underline{x} \times \rho \underline{v}) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

ou

$$\dot{\mathcal{N}}_i^c(t) = - \int_{\partial V_0} \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k v_l n_l dS$$

→ Conservation de l'*énergie* de V_0 dans un repère inertiel :

$$\frac{d\mathcal{K}_0(t)}{dt} + \frac{d\mathcal{U}_0(t)}{dt} = P^d(t) + P^c(t) + Q^d(t) + Q^c(t) + \dot{\mathcal{K}}^c(t) + \dot{\mathcal{U}}^c(t)$$

avec

$$\dot{\mathcal{K}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} \frac{\rho}{2} (\underline{v} \cdot \underline{v}) (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

$$\dot{\mathcal{U}}^c(t) = - \int_{\partial V_0} \rho U (\underline{v} \cdot \underline{n}) dS$$

Formes locales des lois de conservation

- **Introduction**

- ▷ Soit un milieu dans lequel les *champs* concernés sont *continus*. Tout *volume matériel* de ce milieu est un *corps*, pour lequel les lois de conservation *globales* sont *postulées* dans un repère inertiel quelconque
- ▷ Sous ces hypothèses, l'ensemble des lois de conservation peut s'écrire sous une *forme locale équivalente*, qui s'applique à tout instant et en tout point du milieu
- ▷ L'équivalence concerne, pour un repère inertiel choisi, le fait que *toutes* les lois de conservation *globales* sont satisfaites à tout instant par *tout* volume matériel du milieu et le fait que *toutes* les lois de conservation *locales* sont satisfaites à tout instant en *tout* point du milieu

- **Conservation de la masse**

$$\begin{aligned} \forall(\underline{x}, t), \quad & \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0 \\ \text{ou} \quad & \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0 \\ \text{ou} \quad & \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_i)}{\partial x_i} = 0 \end{aligned}$$

- **Conservation de la quantité de mouvement**

→ Il *existe* un tenseur des contraintes $\underline{\underline{\sigma}}$ tel que

$$\forall(\underline{x}, t), \forall \underline{n} \text{ (orientation de la facette),}$$

$$\underline{\tau}(\underline{n}) = \underline{\underline{\sigma}}^T \cdot \underline{n}$$

$$\text{ou} \quad \tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$$

(dépendance *linéaire* de la densité des forces de contact $\underline{\tau}(\underline{n})$ à l'égard de \underline{n})

→ Forme locale

$\forall (\underline{x}, t), \quad \forall \text{repère inertiel},$

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho \underline{g}$$

$$\text{ou } \rho \frac{Dv_i}{Dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i$$

• **Conservation du moment de la quantité de mouvement**

$$\forall (\underline{x}, t), \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{\sigma}}^T$$

ou $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

(*symétrie* du tenseur des contraintes)

• **Conservation de l'énergie**

→ Il *existe* un vecteur flux de chaleur \underline{q} tel que

$\forall (\underline{x}, t), \forall \underline{n}$ (orientation de la facette),

$$q(\underline{n}) = -\underline{q} \cdot \underline{n}$$

$$\text{ou } q(\underline{n}) = -q_i n_i$$

(dépendance *linéaire* de la densité de flux de chaleur $q(\underline{n})$ à l'égard de \underline{n})

→ Forme locale

$$\forall (\underline{x}, t), \quad \rho \frac{DU}{Dt} = \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} + r - \nabla \cdot \underline{q}$$

$$\text{ou } \rho \frac{DU}{Dt} = \sigma_{ji} d_{ij} + r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

Extensions des lois locales

- Repères non inertiels

→ En raison de l'*objectivité* de tous les champs concernés, les lois locales sont d'application dans n'importe quel repère, sauf celle qui fait intervenir l'*accélération*

→ La forme *locale* de la loi de conservation de la quantité de *mouvement* en repère inertiel

$$\rho \frac{Dv}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\sigma} + \rho \underline{g}$$

fait intervenir l'accélération, qui n'est *pas objective*

▷ L'usage d'un repère *non inertiel* requiert de mettre dans le membre de *gauche* de cette égalité l'accélération absolue \underline{a}^a (calculée dans n'importe quel repère inertiel dont les axes sont parallèles au temps considéré à ceux du repère choisi) :

$$\underline{a}^a = \frac{Dv}{Dt} + \underline{a}^e + \underline{a}^c$$

Ici, $\frac{Dv}{Dt}$ est l'accélération *relative* (dans le repère choisi), et \underline{a}^e et \underline{a}^c sont les accélérations d'*entraînement* et de *Coriolis* :

$$\underline{a}^e = \ddot{\underline{\Omega}}_0 \times \underline{x} + \dot{\underline{\Omega}}_0 \times (\dot{\underline{\Omega}}_0 \times \underline{x}) + \underline{a}_0$$

$$\underline{a}^c = 2 \dot{\underline{\Omega}}_0 \times \frac{D\underline{x}}{Dt}$$

Les vecteurs $\dot{\underline{\Omega}}_0$, $\ddot{\underline{\Omega}}_0$ et \underline{a}_0 représentent le vecteur de rotation instantanée des axes par rapport à n'importe quel repère inertiel, la dérivée temporelle de ce vecteur, et l'accélération absolue de l'origine des axes

-
- ▷ On peut aussi écrire dans *n'importe quel repère* la forme locale de la loi de conservation de la quantité de mouvement sous la forme équivalente

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \nabla \cdot \underline{\underline{\sigma}} + \rho(\mathbf{g} + \mathbf{g}^e + \mathbf{g}^c)$$

où

$$\mathbf{g}^e = -\underline{\underline{a}}^e$$

et

$$\mathbf{g}^c = -\underline{\underline{a}}^c$$

sont appelées *forces* (fictives) d'*entraînement* et de *Coriolis* par unité de masse

- ▷ Tout se passe donc comme dans un repère inertiel, à condition d'ajouter les forces fictives aux vraies forces à distance (comme la pesanteur). On notera qu'en théorie de la relativité générale, il n'y a plus de distinction entre forces réelles et fictives à distance

• Discontinuités

- Les champs qui interviennent dans l'un des termes d'une des lois locales doivent être *continus*

$$\left(\text{par exemple } \frac{D\rho}{Dt}, \frac{Dv_i}{Dt}, \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \dots \right)$$

Cette règle est en fait trop exigeante et les lois locales restent d'application même dans des circonstances plus générales

- En présence de surfaces de *discontinuité* (de \mathbf{v} , ρ , T , $p \dots$), les lois locales ne s'appliquent pas telles quelles sur la discontinuité. Le retour aux lois globales permet de traiter le problème

Théorème de l'énergie cinétique

- **Enoncé**

→ Dans tout repère *inertiel* (galiléen), la dérivée temporelle de l'énergie *cinétique* d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est égale à la somme des *puissances des forces* à distance et de contact exercées sur lui *moins* la *puissance des efforts internes* développée dans ce volume :

$$\forall V(t), \quad \forall \text{repère inertiel},$$
$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} = P^d(t) + P^c(t) - P^i(t)$$

→ La puissance des *efforts internes* développée dans $V(t)$ est

$$P^i(t) = \int_{V(t)} \underline{\underline{\sigma}} : \underline{\underline{d}} dV$$
$$= \int_{V(t)} \sigma_{ji} d_{ij} dV$$

- **Corollaire**

→ Dans tout repère, la dérivée temporelle de l'énergie *interne* d'un volume matériel quelconque $V(t)$ est égale à la somme des *flux calorifiques* qui lui sont apportés par rayonnement et conduction *plus* la *puissance des efforts internes* développée dans ce volume :

$$\forall V(t),$$
$$\frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = Q^d(t) + Q^c(t) + P^i(t)$$

→ L'analyse du théorème de l'énergie cinétique et de son corollaire montre que la puissance des efforts *internes* représente une *transformation* par unité de temps, pas nécessairement irréversible, d'énergie cinétique en énergie interne à l'intérieur de la matière (et vice-versa, si cette puissance est négative)

Cercles de Mohr

- **Objectif**

- ▷ Les deux relations locales non différentielles

$$\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$$

et

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

montrent que le tenseur des contraintes représente une transformation *linéaire symétrique*

$$\underline{n} \rightarrow \underline{\tau}(\underline{n})$$

Pour comprendre cette transformation, on en cherche les *invariants* (scalaires indépendants du repère)

- ▷ Pour une certaine orientation de facette \underline{n} , la composante *normale* τ_n de $\underline{\tau}(\underline{n})$ vaut

$$\begin{aligned}\tau_n &= \underline{\tau}(\underline{n}) \cdot \underline{n} \\ &= \sigma_{ij} n_i n_j\end{aligned}$$

tandis que la composante *tangentielle* τ_s de $\underline{\tau}(\underline{n})$ vaut

$$\tau_s = \|\underline{\tau}(\underline{n}) - \underline{n} \tau_n\|$$

Le signe de τ_n est + ou - suivant que la facette est en *traction* ou *compression*, tandis que τ_s (qui mesure le *cisaillement*) est toujours positif. Les valeurs de τ_n et τ_s ne dépendent pas du repère

- **Théorie**

→ Choix d'une *base locale* particulière

- ▷ On cherche les *valeurs propres* du tenseur $\underline{\sigma}$, qui sont *réelles* car il est symétrique. Donc, l'équation *caractéristique* en σ

$$\det(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) = 0$$

a trois solutions réelles :

$$\sigma^I \geq \sigma^{II} \geq \sigma^{III}$$

- ▷ On cherche les *vecteurs propres* associés, solutions de l'équation

$$(\sigma_{ij} - \sigma \delta_{ij}) m_j = 0$$

Ceci donne trois couples de (valeurs, vecteurs) propres :

$$(\sigma^I, \underline{m}^I), (\sigma^{II}, \underline{m}^{II}), (\sigma^{III}, \underline{m}^{III})$$

On peut toujours faire en sorte que $(\underline{m}^I, \underline{m}^{II}, \underline{m}^{III})$ forme un triplet *orthonormé*, car $\underline{\sigma}$ est *symétrique*

- ▷ On choisit $(\underline{m}^I, \underline{m}^{II}, \underline{m}^{III})$ comme *base locale*. Dans cette base, le tenseur $\underline{\sigma}$ a pour composantes la matrice *diagonale*

$$\begin{bmatrix} \sigma^I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma^{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma^{III} \end{bmatrix}$$

→ *Résultats*

▷ En orientant \underline{n} dans toute les directions et en calculant τ_n et τ_s en fonction de \underline{n} , on trouve :

• Pour

$$\begin{aligned}\underline{n} &= \underline{m}^I, & (\tau_n, \tau_s) &= (\sigma^I, 0) \\ \underline{n} &= \underline{m}^{II}, & (\tau_n, \tau_s) &= (\sigma^{II}, 0) \\ \underline{n} &= \underline{m}^{III}, & (\tau_n, \tau_s) &= (\sigma^{III}, 0)\end{aligned}$$

• Pour

$$\begin{aligned}\underline{n} \perp \underline{m}^I, & & (\tau_n, \tau_s) &\in C_{II, III} \\ \underline{n} \perp \underline{m}^{II}, & & (\tau_n, \tau_s) &\in C_{I, III} \\ \underline{n} \perp \underline{m}^{III}, & & (\tau_n, \tau_s) &\in C_{I, II}\end{aligned}$$

($C_{I, II}$, $C_{II, III}$, $C_{I, III}$ sont les trois demi-cercles du demi-plan (τ_n, τ_s) issus de deux des points $(\sigma^I, 0)$, $(\sigma^{II}, 0)$, $(\sigma^{III}, 0)$)

• Pour \underline{n} quelconque, $(\tau_n, \tau_s) \in A$, où A est le domaine (appelé *arbelon*) situé entre les trois demi-cercles précédents

▷ En *un point* et à *un instant* déterminés, il y a *un* diagramme des cercles de Mohr qui résume l'état local de contraintes indépendamment du repère

▷ La contrainte de *cisaillement maximum locale* vaut

$$\frac{1}{2} (\sigma^I - \sigma^{III})$$

Pour les matériaux solides *ductiles*, le dépassement par cette grandeur d'une certaine valeur physique limite (et qui peut dépendre de T) sert souvent de *critère* au passage en déformation *plastique*

▷ La contrainte de *traction maximum locale* vaut σ^I . Pour les matériaux solides *fragiles*, le dépassement par cette grandeur d'une certaine valeur physique limite (et qui peut dépendre de T) sert souvent de *critère de rupture*

Thermodynamique des milieux continus

- **Second principe de la thermodynamique**

→ Dans tout repère, la dérivée temporelle de l'*entropie* de tout volume matériel $V(t)$ est *au moins* égale à la somme des apports *externes* d'entropie par unité de temps :

$$\forall V(t),$$

$$\frac{d\mathcal{S}(t)}{dt} \geq R^d(t) + R^c(t)$$

Il y a *égalité* dans le cas d'une transformation *réversible* du volume matériel

→ Les apports *externes* d'entropie par unité de temps sont obtenus en faisant la somme de tous les apports *calorifiques* par unité de temps (par rayonnement et conduction) rapportés à la *température absolue* $T = T^{(e)}(x_i, t)$ à laquelle ils sont fournis :

$$R^d(t) = \int_{V(t)} \frac{r}{T} dV$$

$$R^c(t) = \int_{\partial V(t)} \frac{q(\underline{n})}{T} dS$$

- **Forme locale**

→ Première expression

$$\forall(\underline{x}, t),$$
$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \nabla \cdot \underline{q} + \frac{1}{T^2} \underline{q} \cdot \nabla T$$

ou

$$\rho \frac{DS}{Dt} \geq \frac{r}{T} - \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} + \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Cette forme locale est *équivalente* à la forme globale exprimée pour toute partie d'un certain milieu (moyennant la continuité des grandeurs appropriées — bien qu'il s'agisse là d'une hypothèse trop restrictive)

→ Inégalité de *Clausius-Duhem*

$$\forall(\underline{x}, t),$$
$$\rho \left(T \frac{DS}{Dt} - \frac{DU}{Dt} \right) \geq -\underline{\sigma} : \underline{d} + \frac{1}{T} \underline{q} \cdot \nabla T$$

ou

$$\rho \left(T \frac{DS}{Dt} - \frac{DU}{Dt} \right) \geq -\sigma_{ji} d_{ij} + \frac{1}{T} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Cette inégalité est *équivalente*, moyennant les hypothèses de continuité adéquates, à la forme locale précédente

Equations de constitution

- **Bilan des équations locales**

→ Les équations résultant des lois de conservation *locales différentielles* (masse, mouvement, énergie) sont au nombre de 5 (une équation vectorielle donnant 3 équations scalaires)

→ Les *inconnues* sont les champs suivants :

$$\rho, v_i, \sigma_{ij}, U, q_i, S, T$$

ce qui donne, tenant compte de la symétrie obligatoire du tenseur des contraintes, 16 fonctions inconnues

→ Les champs g_i et r , qui représentent des actions *externes* à distance, sont donnés

- **Equations de constitution**

→ On ajoute au modèle les équations de constitution des *contraintes* (6), du *flux de chaleur* (3), de l'*énergie interne* (1) et de l'*entropie* (1)

- ▷ Pour un point matériel déterminé, celles-ci expriment ces grandeurs au temps t en fonction de l'*histoire passée* des *variables thermodynamiques* du point matériel (incluant sa température absolue et son gradient) :

$$\underline{\sigma}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \underline{\dot{\sigma}} [T(\tau), \underline{\nabla}T(\tau) \dots]$$

$$\underline{q}(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \underline{\dot{q}} [T(\tau), \underline{\nabla}T(\tau) \dots]$$

$$U(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \dot{U} [T(\tau), \underline{\nabla}T(\tau) \dots]$$

$$S(t) = \int_{\tau=-\infty}^t \dot{S} [T(\tau), \underline{\nabla}T(\tau) \dots]$$

- ▷ NB : si les coordonnées *lagrangiennes* du point matériel sont (X_A) , ses coordonnées *eulériennes* au temps τ sont

$$x_i = x_i^{(l)}(X_A, \tau) \quad (\tau \leq t)$$

et sa température (par exemple) au temps τ est

$$T(\tau) = T^{(l)}(X_A, \tau) \quad (\tau \leq t)$$

ce qui définit l'histoire thermique de ce point matériel, de laquelle on peut dériver son gradient

- ▷ Les équations de constitution (au nombre de 11) caractérisent la *nature particulière* du matériau (solide thermoélastique, fluide visqueux...)
- ▷ Les équations de constitution complètent les lois de conservation locales différentielles

→ Comme le *second principe* doit être satisfait par tout modèle, on exige en thermodynamique rationnelle que l'inégalité de *Clausius-Duhem* soit vérifiée identiquement pour *toute* histoire passée des variables thermodynamiques du point matériel. Des théories plus élaborées (thermodynamique *irréversible*) sont actuellement en développement

Conditions aux limites

- **But**

Fermer le système formé par les équations de conservation et de constitution (écrites pour tout instant et en tout point du volume matériel ou de contrôle étudié)

- **Méthode**

→ On ajoute des conditions *aux frontières*, qui expriment l'effet du milieu environnant sur le volume matériel ou le volume de contrôle (à sa frontière)

→ On ajoute des *conditions initiales*, qui expriment l'état de départ du volume matériel ou de contrôle

- **Objectif final**

Obtenir un *problème* d'équations aux dérivées partielles *bien posé*, c.-à-d. tel que

1. la solution existe
2. la solution soit unique
3. la solution soit continue par rapport aux données

Formulation particulière en petits déplacements

- **Hypothèses**

On suppose que la configuration de référence \mathcal{R}_0 est isotherme, homogène et sans tensions (sa température absolue et sa masse spécifique sont désignées par T_0 et ρ_0).

- **Formes locales des lois de conservations en petits déplacements**

→ *Masse*

$$\rho = \rho_0 (1 - \varepsilon_{mm})$$

→ *Quantité de mouvement* (en repère inertiel)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho_0 g_i$$

En repère non inertiel, il faut ajouter aux forces à distances réelles par unité de volume ($\rho_0 \underline{g}$) les forces d'*entraînement* ($\rho_0 \underline{g}^e$) et de *Coriolis* ($\rho_0 \underline{g}^c$) par unité de volume

Tandis que les forces d'entraînement se tirent du mouvement du repère par rapport à n'importe quel repère inertiel, les forces de Coriolis valent :

$$g_i^c = -2\varepsilon_{ijk} \dot{\Omega}_{0j} \frac{\partial u_k}{\partial t}$$

→ *Energie*

$$\rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} = \sigma_{ji} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + r - \frac{\partial q_i}{\partial x_i}$$

- **Inégalité de Clausius-Duhem**

$$\rho_0 \left(T \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) \geq -\sigma_{ji} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{q_i}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

Chapitre 4

Thermoélasticité infinitésimale isotrope

Modèle général du matériau thermo-élastique

- **Configuration de référence**

On part d'une configuration \mathcal{R}_0 dans laquelle les distributions de contraintes, température, masse spécifique... sont données

- **Equations de constitution**

A tout endroit et tout instant, les *équations de constitution* suivantes s'appliquent, en désignant par e_{ij} le tenseur de déformations finies d'Euler mesuré par rapport à \mathcal{R}_0 pour le point matériel considéré

→ *Contraintes* :

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(T, e_{kl})$$

→ *Energie interne spécifique* :

$$U = \hat{U}(T, e_{kl})$$

→ *Entropie spécifique* :

$$S = \hat{S}(T, e_{kl})$$

→ *Vecteur flux de chaleur* :

$$q_i = \hat{q}_i \left(T, \frac{\partial T}{\partial x_j}, e_{kl} \right)$$

- **Remarque**

Les contraintes, l'énergie interne spécifique et l'entropie spécifique en chaque point et à chaque instant sont directement fonctions de la température et de la déformation depuis \mathcal{R}_0 pour le point matériel concerné. Le flux de chaleur dépend en outre du gradient thermique en ce point. Ce sont donc des fonctions de l'état *local* thermique et déformationnel de la matière à l'endroit et à l'instant considérés.

Thermoélasticité infinitésimale

- **Hypothèses**

→ On suppose être en *petits déplacements*, d'où l'utilisation du tenseur des *déformations infinitésimales* ε_{ij} à la place de e_{ij}

→ La configuration de *référence* \mathcal{R}_0 est supposée *isotherme, homogène et sans tensions*

- **Equations de constitution**

→ *Contraintes* :

$$\sigma_{ij} = \hat{\sigma}_{ij}(T, \varepsilon_{kl})$$

→ *Energie interne spécifique* :

$$U = \hat{U}(T, \varepsilon_{kl})$$

→ *Entropie spécifique* :

$$S = \hat{S}(T, \varepsilon_{kl})$$

→ *Vecteur flux de chaleur* :

$$q_i = -\hat{k}(T) \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

(loi de Fourier)

où

$$k = \hat{k}(T)$$

est le coefficient de *conductivité thermique*

- **Second principe de la thermodynamique**

Soit l'énergie libre spécifique

$$F = \hat{F}(T, \varepsilon_{ij}) = U - TS$$

Alors, l'inégalité de Clausius-Duhem (c.-à-d. le second principe) est identiquement vérifiée *si et seulement si* les relations suivantes sont satisfaites :

→ *Entropie spécifique* :

$$S = -\frac{\partial \hat{F}}{\partial T}$$

→ *Contraintes* :

$$\sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial \hat{F}}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

→ *Conductivité thermique* :

$$\hat{k}(T) \geq 0$$

(on aura toujours $\hat{k}(T) > 0$ en pratique)

- **Modèle général isotrope**

→ Pour un matériau isotrope, l'énergie libre ne dépend de la déformation infinitésimale ε_{ij} que par le biais de ses *invariants* :

$$F = \hat{F}(T, \varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ik})$$

→ Les invariants d'un tenseur sont par définition des scalaires dont la valeur ne dépend pas du choix des vecteurs de base. Pour ε_{ij} , une *base d'invariants indépendants* (entre eux) est donnée par les trois *scalaires*

$$\varepsilon_{ii}, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}\varepsilon_{jk}\varepsilon_{ik}$$

Thermoélasticité infinitésimale linéaire isotrope

- **Equation de constitution de l'énergie libre**

→ Celle-ci est obtenue dans le cas infinitésimal linéaire par un *développement général* de F en série jusqu'au *second ordre* en fonction des invariants de ε_{ij} :

$$\rho_0 F = \rho_0 \hat{F}_0(T) - (3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\varepsilon_{mm} + \frac{1}{2}\lambda\varepsilon_{mm}^2 + \mu\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

où λ , μ et α peuvent dépendre de la température

→ *Hypothèse supplémentaire* :

λ , μ (les coefficients de Lamé) et α (le coefficient de dilatation thermique linéique) sont dorénavant supposés *indépendants* de T

- **Equation de constitution des contraintes**

→ Par dérivation :

$$\sigma_{ij} = -(3\lambda + 2\mu)\alpha(T - T_0)\delta_{ij} + \lambda\varepsilon_{mm}\delta_{ij} + 2\mu\varepsilon_{ij}$$

→ Décomposition des déformations et contraintes en *parties sphériques et déviatoires* :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{3}\varepsilon_{mm}\delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^d \\ \sigma_{ij} &= \frac{1}{3}\sigma_{mm}\delta_{ij} + \sigma_{ij}^d\end{aligned}$$

→ Interprétation

On trouve

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\sigma_{mm} &= \kappa(\varepsilon_{mm} - 3\alpha(T - T_0)) \\ \sigma_{ij}^d &= 2\mu\varepsilon_{ij}^d\end{aligned}$$

où $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$ est le module de *compressibilité* et μ est le module de *cisaillement* du matériau

- ▷ A un accroissement relatif local de volume ε_{mm} sont associées des contraintes $\frac{1}{3}\sigma_{mm}\delta_{ij}$ correspondant sur les facettes à une traction isotrope par unité d'aire proportionnelle à la différence entre ε_{mm} et l'accroissement relatif local de volume $3\alpha(T - T_0)$ qui résulterait d'une *dilatation thermique* libre, le coefficient de proportionnalité étant κ
- ▷ A une déformation angulaire locale $2\varepsilon_{ij}^d$ sont associées des contraintes σ_{ij}^d correspondant sur les facettes à un *cisaillement* par unité d'aire proportionnel à $2\varepsilon_{ij}^d$, le coefficient de proportionnalité étant μ

→ *Inversion*

▷ Partant de la décomposition précédente, on trouve

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} + \left(\alpha(T - T_0) - \frac{\nu}{E}\sigma_{mm}\right)\delta_{ij}$$

où

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$$

est le module de Young (module d'élasticité) et

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}$$

est le coefficient de Poisson

▷ Réciproquement, on trouve

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$$

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\kappa = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

▷ On notera les inégalités toujours observées *expérimentalement* :

$$\begin{cases} \kappa > 0 \\ \mu > 0 \end{cases}$$

et réciproquement

$$\begin{cases} E > 0 \\ -1 < \nu < \frac{1}{2} \end{cases}$$

• **Equations de constitution de l'énergie interne et de l'entropie spécifiques**

→ *Chaleur spécifique*

▷ Définition de la chaleur spécifique à *déformation constante* :

$$c_\varepsilon = \frac{\partial \hat{U}}{\partial T}$$

On trouve

$$c_\varepsilon = -T \frac{\partial^2 \hat{F}}{\partial T^2}$$

et, comme κ , μ et α sont constants :

$$c_\varepsilon = -T \frac{d^2 \hat{F}_0}{dT^2}$$

▷ Hypothèse supplémentaire : c_ε est indépendant de T

Alors, en supposant $\hat{F}_0(T_0) = 0$, on trouve :

$$\hat{F}_0(T) = c_\varepsilon \left(T \left(1 - \ln \frac{T}{T_0} \right) - T_0 \right)$$

▷ On notera l'*inégalité* toujours observée expérimentalement :

$$c_\varepsilon > 0$$

→ *Energie interne et entropie spécifiques*

▷ Par dérivation de F par rapport à T , on trouve :

$$\rho_0 S = \rho_0 c_\varepsilon \ln \frac{T}{T_0} + 3\kappa\alpha\varepsilon_{mm}$$

▷ Comme

$$U = F + TS$$

on trouve aussi :

$$\rho_0 U = \rho_0 c_\varepsilon (T - T_0) + 3\kappa\alpha T_0 \varepsilon_{mm} + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_{mm}^2 + \mu \varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}$$

Formulation du problème thermoélastique en déplacements – température

Les inconnues sont les champs de déplacements (u_i) et de température (T)

- **Système d'équations à résoudre**

→ Conservation de la quantité de *mouvement* (Navier)

$$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = - \frac{\partial}{\partial x_i} (3\kappa\alpha(T - T_0)) + \rho_0 g_i \\ + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

(en repère inertiel)

→ Conservation de l'*énergie*

$$\rho_0 c_\varepsilon \frac{\partial T}{\partial t} = -3\kappa\alpha T \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial t} + r + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

- **Hypothèses simplificatrices usuelles**

→ *Quasi-statique* :

$\rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$ est négligé dans l'équation du mouvement

→ *Découplage* :

$-3\kappa\alpha T \frac{\partial \varepsilon_{mm}}{\partial t}$ est négligé dans l'équation d'énergie

→ Discussion

▷ Ces hypothèses sont valides quand l'*évolution* du système (caractérisée par l'évolution de ses conditions aux frontières) est *lente* par rapport aux *temps caractéristiques* du matériau

▷ Par la suite, ces hypothèses seront systématiquement faites, sauf mention contraire explicite

Problème thermique découplé en thermoélasticité infinitésimale

- **Conditions aux limites et données**

→ On donne la température $\bar{T}(\underline{x}, t)$ sur une partie de la frontière ∂^*V (condition aux frontières dite essentielle) :

$$\forall t \geq t_0, \quad T = \bar{T}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial^*V$$

→ On donne la densité de flux de chaleur $\bar{q}(\underline{x}, t)$ entrant dans le solide sur le reste de la frontière $\partial^{**}V$ (condition aux frontières dite naturelle) :

$$\forall t \geq t_0, \quad q(\underline{n}) = -q_i n_i = k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial^{**}V$$

→ On donne la température $T_{in}(\underline{x})$ sur V en $t = t_0$ (condition *initiale*, donnée seulement en cas de problème instationnaire) :

$$\text{En } t = t_0, \quad T = T_{in}(\underline{x}) \quad \text{sur } V$$

→ On donne la densité de puissance calorifique fournie par rayonnement $r(\underline{x}, t)$ sur V , pour tout $t \geq t_0$

- **Théorèmes d'existence et d'unicité**

(avec les données et sous les hypothèses précédentes, soit $k > 0$, $c_\varepsilon > 0$, et avec découplage)

→ *Problème dynamique*

▷ La solution du problème thermique *existe* si les données $(V, \partial^*V, \partial^{**}V, \bar{T}, \bar{q}, T_{in}, r)$ sont mathématiquement “assez régulières” (ce qui est le cas pour toutes les situations physiquement réalistes)

▷ Lorsque la solution existe, elle est *unique*

→ *Problème stationnaire*

(posé sans conditions initiales et avec des données stationnaires $\bar{T}(\underline{x})$, $\bar{q}(\underline{x})$, $r(\underline{x})$)

▷ Mêmes conclusions que pour le problème dynamique si $\partial^*V \neq \emptyset$

▷ Lorsque $\partial^*V = \emptyset$ (si la densité de flux est imposée sur toute la frontière), pour que la solution *existe*, il faut en outre qu'il y ait *équilibre thermique global* :

$$\int_{\partial V = \partial^{**}V} \bar{q}(\underline{x}) dS + \int_V r dV = 0$$

Pour que la solution soit *unique* lorsque $\partial^*V = \emptyset$, il faut en outre imposer la température T en un point :

$$\text{Pour } \underline{x} = \underline{x}^o \quad T(\underline{x}) = T^0 \text{ donné}$$

Problème élastique (ou mécanique) avec thermique précalculée en thermoélasticité infinitésimale

- Conditions aux limites et données

→ On donne le déplacement $\bar{u}_i(\underline{x}, t)$ sur une partie de la frontière $\partial'V$ (condition aux frontières dite essentielle) :

$$\forall t \geq t_0, \quad u_i = \bar{u}_i(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial'V$$

→ On donne la densité de forces de contact $\bar{\tau}_i(\underline{x}, t)$ sur le reste de la frontière $\partial''V$ (condition aux frontières dite naturelle) :

$$\forall t \geq t_0, \quad \tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji}n_j = \bar{\tau}_i(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial''V$$

→ On donne le déplacement $u_{in,i}(\underline{x})$ et la vitesse $\dot{u}_{in,i}(\underline{x})$ sur V en $t = t_0$ (conditions *initiales*, données seulement en cas de problème dynamique) :

$$\text{En } t = t_0, \quad \begin{cases} u_i = u_{in,i}(\underline{x}) \\ \frac{\partial u_i}{\partial t} = \dot{u}_{in,i}(\underline{x}) \end{cases}$$

→ On donne la densité de forces à distance $\rho_0 g_i(\underline{x}, t)$ sur V , pour tout $t \geq t_0$

• **Théorèmes d'existence et d'unicité**

(avec les données et sous les hypothèses précédentes, soit $\kappa > 0$, $\mu > 0$, et avec champ de température précalculé)

→ *Problème dynamique*

▷ La solution du problème élastique *existe* si les données $(V, \partial'V, \partial''V, \bar{u}_i, \bar{\tau}_i, u_{in,i}, \dot{u}_{in,i}, g_i)$ sont mathématiquement “assez régulières” (ce qui est le cas pour toutes les situations physiquement réalistes)

▷ Lorsque la solution existe, elle est *unique*

→ *Problème quasi-statique ou stationnaire*

(posé soit avec l'hypothèse de quasi-statique, soit sans conditions initiales et avec des données stationnaires $\bar{u}_i(\underline{x}), \bar{\tau}_i(\underline{x}), g_i(\underline{x})$)

▷ Mêmes conclusions que pour le problème dynamique si $\partial'V \neq \emptyset$

▷ Lorsque $\partial'V = \emptyset$ (si la densité de forces de contact est imposée sur toute la frontière), pour que la solution *existe*, il faut en outre qu'il y ait *équilibre statique global* :

$$\int_{\partial V = \partial''V} \bar{\underline{\tau}}(\underline{x}) dS + \int_V \rho_0 \underline{g}(\underline{x}) dV = \underline{0}$$

$$\int_{\partial V = \partial''V} \underline{x} \times \bar{\underline{\tau}}(\underline{x}) dS + \int_V \underline{x} \times \rho_0 \underline{g}(\underline{x}) dV = \underline{0}$$

▷ Pour que la solution soit *unique* lorsque $\partial'V = \emptyset$, il faut en outre imposer la rotation infinitésimale ω_{ij} et le déplacement u_i en un point :

$$\text{Pour } \underline{x} = \underline{x}^o \quad \begin{cases} \omega_{ij}(\underline{x}) & = \omega_{ij}^o & \text{donné} \\ u_i(\underline{x}) & = u_i^o & \text{donné} \end{cases}$$

- **Théorème de Saint-Venant**

- Position du problème

- Remplacement d'un ensemble de forces de contact exercées sur une portion de la frontière d'un corps élastique par un ensemble de forces de contact *statiquement équivalentes*

- Conclusion

- Les effets respectifs des deux distributions sont *essentiellement les mêmes* à une distance de la zone d'application grande par rapport à son diamètre

Méthodes de résolution

- **Linéarité**

→ Problème *thermique découplé*

▷ La réponse $T(\underline{x}, t)$ est *linéaire* par rapport aux sollicitations

$$\begin{array}{ll} r(\underline{x}, t) & \text{sur } V \\ \bar{T}(\underline{x}, t) & \text{sur } \partial^*V \\ \bar{q}(\underline{x}, t) & \text{sur } \partial^{**}V \\ T_{in}(\underline{x}) & \text{sur } V \end{array}$$

▷ On considère deux ensembles de *sollicitations*

$$\begin{array}{llll} r^{(1)} & \text{sur } V & r^{(2)} & \text{sur } V \\ \bar{T}^{(1)} & \text{sur } \partial^*V & \text{et } \bar{T}^{(2)} & \text{sur } \partial^*V \\ \bar{q}^{(1)} & \text{sur } \partial^{**}V & \bar{q}^{(2)} & \text{sur } \partial^{**}V \\ T_{in}^{(1)} & \text{sur } V & T_{in}^{(2)} & \text{sur } V \end{array}$$

ainsi que les *solutions* correspondantes

$$T^{(1)}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad T^{(2)}(\underline{x}, t)$$

▷ Alors, pour toute paire de réels α et β , la *combinaison linéaire*

$$T(\underline{x}, t) = \alpha T^{(1)}(\underline{x}, t) + \beta T^{(2)}(\underline{x}, t)$$

est *solution* du problème thermique pour les sollicitations

$$\begin{array}{ll} \alpha r^{(1)} + \beta r^{(2)} & \text{sur } V \\ \alpha \bar{T}^{(1)} + \beta \bar{T}^{(2)} & \text{sur } \partial^*V \\ \alpha \bar{q}^{(1)} + \beta \bar{q}^{(2)} & \text{sur } \partial^{**}V \\ \alpha T_{in}^{(1)} + \beta T_{in}^{(2)} & \text{sur } V \end{array}$$

→ Problème élastique avec *thermique imposée*

▷ La réponse $\underline{u}(\underline{x}, t)$ est *linéaire* par rapport aux sollicitations

$$\begin{array}{ll} \underline{g}(\underline{x}, t) & \text{sur } V \\ T(\underline{x}, t) & \text{sur } V \\ \bar{\underline{u}}(\underline{x}, t) & \text{sur } \partial'V \\ \bar{\underline{\tau}}(\underline{x}, t) & \text{sur } \partial''V \\ \underline{u}_{in}(\underline{x}) & \text{sur } V \\ \dot{\underline{u}}_{in}(\underline{x}) & \text{sur } V \end{array}$$

▷ On considère deux ensembles de *sollicitations*

$$\begin{array}{llll} \underline{g}^{(1)} & \text{sur } V & \underline{g}^{(2)} & \text{sur } V \\ T^{(1)} & \text{sur } V & T^{(2)} & \text{sur } V \\ \bar{\underline{u}}^{(1)} & \text{sur } \partial'V & \text{et } \bar{\underline{u}}^{(2)} & \text{sur } \partial'V \\ \bar{\underline{\tau}}^{(1)} & \text{sur } \partial''V & \bar{\underline{\tau}}^{(2)} & \text{sur } \partial''V \\ \underline{u}_{in}^{(1)} & \text{sur } V & \underline{u}_{in}^{(2)} & \text{sur } V \\ \dot{\underline{u}}_{in}^{(1)} & \text{sur } V & \dot{\underline{u}}_{in}^{(2)} & \text{sur } V \end{array}$$

ainsi que les *solutions* correspondantes

$$\underline{u}^{(1)}(\underline{x}, t) \quad \text{et} \quad \underline{u}^{(2)}(\underline{x}, t)$$

▷ Alors, pour toute paire de réels α et β , la *combinaison linéaire*

$$\underline{u}(\underline{x}, t) = \alpha \underline{u}^{(1)}(\underline{x}, t) + \beta \underline{u}^{(2)}(\underline{x}, t)$$

est solution du problème élastique pour les sollicitations

$$\begin{array}{lll} \alpha \underline{g}^{(1)} + \beta \underline{g}^{(2)} & \text{sur } V \\ \alpha T^{(1)} + \beta T^{(2)} & \text{sur } V \\ \alpha \bar{\underline{u}}^{(1)} + \beta \bar{\underline{u}}^{(2)} & \text{sur } \partial'V \\ \alpha \bar{\underline{\tau}}^{(1)} + \beta \bar{\underline{\tau}}^{(2)} & \text{sur } \partial''V \\ \alpha \underline{u}_{in}^{(1)} + \beta \underline{u}_{in}^{(2)} & \text{sur } V \\ \alpha \dot{\underline{u}}_{in}^{(1)} + \beta \dot{\underline{u}}_{in}^{(2)} & \text{sur } V \end{array}$$

- **Problème élastique non isotherme**

Résoudre en termes de déplacements un problème avec thermique pré-calculée dont les sollicitations sont

$$\begin{aligned}
 g(\underline{x}, t) & \text{ sur } V \\
 T(\underline{x}, t) & \text{ sur } V \\
 \bar{u}(\underline{x}, t) & \text{ sur } \partial'V \\
 \bar{\tau}(\underline{x}, t) & \text{ sur } \partial''V \\
 \underline{u}_{in}(\underline{x}) & \text{ sur } V \\
 \dot{\underline{u}}_{in}(\underline{x}) & \text{ sur } V
 \end{aligned}$$

est *équivalent* à résoudre un problème *isotherme* dont les sollicitations sont

$$\begin{aligned}
 g - \frac{3\kappa\alpha}{\rho_0} \nabla T & \text{ sur } V \\
 T_0 & \text{ sur } V \\
 \bar{u} & \text{ sur } \partial'V \\
 \bar{\tau} + 3\kappa\alpha(T - T_0)\underline{n} & \text{ sur } \partial''V \\
 \underline{u}_{in} & \text{ sur } V \\
 \dot{\underline{u}}_{in} & \text{ sur } V
 \end{aligned}$$

- **Méthode semi-inverse de résolution**

→ On part *a priori* d'une forme simplifiée de la solution : si cette solution existe, c'est la solution cherchée (par le théorème d'unicité)

→ Technique de résolution souvent utilisée en combinaison avec le théorème de St.-Venant

Solutions homogènes

- **Expérience de cisaillement simple isotherme**

→ Soit

$$[\sigma_{ij}] = [\sigma_{ij}^d] = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc

$$[\varepsilon_{ij}] = [\varepsilon_{ij}^d] = \frac{1}{2\mu} \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

→ L'angle de cisaillement ϕ_{12} depuis \mathcal{R}_0 vaut

$$\phi_{12} = 2\varepsilon_{12} = 2\varepsilon_{12}^d = \frac{1}{\mu} S_{12}$$

Le rapport entre la contrainte de cisaillement S_{12} et l'angle de cisaillement ϕ_{12} est donc le *module de cisaillement* μ

- **Expérience de compression simple isotherme**

→ Soit

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

et

$$\sigma_{mm} = -3p$$

et donc

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{1}{3\kappa} \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

avec

$$\varepsilon_{mm} = -\frac{p}{\kappa}$$

→ L'accroissement relatif de volume depuis \mathcal{R}_0 vaut

$$\varepsilon_{mm} = -\frac{p}{\kappa}$$

Le rapport entre la pression $p = -\frac{\sigma_{mm}}{3}$ et l'accroissement relatif de volume ε_{mm} est le *module de compressibilité* $\kappa = \lambda + \frac{2}{3}\mu$

- **Expérience de dilatation simple**

→ Soit un matériau libre :

$$\sigma_{ij} = 0$$

et donc

$$[\varepsilon_{ij}] = \alpha(T - T_0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et

$$\varepsilon_{mm} = 3\alpha(T - T_0)$$

→ L'accroissement relatif de longueur depuis \mathcal{R}_0 est isotrope et vaut donc $\alpha(T - T_0)$ dans toutes les directions (α est le *coefficient de dilatation thermique linéique*)

- **Expérience de traction simple isotherme**

→ Soit

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} S & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et donc

$$[\varepsilon_{ij}] = \begin{bmatrix} \frac{S}{E} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\nu S}{E} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\nu S}{E} \end{bmatrix}$$

→ L'allongement relatif suivant e_1 depuis \mathcal{R}_0 est

$$\varepsilon_{11} = \frac{S}{E}$$

Le rapport entre la contrainte de traction et cet allongement relatif est donc le module d'élasticité E

→ Le rétrécissement relatif suivant e_2 et e_3 depuis \mathcal{R}_0 est

$$-\varepsilon_{22} = -\varepsilon_{33} = \frac{\nu S}{E}$$

Le rapport entre le rétrécissement relatif suivant e_2 et e_3 et l'allongement relatif suivant la direction de traction est donc le coefficient de Poisson ν

Allongement d'une poutre sous son poids propre

- **Données**

→ Forces à distance

$$[g_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{bmatrix}$$

→ Face $x_3 = 0$ libre

Pour $x_3 = 0$, $-p \leq x_1 \leq p$, $-q \leq x_2 \leq q$,

$$[\tau_i(\underline{x}, -\underline{e}_3)] = [-\sigma_{3i}] = [\bar{\tau}_i(\underline{x})] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Faces $x_2 = \pm q$ libres

Pour $x_2 = \pm q$, $-p \leq x_1 \leq p$, $0 \leq x_3 \leq l$,

$$[\tau_i(\underline{x}, \pm \underline{e}_2)] = [\pm \sigma_{2i}] = [\bar{\tau}_i(\underline{x})] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Faces $x_1 = \pm p$ libres

Pour $x_1 = \pm p$, $-q \leq x_2 \leq q$, $0 \leq x_3 \leq l$,

$$[\tau_i(\underline{x}, \pm \underline{e}_1)] = [\pm \sigma_{1i}] = [\bar{\tau}_i(\underline{x})] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

→ Face $x_3 = l$

▷ Pour $x_3 = l$, $-p \leq x_1 \leq p$, $-q \leq x_2 \leq q$, les forces de contact équilibrent certainement les forces précédentes (pour avoir *équilibre statique global*)

▷ Le *détail* de la distribution de ces forces n'est *pas donné*, car la manière dont l'encastrement est effectué n'est pas précisée

- **Solution “semi-inverse”**

→ Hypothèse

Chaque section $x_3 = cte$ supporte *uniformément* le poids du tronçon situé en dessous de cette section. Donc

$$\sigma_{33} = \rho_0 g x_3 \quad (\text{traction})$$

→ Hypothèse supplémentaire

Il n’y a *pas d’autres* contraintes :

$$\sigma_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq 3 \text{ ou } j \neq 3$$

→ Le tenseur des contraintes ainsi supposé satisfait

▷ les équations d’équilibre

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + \rho_0 g_i = 0$$

▷ les conditions aux frontières imposées

→ Déformations infinitésimales associées :

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{\rho_0 g x_3}{E} \begin{bmatrix} -\nu & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- **Recherche du champ de déplacements**

On cherche, s'il y en a, à déterminer les u_i dont les ε_{ij} dérivent

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

→ *Rotations infinitésimales*

▷ Il faut intégrer les différentielles

$$d\omega_{ij} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x_j} - \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x_i} \right) dx_k$$

soit

$$\begin{cases} d\omega_{12} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_2} - \frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_1} \right) dx_k = 0 \\ d\omega_{13} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{1k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_1} \right) dx_k = -\frac{\rho_0 g \nu}{E} dx_1 \\ d\omega_{23} = \left(\frac{\partial \varepsilon_{2k}}{\partial x_3} - \frac{\partial \varepsilon_{3k}}{\partial x_2} \right) dx_k = -\frac{\rho_0 g \nu}{E} dx_2 \end{cases}$$

▷ Ces différentielles sont *fermées* et donc *exactes* (car le domaine est simplement connexe)

▷ Avec la première condition additionnelle d'encastrement

$$\omega_{ij}(0, 0, l) = 0$$

on trouve

$$[\omega_{ij}] = \frac{\rho_0 g}{E} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\nu x_1 \\ 0 & 0 & -\nu x_2 \\ \nu x_1 & \nu x_2 & 0 \end{bmatrix}$$

→ *Déplacements*

▷ Il faut intégrer les différentielles

$$du_i = (\varepsilon_{ij} + \omega_{ij}) dx_j$$

soit

$$\begin{cases} du_1 = (\varepsilon_{1j} + \omega_{1j}) dx_j = -\frac{\rho_0 g \nu}{E} (x_3 dx_1 + x_1 dx_3) \\ du_2 = (\varepsilon_{2j} + \omega_{2j}) dx_j = -\frac{\rho_0 g \nu}{E} (x_3 dx_2 + x_2 dx_3) \\ du_3 = (\varepsilon_{3j} + \omega_{3j}) dx_j = \frac{\rho_0 g}{E} (\nu(x_1 dx_1 + x_2 dx_2) + x_3 dx_3) \end{cases}$$

▷ Ces différentielles sont *fermées* et donc *exactes* (car le domaine est simplement connexe)

▷ Avec la seconde condition additionnelle d'encastrement

$$u_i(0, 0, l) = 0$$

on trouve

$$[u_i] = \frac{\rho_0 g}{E} \begin{bmatrix} -\nu x_1 x_3 \\ -\nu x_2 x_3 \\ \frac{\nu}{2}(x_1^2 + x_2^2) - \frac{1}{2}(l^2 - x_3^2) \end{bmatrix}$$

- **Conclusions**

- Solution correcte par la méthode semi-inverse, puisque l'intégration des déplacements a été possible
- Application du théorème de St.-Venant à l'extrémité supérieure de la poutre
 - ▷ La distribution exacte des forces de contact sur cette section n'était pas donnée (on ne connaissait que leur *résultante* et leur *moment résultant*)
 - ▷ La solution trouvée en contraintes et déformations convient, car elle dépend très peu de cette distribution détaillée à une distance de la section grande par rapport à son diamètre ($\max(2p, 2q)$)
- Conditions additionnelles de déplacement et rotation infinitésimale nuls au centre de la section supérieure
 - ▷ Associées à la caractérisation de l'*encastrement*
 - ▷ Ajoutent un degré d'approximation supplémentaire à la solution en déplacements
- *Déformée* de la section inférieure
On trouve en $x_3 = 0$

$$[u_i] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{\rho_0 g}{2E} (-l^2 + \nu(x_1^2 + x_2^2)) \end{bmatrix}$$

Cette section, initialement plane, prend après déformation la forme d'un parabolöide de révolution

Torsion d'une barre cylindrique

- **Données du problème**

→ Données *générales*

▷ Problème isotherme

▷ Pas de forces de volume

$$g_i = 0$$

→ *Conditions aux frontières*

▷ Surface latérale *libre* :

$$\bar{\tau}_i(\underline{x}) = 0$$

en tout point de cette surface, d'équation paramétrique

$$(x_1 = \hat{x}_1(s), x_2 = \hat{x}_2(s)) \quad \text{avec } 0 \leq x_3 \leq L$$

▷ Bases ($x_3 = L$ et $x_3 = 0$)

La distribution des forces de contact n'est pas donnée en détail sur ces bases. Seuls sont donnés leurs *résultantes* et *moments résultants* par rapport aux points P et O de ces bases :

$$\begin{cases} \underline{F}^{(1)} = \underline{0} & \text{et} & \underline{M}_P^{(1)} = M\underline{e}_3 \\ \underline{F}^{(2)} = \underline{0} & \text{et} & \underline{M}_P^{(2)} = -M\underline{e}_3 \end{cases}$$

• **Hypothèses “semi-inverses” de résolution**

→ Chaque section droite tourne d'un angle

$$\Delta\theta = \gamma x_3$$

(γ est l'angle de torsion inconnu)

→ *Gauchissement* des sections droites (qui peuvent ne pas rester planes)

On suppose que le déplacement axial est fonction de x_1 et x_2 seulement, et proportionnel à l'angle de torsion :

$$u_3 = \gamma w(x_1, x_2)$$

($w(x_1, x_2)$ est le gauchissement inconnu)

→ *Conclusion*

▷ Si les coordonnées d'un point après déplacement sont

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \end{cases}$$

les coordonnées de ce point avant déplacement sont

$$\begin{cases} x_1 - u_1 = r \cos(\theta - \Delta\theta) \\ x_2 - u_2 = r \sin(\theta - \Delta\theta) \end{cases}$$

▷ Développement jusqu'à l'ordre ε (avec $\gamma = \mathcal{O}(\varepsilon)$) :

$$\begin{aligned} r \cos(\theta - \Delta\theta) &= \underbrace{r \cos(\theta)}_{x_1} \underbrace{\cos(\Delta\theta)}_{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} + \underbrace{r \sin(\theta)}_{x_2} \underbrace{\sin(\Delta\theta)}_{\Delta\theta+\mathcal{O}(\varepsilon^3)} \\ &= x_1 + x_2 \Delta\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \sin(\theta - \Delta\theta) &= \underbrace{r \sin(\theta)}_{x_2} \underbrace{\cos(\Delta\theta)}_{1+\mathcal{O}(\varepsilon^2)} - \underbrace{r \cos(\theta)}_{x_1} \underbrace{\sin(\Delta\theta)}_{\Delta\theta+\mathcal{O}(\varepsilon^3)} \\ &= x_2 - x_1 \Delta\theta + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

▷ Solution en déplacements “présumée” :

$$\begin{cases} u_1 = -x_2 \Delta\theta & = -\gamma x_2 x_3 \\ u_2 = x_1 \Delta\theta & = \gamma x_1 x_3 \\ u_3 = \gamma w(x_1, x_2) \end{cases}$$

- Résolution des équations dans la masse du barreau

→ *Déformations*

$$[\varepsilon_{ij}] = \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ -x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} & x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

NB : $\varepsilon_{mm} = 0$

→ *Contraintes*

$$[\sigma_{ij}] = \mu\gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 & -x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \\ 0 & 0 & x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \\ -x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} & x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} & 0 \end{bmatrix}$$

→ Equations d'équilibre

▷ Seule équation non trivialement satisfaite :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(-x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) = 0$$

ou

$$\Delta w = 0$$

▷ Le gauchissement w doit donc être *harmonique*

- **Conditions aux frontières**

→ *Conditions sur la surface latérale*

▷ Normale sortante :

$$[n_i] = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d\hat{x}_2}{ds} \\ -\frac{d\hat{x}_1}{ds} \\ 0 \end{bmatrix}$$

(s est l'abscisse curviligne)

▷ Forces de contact :

$$[\tau_i(\underline{n})] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 \end{bmatrix}$$

▷ Condition de surface latérale libre :

$$\mu\gamma \left(-x_2 + \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) n_1 + \mu\gamma \left(x_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} \right) n_2 = 0$$

ou

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (\hat{x}_1^2(s) + \hat{x}_2^2(s))$$

(étant donné que $\frac{\partial w}{\partial x_1} n_1 + \frac{\partial w}{\partial x_2} n_2 = \frac{\partial w}{\partial n}$)

▷ Conclusion

La condition trouvée sur $\frac{\partial w}{\partial n}$ permet de déterminer w à une constante près. Celle-ci correspond à une translation de la poutre suivant \underline{e}_3 , qu'on fixe afin d'approximer un *encastrement* :

$$w(0,0) = 0$$

→ *Conditions aux extrémités*

▷ *Moment de torsion*

Moment de torsion M donné :

$$\begin{aligned} M &= \underline{e}_3 \cdot \underline{M}_P^{(1)} = \underline{e}_3 \cdot \int_{S_P} (\underline{x} - L\underline{e}_3) \times \underline{\tau}(\underline{e}_3) dS \\ &= \underline{e}_3 \cdot \int_{S_P} (x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) \times (\sigma_{31}\underline{e}_1 + \sigma_{32}\underline{e}_2 + \sigma_{33}\underline{e}_3) dS \\ &= \int_{S_P} (-x_2\sigma_{13} + x_1\sigma_{23}) dS \end{aligned}$$

ou

$$M = \mu\gamma \int_S \left(x_1^2 + x_2^2 + x_1 \frac{\partial w}{\partial x_2} - x_2 \frac{\partial w}{\partial x_1} \right) dS$$

Cette condition permet de déterminer γ en fonction de M , puisque w vient d'être trouvé

▷ *Moments de flexion nuls*

Ces moments sont donnés par les expressions

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{M}_P^{(1)}, \quad \underline{e}_2 \cdot \underline{M}_P^{(1)}, \quad \underline{e}_1 \cdot \underline{M}_O^{(2)}, \quad \underline{e}_2 \cdot \underline{M}_O^{(2)}$$

Ils sont bien nuls, car $\sigma_{33} = 0$

Par exemple :

$$\underline{e}_1 \cdot \underline{M}_P^{(1)} = \underline{e}_1 \cdot \int_{S_P} (x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2) \times (\sigma_{31}\underline{e}_1 + \sigma_{32}\underline{e}_2) dS = 0$$

▷ *Résultante de traction nulle*

$$\underline{e}_3 \cdot \underline{F}^{(1)} = \underline{e}_3 \cdot \int_{S_P} (\sigma_{31}\underline{e}_1 + \sigma_{32}\underline{e}_2) dS = 0$$

▷ *Efforts tranchants nuls*

– Vu l'équilibre *local*

$$\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0$$

et

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$$

il y a équilibre *global* des forces et moments, soit

$$\underline{F}^{(1)} + \underline{F}^{(2)} = \underline{0}$$

et

$$\underline{M}_O^{(1)} + \underline{M}_O^{(2)} = \underline{0}$$

c.-à-d., par transport de forces et moments,

$$\underline{M}_P^{(1)} + L\underline{e}_3 \times \underline{F}^{(1)} + \underline{M}_O^{(2)} = \underline{0}$$

– Comme

$$\underline{M}_P^{(1)} + \underline{M}_O^{(2)} = \underline{0}$$

(moments de flexion nuls et moments de torsion en équilibre)

on a

$$\underline{e}_3 \times \underline{F}^{(1)} = \underline{0}$$

et de même

$$\underline{e}_3 \times \underline{F}^{(2)} = \underline{0}$$

Ainsi, les efforts tranchants sont bien nuls

→ *Conclusions*

- ▷ On a trouvé la *solution* complète du problème en *contraintes* et *déformations* par résolution d'une équation de Laplace
- ▷ Pour les *déplacements*, la solution a les propriétés suivantes :

$$[u_i(0, 0, 0)] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma w(0, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\omega_{12}(0, 0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_3}(0, 0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial x_3}(0, 0, 0) = 0$$

Cette solution présente des conditions typiques approximatives d'*encastrement* :

- l'origine O est fixe
- il n'y a pas de rotation autour de Ox_3
- l'axe Ox_3 reste perpendiculaire au plan Ox_1x_2

Le choix de O était arbitraire. Un autre choix aurait donné une solution différant de la précédente par une translation et une rotation infinitésimale

- ▷ On a donc trouvé une solution au problème (avec application du théorème de St.-Venant sur la section $x_3 = 0$)

• **Exemple : poutre à section circulaire**

→ Par symétrie :

$$w = \hat{w}(r)$$

→ Equations d'équilibre :

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = 0$$

ou

$$\frac{dw}{dr} = \frac{A}{r}$$

→ Conditions sur la surface latérale :

$$\frac{dw}{dr} = 0 \quad \text{en } r = a$$

→ Conclusion :

$$w = B$$

→ Condition d'encastrement :

$$w(0, 0) = 0$$

Donc, le *gauchissement est nul* partout :

$$w = 0$$

→ Calcul de l'angle de torsion :

$$M = \mu\gamma \int_0^a r^2 2\pi r dr = \frac{\mu\pi\gamma}{2} a^4$$

(donne γ puisque M est connu)

Chapitre 5

Fluide visqueux newtonien

Modèle du fluide visqueux newtonien incompressible (et indilatable)

- **Equations de constitution**

→ *Forme générale*

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + 2\eta(T)d_{ij}$$

$$q_i = -k(T)\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

$$U = \hat{U}(T)$$

$$S = \hat{S}(T)$$

avec

$$\frac{d\hat{U}}{dT} = c_V(T)$$

et

$$\frac{d\hat{S}}{dT} = \frac{c_V(T)}{T}$$

→ *Fonctions matérielles* données :

$$\eta(T) > 0 \quad (\text{viscosité dynamique})$$

$$k(T) > 0 \quad (\text{conductivité thermique})$$

$$c_V(T) > 0 \quad (\text{chaleur spécifique à volume constant})$$

Masse spécifique constante donnée :

$$\rho > 0$$

- **Cohérence avec le second principe**

Inégalité de *Clausius-Duhem* :

$$0 \geq -2\eta(T)d_{ij}d_{ij} - \frac{k(T)}{T} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}$$

→ Celle-ci est identiquement *satisfaite*

→ Les seules *irréversibilités* sont dues à la dissipation visqueuse et aux transferts thermiques par conduction

Formulation du problème en vitesses, pression, température

- **Equations de champ**

→ *Champs inconnus*

v_i (vitesses)
 p (pression)
 T (température absolue)

→ *Système développé*

▷ Equation de conservation de la *masse*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

▷ Equation de conservation de la *quantité de mouvement*

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\eta(T) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \right)$$

(dans un repère inertiel)

▷ Equation de conservation de l'*énergie*

$$\rho c_V(T) \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = r + \frac{1}{2} \eta(T) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

→ *Champs donnés*

Les actions *externes* $g_i(\underline{x}, t)$ et $r(\underline{x}, t)$ sont données

- **Conditions aux limites**

→ Conditions *thermiques*

- ▷ Une condition *initiale* est imposée en cas de problème *instationnaire* :

$$\text{En } t = t_0, \quad T = T_{in}(\underline{x}) \quad \text{sur } V$$

- ▷ Une condition est imposée en chaque point de la *frontière* :

- Premier type (condition *essentielle*) : *température* donnée

$$\forall t \geq t_0, \quad T = \bar{T}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial^*V$$

- Second type (condition *naturelle*) : *densité de flux entrant* donnée

$$\forall t \geq t_0, \quad q(\underline{n}) = k \frac{\partial T}{\partial n} = \bar{q}(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial^{**}V$$

avec

$$\partial^*V \cap \partial^{**}V = \emptyset, \quad \partial^*V \cup \partial^{**}V = \partial V$$

→ Conditions *mécaniques*

- ▷ Une condition *initiale vectorielle* à divergence nulle est imposée en cas de problème *instationnaire* :

$$\text{En } t = t_0, \quad v_i = v_{in,i}(\underline{x}) \quad \text{sur } V$$

- ▷ Une condition *vectorielle* est imposée en chaque point de la *frontière* :

- Premier type (condition *essentielle*) : *vitesses* imposées

$$\forall t \geq t_0, \quad v_i = \bar{v}_i(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial'V$$

- Second type (condition *naturelle*) : *densité de forces de contact* imposée

$$\forall t \geq t_0, \quad \tau_i(\underline{n}) = -pn_i + 2\eta(T)d_{ij}n_j = \bar{\tau}_i(\underline{x}, t) \quad \text{sur } \partial''V$$

avec

$$\partial'V \cap \partial''V = \emptyset, \quad \partial'V \cup \partial''V = \partial V$$

- ▷ *Conditions mixtes* également possibles :

- vitesse normale + densité de forces de contact tangentielle
- vitesse tangentielle + densité de forces de contact normale

→ Cas particuliers (conditions mécaniques)

▷ *Parois solides* : collement du fluide visqueux sur la paroi

$$v_i = \bar{v}_i(\underline{x}, t)$$

($\bar{v}_i(\underline{x}, t)$ est la vitesse de la paroi)

▷ *Frontières libres*

(frontières séparant deux fluides, et de forme et de mouvement inconnus)

- *Interface* entre deux fluides *visqueux*, sans tension superficielle : deux conditions *vectérielles* sont imposées sur l'interface :

– Continuité des vitesses

$$v_i^{(1)}(\underline{x}, t) = v_i^{(2)}(\underline{x}, t)$$

– Equilibre des forces de contact

$$\tau_i^{(1)}(\underline{x}, t) + \tau_i^{(2)}(\underline{x}, t) = 0$$

ou

$$\sigma_{ji}^{(1)}(\underline{x}, t)n_j^{(1)}(\underline{x}, t) + \sigma_{ji}^{(2)}(\underline{x}, t)n_j^{(2)}(\underline{x}, t) = 0$$

(continuité de la partie de σ_{ij} projetée sur l'une ou l'autre des normales à l'interface)

- *Interface* entre un fluide visqueux et un fluide *parfait* (non visqueux), sans tension superficielle :

– Continuité des vitesses *normales*

– Equilibre des forces de contact + force de contact tangentielle nulle

- *Interface* entre deux fluides avec *tension superficielle*

Forces supplémentaires (de tension superficielle) à considérer dans l'équilibre des forces de contact

Equations de Navier-Stokes

- **Hypothèses**

- Viscosité η indépendante de T
- Conditions aux frontières “mécaniques” indépendantes de T

- **Système**

- Formulation (v_i, p)

$$\rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) = \rho g_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j}$$

et

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

- Remarques

▷

$$\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} = \Delta v_i$$

donne le *laplacien vecteur* de \underline{v} en composantes *cartésiennes*

- ▷ $\Delta \underline{v}$ ne s'obtient pas en coordonnées *curvilignes* en calculant un laplacien scalaire composante par composante, mais par la relation

$$\Delta \underline{v} = \underline{\nabla} \cdot \underline{\nabla} \underline{v} = \underline{\nabla} (\underline{\nabla} \cdot \underline{v}) - \underline{\nabla} \times (\underline{\nabla} \times \underline{v})$$

- Problème *thermique*
(à résoudre a posteriori, après calcul de v_i et p)

- ▷ Hypothèses
 c_V, k indépendantes de T

- ▷ Equation à résoudre

$$\rho c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = r + 2\eta d_{ij} d_{ij} + k \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_i}$$

• Equations de Navier-Stokes en coordonnées-composantes cylindriques

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) \\ = g_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left(\Delta v_r - \frac{v_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ = g_\theta - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left(\Delta v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{v_\theta}{r^2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ = g_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta v_z \end{aligned}$$

et

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

avec

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Expérience de cisaillement simple

- **Hypothèses**

- Fluide situé entre deux plaques.
Plaque inférieure fixe, plaque supérieure se déplaçant à la vitesse V
- Problème non isotherme (modèle général)
Plaques adiabatiques
- Pesanteur exercée perpendiculairement aux plaques

- **Calcul des champs**

- *Résolution*

- ▷ Vitesses

$$[v_i] = \begin{bmatrix} \frac{V}{h}x_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- ▷ Taux de déformation et contraintes

$$\left[\frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[d_{ij}] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{V}{2h} & 0 \\ \frac{V}{2h} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\sigma_{ij}] = \begin{bmatrix} -p & \eta(T)\frac{V}{h} & 0 \\ \eta(T)\frac{V}{h} & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix}$$

(champs *homogènes*, sauf la pression)

- ▷ Reste à déterminer p et T

→ Analyse du résultat

▷ *Densité de force* exercée par la plaque supérieure *sur le fluide* :

$$[\tau_i(\underline{n} = \underline{e}_2)] = [\sigma_{2i}] = \begin{bmatrix} \eta(T) \frac{V}{h} \\ -p \\ 0 \end{bmatrix}$$

▷ Décomposition

• composante normale : $-p\underline{e}_2$

• composante tangentielle : $\eta(T) \frac{V}{h} \underline{e}_1$

▷ Conclusion

• *Taux de cisaillement*

$$\frac{V}{h} = \dot{\gamma}$$

= rapprochement angulaire par unité de temps entre deux segments élémentaires parallèles en t à \underline{e}_1 et \underline{e}_2

• Densité de force *tangentielle* (de cisaillement) exercée sur le fluide par la plaque supérieure = produit de la viscosité par le taux de cisaillement

→ *Solution* des équations de champ :

$$\begin{aligned} T &= T^*(t) \\ p &= \rho g(K(t) - x_2) \end{aligned}$$

avec

$$\frac{dT^*}{dt} = \frac{\eta(T^*)}{\rho c_V(T^*)} \left(\frac{V}{h} \right)^2$$

et $K(t)$ quelconque (vu l'incompressibilité du fluide)

→ *Justification*

La conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie sont identiquement satisfaites, pourvu que $T = T^*(t)$ soit solution de

$$\rho c_V(T^*(t)) \frac{dT^*}{dt} = \eta(T^*(t)) \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

De plus,

$$q_i = -k(T) \frac{\partial T}{\partial x_i} = 0$$

(les parois sont bien adiabatiques)

→ *Remarques*

- La fonction $K(t)$ est fixée par la donnée de la force de contact normale (uniforme) exercée sur la paroi inférieure (ou supérieure)
- La fonction $T^*(t)$ est fixée par la donnée d'une température initiale homogène :

$$T^*(t_0) = T_0$$

→ Puissance des efforts internes :

$$\eta(T^*) \left(\frac{V}{h}\right)^2$$

Il y a *échauffement visqueux*, car

$$\frac{dT^*}{dt} > 0$$

Écoulement de Poiseuille entre 2 plans

- **Description du problème**

→ *Données*

- ▷ Les caractéristiques matérielles du fluide (ρ, η) (constantes)
- ▷ La pression d'entrée p_0 (en fait, on donne la densité de forces de contact à l'entrée $-p_0\mathbf{n}$)
- ▷ La pression de sortie p_L (en fait, on donne la densité de forces de contact à la sortie $-p_L\mathbf{n}$)

→ *Hypothèses*

- ▷ pas de pesanteur
- ▷ écoulement stationnaire
- ▷ repère inertiel

- **Résolution**

→ Hypothèses *semi-inverses*

$$\begin{aligned}v_1 &= \hat{v}_1(x_2) \\v_2 &= v_3 = 0 \\p &= \hat{p}(x_1, x_2)\end{aligned}$$

→ Analyse des équations de *Navier-Stokes*

▷ Conservation de la masse

$$\frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x_1} = 0 \quad (\text{satisfaite identiquement})$$

▷ Quantité de mouvement suivant x_1

$$\rho \left(v_2 \frac{\partial \hat{v}_1}{\partial x_2} \right) = - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_1} + \eta \Delta \hat{v}_1$$

ou

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial x_1} = \eta \Delta \hat{v}_1$$

▷ Quantité de mouvement suivant x_2 et x_3

$$\begin{aligned}0 &= - \frac{\partial \hat{p}}{\partial x_2} \\0 &= 0 \quad (\text{satisfaite identiquement})\end{aligned}$$

Donc

$$p = \hat{p}(x_1)$$

→ *Intégration*

▷ Comme

$$\underbrace{\frac{d\hat{p}}{dx_1}}_{\text{fonction de } x_1} = \underbrace{\eta \frac{d^2 v_1}{dx_2^2}}_{\text{fonction de } x_2}$$

ces deux fonctions sont égales à une même constante K

▷ Détermination de la *pression*

$$p = Kx_1 + M$$

Conditions d'*entrée* et de *sortie* :

$$M = p_0$$

$$KL + M = p_L$$

Finalement :

$$p = \nabla p x_1 + p_0$$

avec

$$\nabla p = \frac{p_L - p_0}{L} = K$$

▷ Détermination des *vitesses*

$$v_1 = \frac{\nabla p}{2\eta} x_2^2 + Ax_2 + B \quad (K = \nabla p)$$

Collement du fluide sur les parois fixes ($x_2 = \pm h$) :

$$A = 0$$

$$B = -\frac{\nabla p}{2\eta} h^2$$

Finalement :

$$v_1 = -\frac{\nabla p}{2\eta} (h^2 - x_2^2)$$

- **Conclusions**

→ Décroissance linéaire de la pression avec x_1

→ Profil parabolique de vitesse

→ Débit volume par unité de largeur :

$$Q = \int_{-h}^h \hat{v}_1(x_2) dx_2 = -\frac{\nabla p}{\eta} \frac{(2h)^3}{12}$$

Écoulement de Poiseuille dans un cylindre

- **Données et hypothèses**

Les mêmes que précédemment (Poiseuille entre deux plans)

- **Résolution**

→ Hypothèses *semi-inverses* de résolution
(coordonnées et composantes *cylindriques*)

$$\begin{aligned}v_r &= v_\theta = 0 \\v_z &= \hat{v}_z(r) \\p &= \hat{p}(r, z)\end{aligned}$$

→ Analyse des équations de *Navier-Stokes*

▷ Conservation de la masse

$$\frac{\partial \hat{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (\text{satisfaite identiquement})$$

▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_r

$$0 = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}$$

Donc

$$p = \hat{p}(z)$$

▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_θ

$$0 = 0 \quad (\text{satisfaite identiquement})$$

▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_z

$$\rho \left(v_r \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial r} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + \eta \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial r} \right)$$

ou

$$\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} = \frac{\eta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \hat{v}_z}{\partial r} \right)$$

→ *Intégration*

▷ Comme

$$\underbrace{\frac{d\hat{p}}{dz}}_{\text{fonction de } z} = \underbrace{\frac{\eta}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{v}_z}{dr} \right)}_{\text{fonction de } r}$$

ces deux fonctions sont égales à une même constante K

▷ Détermination de la *pression*

$$p = \nabla p z + p_0$$

avec

$$\nabla p = \frac{p_L - p_0}{L} = K$$

▷ Détermination des *vitesse*s

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{d\hat{v}_z}{dr} \right) = \frac{\nabla p}{\eta} r$$

$$\hat{v}_z(r) = \frac{\nabla p}{4\eta} r^2 + A \ln r + B$$

Condition de vitesse non infinie en $r = 0$:

$$A = 0$$

Condition de collement du fluide sur la paroi en $r = R$:

$$B = -\frac{\nabla p}{4\eta} R^2$$

Finalement :

$$\hat{v}_z(r) = -\frac{\nabla p}{4\eta} (R^2 - r^2)$$

• Conclusions

→ Décroissance linéaire de la pression avec z

→ Profil parabolique de vitesse

→ Débit volume :

$$Q = \int_0^R \hat{v}_z 2\pi r dr = -\frac{\nabla p}{\eta} \frac{\pi R^4}{8}$$

Écoulement entre deux cylindres en rotation (écoulement de Couette)

- **Hypothèses**

- Les caractéristiques matérielles du fluide (ρ, η) sont constantes
- L'écoulement est stationnaire
- Il n'y a pas de pesanteur
- Les cylindres (de rayons R_1 et R_2) tournent autour de leur axe aux vitesses angulaires Ω_1 et Ω_2
- Le repère est inertiel

- **Résolution**

- Hypothèses *semi-inverses* (coordonnées cylindriques)

$$\begin{aligned}v_r &= v_z = 0 \\v_\theta &= \hat{v}_\theta(r) \\p &= \hat{p}(r)\end{aligned}$$

- Analyse des équations de *Navier-Stokes*
 - ▷ Conservation de la masse : satisfaite identiquement
 - ▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_z : satisfaite identiquement
 - ▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_r

$$\rho \left(-\frac{\hat{v}_\theta^2}{r} \right) = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial r}$$

- ▷ Quantité de mouvement suivant \underline{e}_θ

$$0 = \eta \left(\frac{\partial^2 \hat{v}_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{v}_\theta}{\partial r} - \frac{\hat{v}_\theta}{r^2} \right)$$

→ Calcul des *vitesses*

▷ Intégration

$$\frac{d^2 \hat{v}_\theta}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\hat{v}_\theta}{dr} - \frac{\hat{v}_\theta}{r^2} = \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r\hat{v}_\theta) \right) = 0$$

Par conséquent

$$v_\theta = \frac{A}{2}r + \frac{B}{r}$$

▷ *Collement* du fluide sur les deux cylindres : détermination de A et B par le système

$$\begin{cases} \frac{A}{2}R_1 + \frac{B}{R_1} = \Omega_1 R_1 \\ \frac{A}{2}R_2 + \frac{B}{R_2} = \Omega_2 R_2 \end{cases}$$

→ Calcul de la *pression*

$$\frac{d\hat{p}}{dr} = \frac{\rho}{r} \left(\frac{A}{2}r + \frac{B}{r} \right)^2$$

et donc

$$p = \frac{\rho A^2 r^2}{8} + \rho AB \ln r - \frac{\rho B^2}{2r^2} + p_0$$

(la constante p_0 dépend de la manière dont la cavité a été remplie)

Nombre de Reynolds – Analyse dimensionnelle

- **Mise sous forme adimensionnelle des équations de Navier-Stokes**

→ *Position du problème*

▷ Hypothèses

- Fluide visqueux newtonien incompressible

- Ecoulement isotherme

- Pas de forces à distance

$$g_i = 0$$

▷ Identification, pour l'écoulement considéré

- d'une longueur caractéristique L

- d'une vitesse caractéristique V

→ *Etablissement des équations adimensionnelles*

▷ Définition d'un *système d'unités* particulier lié à L et V

- masse : ρL^3 (en kg)

- longueur : L (en m)

- temps : $\frac{L}{V}$ (en sec)

▷ Autres unités :

- pression : ρV^2 (en Pa)

- vitesse : V (en m/sec)

- masse spécifique : ρ (en kg/m³)

- viscosité : $\rho V L$ (en kg/(m.sec))

▷ Apparition des *grandeurs adimensionnelles* x'_i , t' , v'_i et p' :

$$x_i = Lx'_i$$

$$t = \frac{L}{V}t'$$

$$v_i = Vv'_i$$

$$p = \rho V^2 p'$$

et ρ' et η' :

$$\rho = \rho\rho'$$

$$\eta = \rho V L \eta'$$

Par conséquent,

$$\rho' = 1$$

$$\eta' = \frac{1}{Re}$$

où le nombre (adimensionnel) de Reynolds est *défini* par

$$Re = \frac{\rho V L}{\eta}$$

▷ Nouvelles *équations* (adimensionnelles) obtenues par invariance dimensionnelle :

$$\frac{\partial v'_i}{\partial x'_i} = 0$$

$$\frac{\partial v'_i}{\partial t'} + v'_j \frac{\partial v'_i}{\partial x'_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \frac{1}{Re} \Delta' v'_i$$

($\Delta' v'_i$ et le laplacien vecteur de v'_i en coordonnées adimensionnelles)

→ *Conclusions*

▷ *Interprétation physique de Re*

$$Re \sim \frac{\text{forces "d'inertie"}}{\text{forces de viscosité}} \quad \text{dans l'écoulement}$$

▷ Re caractérise complètement, à un facteur d'échelle près, la géométrie de l'écoulement (c.-à-d. la forme des trajectoires des points matériels)

▷ *Similitude dynamique*

Soit des écoulements pour lesquels ρ , η , L , V sont différents, mais de Re égal. Il y a similitude des résultats, à un changement d'échelle près, pour toutes les grandeurs physiques

- **Application à l'écoulement dans une canalisation cylindrique**

→ *Perte de charge*

▷ Définition en l'absence de forces de masse :

$$\Delta C = \frac{p_0 - p_L}{\rho g} \quad (\text{en } m)$$

▷ En général, en *hydraulique* : travail de frottement par unité de masse mesuré par la perte de hauteur d'eau équivalente dans le tronçon de canalisation considéré

→ *Régimes d'écoulement*

▷ Ecoulement *laminaire* ($Re < 2000$ à 10000)

L'écoulement de Poiseuille dans un cylindre donne

$$\Delta C = \frac{64}{Re} \frac{L}{2R} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

où la vitesse moyenne \bar{V} est

$$\bar{V} = \frac{Q}{\pi R^2}$$

▷ Ecoulement *turbulent* ($Re > 2000$ à 10000)

- Naissance d'*instabilités* (écoulement instationnaire)

Dans ce cas, on prend en chaque point la moyenne des vitesses et de la pression sur un intervalle de temps suffisamment long. Ceci définit un *écoulement moyen*, qui est stationnaire mais n'obéit pas aux équations de Navier-Stokes.

- Perte de charge en régime laminaire ou turbulent :

$$\Delta C = f \left(Re, \frac{\varepsilon}{2R} \right) \frac{L}{2R} \frac{\bar{V}^2}{2g}$$

Le facteur de frottement f est représenté sur le *diagramme de Moody* en fonction de Re et de la rugosité relative $\frac{\varepsilon}{2R}$ (ε est la rugosité absolue de la paroi).

- *Transition* à la turbulence pour une géométrie générale :

- soit apparition d'un écoulement oscillant, puis quasi-périodique, puis chaotique (turbulent)
- soit apparition immédiate d'un écoulement turbulent (transition brutale)

Modèle du fluide visqueux newtonien compressible

- **Equations de constitution**

→ Forme générale

▷ *Contraintes*

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij} + \kappa(p, T)d_{mm}\delta_{ij} + 2\eta(p, T)d_{ij}^d$$

avec

$$d_{ij}^d = d_{ij} - \frac{1}{3}d_{mm}\delta_{ij}$$

(d_{ij}^d a les mêmes composantes non diagonales que d_{ij} dans tout système d'axes)

▷ *Flux de chaleur*

$$q_i = -k(p, T)\frac{\partial T}{\partial x_i}$$

▷ *Energie interne et entropie spécifiques*

$$U = \hat{U}(p, T)$$

$$S = \hat{S}(p, T)$$

▷ *Equation d'état*

$$\rho = \hat{\rho}(p, T)$$

→ *Consistance avec le second principe*

Les fonctions matérielles \hat{U} , \hat{S} , $\hat{\rho}$, κ , η et k doivent vérifier les relations suivantes :

▷ *Identité différentielle*

$$\hat{\rho}T d\hat{S} = \hat{\rho}d\hat{U} - \frac{p}{\hat{\rho}}d\hat{\rho}$$

▷ *Inégalités*

$$k(p, T) \geq 0$$

$$\kappa(p, T) \geq 0$$

$$\eta(p, T) \geq 0$$

- **Principales grandeurs physiques associées**

→ *Sens des symboles*

- κ : viscosité de volume (NB : hypothèse de Stokes : $\kappa = 0$)
- η : viscosité de cisaillement
- k : conductivité thermique

Dans la pratique on a toujours :

$$k > 0, \quad \eta > 0$$

→ Autres grandeurs utiles

▷ *Enthalpie* spécifique

$$H = \hat{H}(p, T) = U + \frac{p}{\rho}$$

avec

$$\hat{\rho} T d\hat{S} = \hat{\rho} d\hat{H} - d\hat{p}$$

▷ On définit aussi

- $F = U - TS$: énergie libre spécifique (de Helmholtz)
- $G = H - TS$: enthalpie libre, ou énergie libre de Gibbs
- $c_p = \left. \frac{\partial H}{\partial T} \right|_p$: chaleur spécifique à pression constante
- $c_V = \left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_\rho$: chaleur spécifique à volume constant

(obtenue en exprimant U en fonction de T et ρ)

- **Formulation du problème en vitesses, pression, température**

→ Il suffit d'injecter les équations de constitution dans les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie pour obtenir un système de 5 équations à 5 inconnues

→ Les conditions initiales et aux frontières sont similaires à celles du modèle incompressible et indilatable, mais il faut ajouter la donnée initiale du champ de pression, en cas de problème instationnaire, ainsi que la donnée de la pression sur toute section d'entrée du fluide

Chapitre 6

Approximation du fluide parfait

L'approximation du fluide parfait

- **Etablissement du modèle**

→ *Fluide parfait incompressible*

- ▷ Partant d'un fluide visqueux newtonien incompressible à viscosité constante, on prend les équations adimensionalisées et on considère un Re très grand, sans pour autant qu'il n'y ait apparition de turbulence. Les termes d'inertie et de pesanteur sont supposés être du même ordre de grandeur
- ▷ L'approximation consiste à faire $Re \rightarrow \infty$ dans les équations qui, sous forme dimensionnelle, prennent la forme *asymptotique*

$$\begin{cases} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} & = 0 \\ \rho \left(\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) & = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g_i \end{cases}$$

(équations d'Euler)

- ▷ Tout se passe comme si
 - la viscosité était nulle ($\eta = 0$)
 - et $\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$ (approximation des contraintes par le modèle du fluide parfait)

→ *Fluide parfait compressible barotrope*

▷ On suppose

- que l'écoulement est *uniforme* à *l'infini* amont (c'est le plus souvent le cas pour l'écoulement autour d'un profil)
- qu'il n'y a pas d'apports externes de chaleur ($r = 0$)
- que Re est très *grand*, sans qu'il n'y ait cependant *turbulence*

▷ Raisonement esquissé

- Si Re est très grand, alors généralement le nombre de Péclet (Pe), qui est l'équivalent de Re dans l'équation d'énergie, est aussi très grand :

$$Pe = \frac{\rho L V C_p}{k} \sim \frac{\text{flux de chaleur par transport}}{\text{flux de chaleur par conduction}}$$

La conduction thermique est alors négligeable et l'écoulement est essentiellement *adiabatique*

- Comme Re est grand, la viscosité a un effet négligeable ; comme Pe est grand, la conduction de chaleur est négligeable. Dès lors, les *transformations* subies par le fluide sont *réversibles*, et l'écoulement est *isentropique* sur chaque trajectoire :

$$\frac{DS}{Dt} = 0$$

- Comme l'écoulement est uniforme à l'infini amont, S est la même sur toutes les trajectoires
L'écoulement est alors globalement isentropique, ou *homentropique* ($S = K$ constante)

-
- Puisque

$$\hat{S}(p, T) = K$$

alors on peut exprimer la température en fonction de la pression et vice-versa :

$$T = T^*(p) \quad \text{et} \quad p = p^*(T)$$

De même, comme

$$\rho = \hat{\rho}(p, T)$$

on trouve

$$\rho = \rho^*(p)$$

et aussi

$$p = p^*(\rho)$$

On parle de *fluide barotrope* lorsqu'on peut exprimer ainsi la pression en fonction de la masse volumique (on devrait en fait parler d'écoulement barotrope)

- Calcul de *l'enthalpie spécifique*

Comme

$$\rho T dS = \rho dH - dp = 0$$

on obtient (à une constante près)

$$H = H^*(p) = \int \frac{dp}{\rho^*(p)}$$

avec

$$\frac{dH^*}{dp} = \frac{1}{\rho^*(p)}$$

▷ Cas du *gaz idéal* à *chaleurs massiques constantes* :

$$p = \rho RT$$

et

$$U = c_v T, \quad H = c_p T, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

On trouve

$$T = c^{tte} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$p = c^{tte} \cdot T^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

$$\rho = c^{tte} \cdot p^{\frac{1}{\gamma}}$$

$$p = c^{tte} \cdot \rho^{\gamma}$$

$$H = c^{tte} \cdot p^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

→ En général, on a donc les *résultats* suivants

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{pour le fluide parfait incompressible} \\ \text{pour le fluide parfait barotrope} \end{array} \right.$$

▷ Les *contraintes* s'écrivent

$$\sigma_{ij} = -p\delta_{ij}$$

▷ La *masse spécifique* a la forme

$$\rho = \rho^*(p)$$

▷ On a aussi, pour l'*enthalpie spécifique*,

$$H = H^*(p)$$

avec

$$\frac{dH^*}{dp} = \frac{1}{\rho^*(p)}$$

- **Equations de champ**

→ Hypothèses

Fluide *parfait barotrope ou incompressible*, avec des *forces de masse* dérivant d'un *potentiel* $W(x_i)$:

$$g_i = -\frac{\partial W}{\partial x_i}$$

→ Formulation *vitesse-pressure* du problème

▷ Conservation locale de la *masse*

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

ou

$$\frac{1}{\rho^*} \frac{d\rho^*}{dp} \frac{Dp}{Dt} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

▷ Conservation locale de la *quantité de mouvement* (en repère inertiel)

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial W}{\partial x_i}$$

ou

$$\frac{Dv_i}{Dt} = -\frac{\partial}{\partial x_i}(H + W)$$

où

$$H = H^* \left(p^{(e)}(x_i, t) \right)$$

→ Conditions aux *frontières*

▷ Conditions *initiales* (problème instationnaire)

Les vitesses v_i sont données sur tout le domaine en $t = t_0$. La pression p est donnée sur tout le domaine en $t = t_0$ dans le cas compressible

▷ Sur une *paroi rigide*

Le fluide parfait glisse sans frottement :

$$(v_i - V_i)n_i = 0$$

(où V_i est la vitesse de la paroi)

▷ Sur une *frontière libre*

Conditions plus compliquées

- **Théorèmes**

→ *Hypothèses générales*

- ▷ *Fluide parfait*
- ▷ *Fluide barotrope ou incompressible*
- ▷ *Forces de masse dérivant d'un potentiel $W(x_i)$*

→ *Evolution du taux de rotation*

- ▷ *Première formulation*

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\dot{\Omega}_i}{\rho} \right) = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \left(\frac{\dot{\Omega}_j}{\rho} \right)$$

où

$$\dot{\Omega}_i = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

(taux de rotation)

- ▷ *Seconde formulation*

Avec $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(t_0)$, si, pour chaque point matériel, on désigne par $\underline{\dot{\Omega}}^0$ et ρ^0 les valeurs de $\underline{\dot{\Omega}}$ et ρ en $t = t_0$, et si le mouvement est

$$x_i = x_i^{(l)}(X_j, t)$$

alors, pour chaque point matériel,

$$\frac{\dot{\Omega}_i}{\rho} = F_{ij} \frac{\dot{\Omega}_j^0}{\rho^0}$$

où

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_j}$$

est le gradient de déformation

- ▷ *Interprétation* : un vecteur matériel élémentaire se transforme de $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}(t_0)$ à $\mathcal{R}(t)$ suivant la loi

$$dx_i = F_{ij} dX_j$$

de sorte que $\frac{\dot{\Omega}_i}{\rho}$ se transforme de \mathcal{R}_0 à $\mathcal{R}(t)$ comme un vecteur matériel élémentaire

→ Ecoulements *irrotationnels*

- ▷ Si un écoulement est *irrotationnel* à un endroit à un instant donné, il le *reste* à tout instant sur la trajectoire du point matériel associé
- ▷ Si un écoulement est partout irrotationnel à un instant donné, il le reste à tout instant
- ▷ En particulier, les écoulements uniformes à l'infini amont sont irrotationnels (sous les hypothèses faites)
- ▷ NB : *potentiel des vitesses*
Pour un écoulement irrotationnel, on peut toujours écrire

$$v_i = \frac{\partial \phi}{\partial x_i}$$

(où ϕ est appelé le potentiel des vitesses)

→ Premier théorème de *Bernoulli*

Pour un écoulement *stationnaire*,

$$\frac{v \cdot v}{2} + H + W = c^{tte}$$

sur chaque ligne de courant

→ Second théorème de *Bernoulli*

Pour un écoulement *irrotationnel*,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{v \cdot v}{2} + H + W = F(t)$$

(cette expression est donc fonction du temps seulement)

→ Théorème de *Kelvin*

La circulation des vitesses $\Gamma(t)$, sur une courbe matérielle fermée quelconque $C(t)$, ne dépend pas du temps

$$\frac{d}{dt} \underbrace{\Gamma(t)}_{\text{circulation}} = \frac{d}{dt} \int_{C(t)} v_i dx_i = 0$$

MECA 1901 :
Mécanique des milieux continus
Professeur François Dupret

Démonstrations

29 Décembre 2007
version 1.0.3

Par :
Marie-Gabrielle Wybou
Alexis Rasson
Gautier Cogels
Christophe Pochet
David Thomas
Nicolas Vandamme
Antoine Pairet

Ce recueil de démonstrations a été rédigé par Marie-Gabrielle Wybou, Alexis Rasson, Gautier Cogels, Christophe Pochet, David Thomas, Nicolas Vandamme et Antoine Pairet sur base du manuscrit du cours et en étroite collaboration avec le Professeur François Dupret.

Il se peut que des erreurs se soient glissées dans ce document, n'hésitez pas à nous les signaler. Ceci peut être fait par e-mail :

- antoine@pairet.be
- delsaute@mema.ucl.ac.be

Le contenu de ce document (démonstrations et figures) est protégé par le droit d'auteur. Cependant les sources \LaTeX sont distribuées sous **license creative commons**.

Vous êtes donc libres

- de reproduire, distribuer et communiquer cette création au public,
- de modifier cette création,

sous les conditions suivantes :

Paternité. Vous devez citer le nom de l'auteur original de la manière indiquée par l'auteur de l'oeuvre ou le titulaire des droits qui vous confère cette autorisation (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'ils vous soutiennent ou approuvent votre utilisation de l'oeuvre).

Partage des Conditions Initiales à l'Identique. Si vous modifiez, transformez ou adaptez cette création, vous n'avez le droit de distribuer la création qui en résulte que sous un contrat identique à celui-ci.

Table des matières

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introduction, concepts de base, calculs tensoriels | 4 |
| | Démonstration 1.1 Signification des composantes du tenseur des vitesses de déformation | 5 |
| | Démonstration 1.2 Invariance | 8 |
| | Démonstration 1.3 Caractère pseudo-tensoriel et propriétés du tenseur de permutation | 9 |
| | Démonstration 1.4 Interprétation des composantes du vecteur taux de rotation | 11 |
| 2 | Cinématique | 12 |
| | Démonstration 2.1 Théorème du transport (Reynolds) - Cas scalaire | 13 |
| 3 | Dynamique | 16 |
| | Démonstration 3.1 Théorèmes globaux – Changement de repère | 17 |
| | Démonstration 3.2 Formes locales des lois de conservation | 19 |
| | Démonstration 3.3 Théorème de l'énergie cinétique | 25 |
| | Démonstration 3.4 Thermodynamique des milieux continus - Forme locale . . | 26 |
| | Démonstration 3.5 Petits déplacements : propriétés | 27 |
| | Démonstration 3.6 Déformations et rotations infinitésimales : interprétation . | 29 |
| | Démonstration 3.7 Petits déplacements : Formes locales des lois de conservation - Inégalité de Clausius Duhem | 33 |
| 4 | Thermoélasticité isotrope infinitésimale | 35 |
| | Démonstration 4.1 Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem | 36 |
| | Démonstration 4.2 Équation de constitution des contraintes – Inversion | 37 |
| 5 | Fluide visqueux newtonien | 38 |
| | Démonstration 5.1 Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem | 39 |

Chapitre 1

Introduction, concepts de base,
calculs tensoriels

Démonstration 1.1 Signification des composantes du tenseur des vitesses de déformation

a) Lemme

En un point (x_i) de $R(t)$, on trace un vecteur matériel élémentaire (δx_i) . Alors, en se limitant aux termes d'ordre 1 séparément en δx_i et δt , ce vecteur matériel élémentaire devient approximativement, dans $R(t + \delta t)$, le vecteur :

$$\delta x'_i = \delta x_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j \delta t + \dots \quad (1.1)$$

En effet, le déplacement approximatif de (x_i) est $(v_i \delta t)$, tandis que celui de $(x_i + \delta x_i)$ est $(v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j) \delta t$, puisque la vitesse de $(x_i + \delta x_i)$ est, au premier ordre près, $(v_i + \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \delta x_j)$. Il suffit ensuite de calculer vectoriellement $\delta x'_i$.

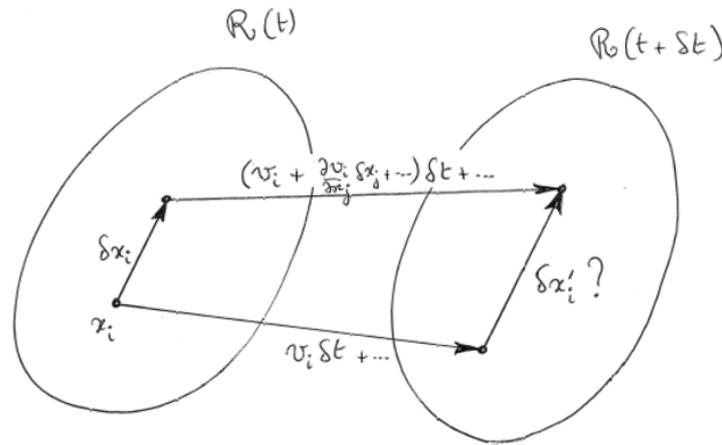


FIG. 1.1 – évolution d'un vecteur aux instants suivant (t)

b) Interprétation de d_{11} , composante diagonale de d_{ij}

On prend un vecteur matériel $\delta \underline{s}(t)$ parallèle à \underline{e}_1 au temps t . En notant

$$\begin{cases} \delta s &= ||\delta \underline{s}(t)|| \\ \delta s' &= ||\delta \underline{s}(t + \delta t)|| \end{cases}$$

on a

$$\delta x_i = (\delta s, 0, 0)$$

et, suivant (1.1),

$$\delta x'_i = \delta s + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta s \delta t, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta s \delta t, \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \delta s \delta t .$$

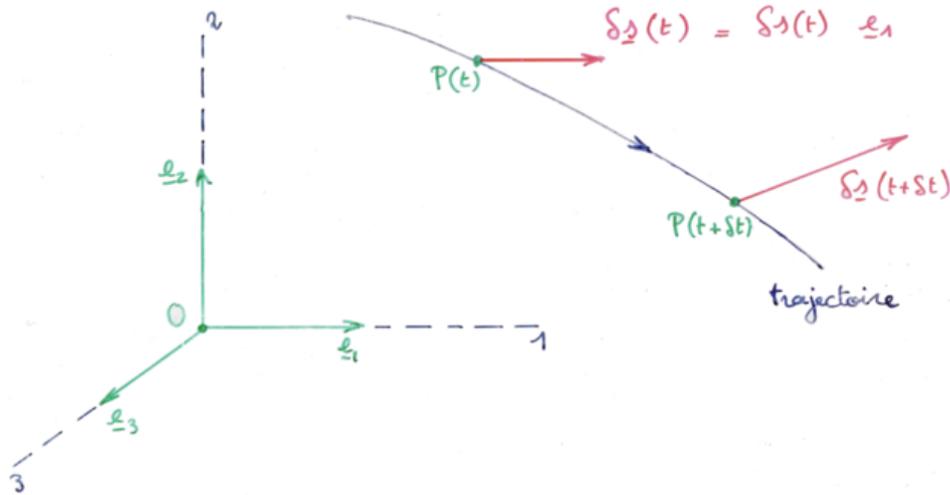


FIG. 1.2 – Interprétation d’une composante diagonale du tenseur des vitesses de déformation

Le carré de la longueur de $(\delta x'_i)$ est donc

$$\begin{aligned} \delta s'^2 &= \left(\delta s + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta s \delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta s \delta t\right)^2 + \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} \delta s \delta t\right)^2 \\ &= \delta s^2 + 2 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta s^2 \delta t + \text{termes d'ordre supérieur} \\ &= \delta s^2 (1 + 2d_{11} \delta t) + \text{termes d'ordre supérieur} . \end{aligned}$$

En effet,

$$d_{11} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} .$$

La racine carré de $(1 + 2d_{11} \delta t)$ est $(1 + d_{11} \delta t)$ à des termes d'ordre δt^2 près. Pour le voir, il suffit de faire le carré en sens inverse. On a donc

$$\delta s' = \delta s (1 + d_{11} \delta t) + \dots$$

Ainsi,

$$d_{11} = \frac{\delta s' - \delta s}{\delta s \delta t} ,$$

et il suffit de passer à la limite pour prouver la formule.

$$d_{11} = d_{11}^{(e)}(x_k, t) = \lim_{\delta s(t), \delta t \rightarrow 0} \frac{\delta s(t + \delta t) - \delta s(t)}{\delta s(t) \delta t}$$

La composante d_{11} de d_{ij} est l'allongement relatif par unité de temps d'un segment élémentaire de matière qui au temps t est parallèle à \underline{e}_1 .

c) **Interprétation de d_{12} , composante non diagonale de d_{ij}**

On prend cette fois deux vecteurs $\delta \underline{s}$ et $\delta \widehat{s}$, avec les notations

$$\begin{cases} \delta s &= \|\delta \underline{s}(t)\| \\ \delta s' &= \|\delta \underline{s}(t + \delta t)\| \\ \delta \widehat{s} &= \|\delta \widehat{\underline{s}}(t)\| \\ \delta \widehat{s}' &= \|\delta \widehat{\underline{s}}(t + \delta t)\| \end{cases}$$

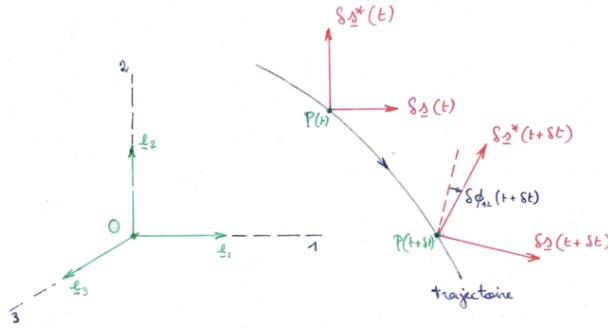


FIG. 1.3 – Interprétation d’une composante non-diagonale du tenseur des vitesses de déformation

Dès lors,

$$\begin{cases} (\delta x_i) &= (\delta s, 0, 0) \quad (\text{parallèle à } \underline{e}_1 \text{ dans } R(t)) \\ (\delta y_i) &= (0, \delta \widehat{s}, 0) \quad (\text{parallèle à } \underline{e}_2 \text{ dans } R(t)) \end{cases}$$

Alors, suivant (1.1),

$$\begin{cases} (\delta x'_i) &= (\delta s + \frac{\partial v_1}{\partial x_1} \delta s \delta t, \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \delta s \delta t, \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \delta s \delta t) \\ (\delta y'_i) &= (\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \delta \widehat{s} \delta t, \delta \widehat{s} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} \delta \widehat{s} \delta t, \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \delta \widehat{s} \delta t) \end{cases}$$

et donc, le produit scalaire de $(\delta x'_i)$ et $(\delta y'_i)$ vaut

$$\begin{aligned} \delta x'_i \delta y'_i &= \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) \delta s \delta \widehat{s} \delta t + \text{termes d'ordre supérieur} \\ &= 2 d_{12} \delta s \delta \widehat{s} \delta t + \dots \end{aligned}$$

En effet,

$$2d_{12} = \frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1}.$$

Ce même produit scalaire vaut aussi (1.3) :

$$\begin{aligned} \delta x'_i \delta y'_i &= \delta s' \delta \widehat{s}' \cos \left(\frac{\pi}{2} - \delta \phi_{12}(t + \delta t) \right) \\ &= \delta s (1 + d_{11} \delta t) \delta \widehat{s} (1 + d_{22} \delta t) \sin \left(\delta \phi_{12}(t + \delta t) \right) + \dots \\ &= \delta s \delta \widehat{s} \delta \phi_{12}(t + \delta t) + \text{termes d'ordre supérieur} \end{aligned}$$

Comparant les deux expressions du produit scalaire, il vient $2d_{12} \delta t = \delta \phi_{12}(t + \delta t) + \dots$ et donc, la formule cherchée s’obtient par passage à la limite.

Démonstration 1.2 Invariance

a) Produit tensoriel

On a, pour un changement d'axes fixes l'un par rapport à l'autre,

$$\begin{cases} u'_i = a_{ij} u_j \\ v'_i = a_{ij} v_j . \end{cases}$$

Dès lors, en prenant garde aux indices muets, on trouve par multiplication membre à membre :

$$u'_i v'_i = a_{ik} u_k a_{jl} v_l = a_{ik} a_{jl} u_k v_l \quad (\text{formule cherchée}).$$

$$\begin{array}{ccc} T_{ij} & \xrightarrow{\text{trace}} & T_{ii} = T'_{ii} \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ T'_{ij} & \xrightarrow{\text{trace}} & T'_{ii} = u'_i v'_i \end{array} \quad \begin{array}{ccc} u_i, v_j & \xrightarrow{\text{produit tensoriel}} & T_{ij} = u_i v_j \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ u'_i, v'_j & \xrightarrow{\text{produit tensoriel}} & T'_{ij} = u'_i v'_j \end{array}$$

FIG. 1.4 – Invariance du produit tensoriel et de la trace

b) Contraction

On a $w'_{ij} = a_{ik} a_{jl} w_{kl}$ pour un changement d'axes fixes l'un par rapport à l'autre. Donc,

$$\begin{aligned} w'_{ii} &= a_{ik} a_{il} w_{kl} = \delta_{kl} w_{kl} \\ &= w_{kk} = w_{ii} \quad (\text{formule cherchée}). \end{aligned}$$

En effet, puisque $[a_{ij}]$ est orthogonale, $a_{ik} a_{il} = \delta_{kl}$.

c) Autres opérations

Même type de démonstration.

$$\begin{array}{ccc} s = s' & \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{gradient}} \frac{\partial s}{\partial x_i} \\ \xrightarrow{\text{gradient}} \frac{\partial s'}{\partial x'_i} \end{array} & \begin{array}{ccc} w_i & \xrightarrow{\text{gradient}} & \frac{\partial w_j}{\partial x_i} \\ \mathcal{A} \downarrow & & \downarrow \mathcal{A} \\ w'_i & \xrightarrow{\text{gradient}} & \frac{\partial w'_j}{\partial x'_i} \end{array} \end{array} \quad \begin{array}{c} \textcircled{\varepsilon_{ijk}} \mathcal{A} \\ \textcircled{\delta_{ij}} \mathcal{A} \end{array}$$

FIG. 1.5 – Invariance du gradient d'un scalaire et d'un vecteur - Tenseur identité et pseudo-tenseur de permutation (pour ε_{ijk} , $\det(\mathcal{A}) = +1$)

Démonstration 1.3 Caractère pseudo-tensoriel et propriétés de ϵ_{ijk}

a) Caractère pseudo-tensoriel de ϵ_{ijk}

On peut observer que ϵ_{ijk} est donné par le déterminant

$$\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix}$$

En effet, si deux indices, au moins, sont égaux, la matrice a deux lignes égales et son déterminant est nul. Par contre, si tous les indices sont différents deux à deux, la matrice est obtenue par permutation paire ou impaire des lignes de la matrice identité $[\delta_{ij}]$. Son déterminant vaut alors $+1$ ou -1 suivant les cas.

Ensuite, le tenseur dont les composantes sont ϵ_{ijk} dans le repère $(0', \underline{e}'_i)$, a pour composantes dans le repère $(0, \underline{e}_i)$:

$$\begin{aligned} a_{il} a_{jm} a_{kn} \epsilon_{lmn} &= a_{il} a_{jm} a_{kn} \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \\ a_{j1} & a_{j2} & a_{j3} \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} \end{vmatrix} \\ &= \epsilon_{ijk} \det(a_{lm}) \\ &= \epsilon_{ijk} (\text{lorsque } \det(a_{lm}) = 1). \end{aligned}$$

Le passage de la première ligne à la deuxième se fait par multiplication, avec sommation sur l , de la 1^{re} ligne de la matrice par a_{il} , puis de la 2^e ligne par a_{jm} et de la 3^e par a_{kn} .

Remarque : si deux indices sont égaux, le déterminant est nul ; si tous les indices sont différents, on doit regarder s'ils forment une permutation paire ou impaire de $(1, 2, 3)$.

En général, on se limitera, désormais, à des repères d'orientation directe. Dès lors, $\det(a_{lm}) = 1$ et ϵ_{ijk} conserve ses composantes lors du changement de base.

b) Relations

On observe que

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmn} &= \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{l1} & \delta_{l2} & \delta_{l3} \\ \delta_{m1} & \delta_{m2} & \delta_{m3} \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \delta_{n3} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \quad (\text{déterminant d'un produit}) \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\epsilon_{ijm} \epsilon_{klm} &= \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} & \delta_{jm} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} & \delta_{mm} \end{vmatrix} \\
&= \delta_{im} \begin{vmatrix} \delta_{jk} & \delta_{jl} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} \end{vmatrix} - \delta_{jm} \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{mk} & \delta_{ml} \end{vmatrix} + \underbrace{\delta_{mm}}_3 \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{jk} & \delta_{jl} \\ \delta_{ik} & \delta_{il} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= (-1 - 1 + 3) \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \delta_{ik} & \delta_{il} \\ \delta_{jk} & \delta_{jl} \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

c) Correspondance biunivoque entre un tenseur antisymétrique et un vecteur

Soit ω_{ij} antisymétrique et $\Omega_i = \frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{kj}$. Alors,

$$\begin{aligned}
-\epsilon_{ijk}\Omega_k &= -\epsilon_{ijk} \frac{1}{2} \epsilon_{klm} \omega_{ml} \\
&= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{lmk} \omega_{ml}
\end{aligned}$$

et

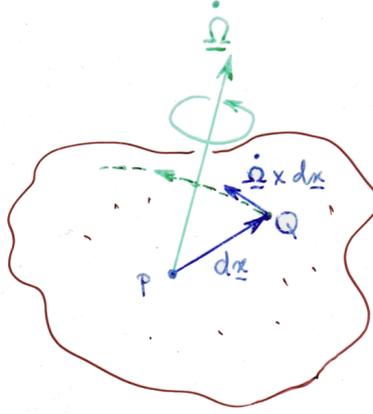
$$\begin{aligned}
-\epsilon_{ijk}\Omega_k &= -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} \end{vmatrix} \omega_{ml} \\
&= -\frac{1}{2} (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \omega_{ml} \\
&= -\frac{1}{2} (\omega_{ji} - \omega_{ij}) \\
&= \omega_{ij} \quad (\text{par antisymétrie de } \omega_{ij}).
\end{aligned}$$

Soit, réciproquement, un vecteur Ω_i et $\omega_{ij} = -\epsilon_{ijk}\Omega_k$. Alors,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}\omega_{kj} &= -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{kjl} \Omega_l \\
&= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{ljk} \Omega_l \\
&= \frac{1}{2} 2! |\delta_{il}| \Omega_l \\
&= \Omega_i
\end{aligned}$$

Démonstration 1.4 Interprétation des composantes du vecteur taux de rotation

On considère la représentation eulérienne du champ de vitesse, $v_i = v_i^{(e)}(x_j, t)$, pour les points P et Q de coordonnées (x_j) et $(x_j + \delta x_j)$.



Alors, par développement jusqu'au 1er ordre :

$$\begin{aligned} v_i^{(e)}(x_j + dx_j, t) &= v_i^{(e)}(x_j, t) + \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_j}(x_k, t) \delta x_j + \dots \\ &= v_i^{(e)}(x_j, t) + (d_{ij}^{(e)}(x_k, t) + \dot{\omega}_{ij}^{(e)}(x_k, t)) \delta x_j + \dots \\ &\quad (\text{vu la définition de } d_{ij} \text{ et } \dot{\omega}_{ij}^{(e)}) \end{aligned}$$

Donc, en abrégant les notations :

$$\begin{aligned} v_i(Q, t) - v_i(P, t) &= d_{ij}(P, t) \delta x_j + \dot{\omega}_{ij}(P, t) \delta x_j + \dots \\ &= d_{ij}(P, t) \delta x_j - \epsilon_{ijk} \dot{\Omega}_k(P, t) \delta x_j + \dots \\ &\quad (\text{le vecteur } \dot{\Omega}_i \text{ est associé au tenseur antisymétrique } \dot{\omega}_{ij}) \\ &= d_{ij}(P, t) \delta x_j + \epsilon_{ijk} \dot{\Omega}_j(P, t) \delta x_k + \dots \\ &\quad (\text{par permutation, puis échange de } j \text{ et } k) \end{aligned}$$

Finalement, en considérant un vecteur infinitésimal $d\underline{x}$,

$$\underline{v}(Q, t) - \underline{v}(P, t) = \underline{d}(P, t) \cdot d\underline{x} + \dot{\underline{\Omega}}(P, t) \times d\underline{x}$$

- Le terme $\underline{d}(P, t) \cdot d\underline{x}$ est dû à la vitesse de déformation de la matière voisine de P , par interprétation de d_{ij} .
- Le terme $\dot{\underline{\Omega}}(P, t) \times d\underline{x}$ traduit une rotation autour de l'axe passant par P et dont la direction est le vecteur unitaire $\frac{\dot{\underline{\Omega}}}{\|\dot{\underline{\Omega}}\|}$, cette rotation étant de vitesse angulaire $\|\dot{\underline{\Omega}}\|$.

Dès lors, $\dot{\underline{\Omega}}$ s'interprète bien comme une vitesse (ou un taux) de rotation local(e), qui se superpose à la vitesse de déformation locale.

Chapitre 2

Cinématique

Démonstration 2.1 Théorème du transport (Reynolds) - Cas scalaire

a) Premier Enoncé

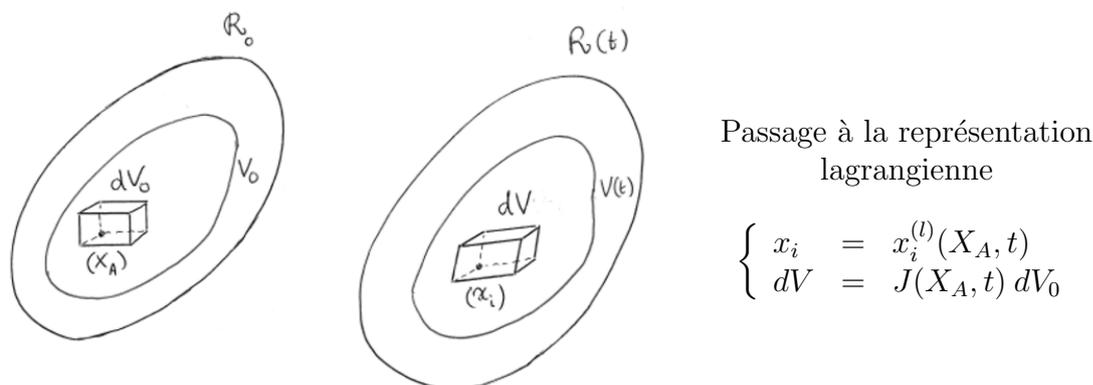


FIG. 2.1 – Théorème du transport – Reynolds

On passe en *représentation lagrangienne*, en se servant de la représentation lagrangienne du mouvement $x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{V(t)} f^{(e)}(x_i, t) dV \\ &= \int_{V_0} f^{(e)}(x_i^{(l)}(X_A, t), t) J dV_0 \end{aligned}$$

où $J = \det\left(\frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_A}\right)$ est le déterminant du gradient de déformation, c.-à-d. le jacobien de la transformation $x_i^{(l)}$ qui applique V_0 sur $V(t)$, avec évidemment pour les volumes élémentaires :

$$dV = J dV_0$$

Ainsi, en représentation lagrangienne, on a

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{V_0} f^{(l)}(X_A, t) J dV_0 \\ \text{et} \quad \frac{dI(t)}{dt} &= \int_{V_0} \left(\frac{\partial f^{(l)}}{\partial t} J + f^{(l)} \frac{\partial J}{\partial t} \right) dV_0, \end{aligned}$$

par dérivation sous le signe d'intégration, ce qui est licite puisque V_0 ne dépend pas de t . On calcule $\frac{\partial J}{\partial t}$, avec $J = \det(F_{iA})$. Pour cela, on note que

$$J = \det(F_{iA}) = \sum_A F_{iA} \cdot \text{cofacteur}(F_{iA}) \quad (\text{pour } i \text{ quelconque fixé})$$

On a utilisé ici le fait que le déterminant d'une matrice est la somme des produits des éléments d'une ligne quelconque par les cofacteurs correspondants.

Par conséquent, comme F_{iA} n'intervient que dans le terme $F_{iA} \cdot \text{cofacteur}(F_{iA})$ et, de plus, n'intervient pas dans $\text{cofacteur}(F_{iA})$,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial F_{iA}} &= \text{cofacteur}(F_{iA}) \\ &= J F_{Ai}^{-1} \quad (\text{formule de l'inverse d'une matrice}) \end{aligned}$$

Ensuite,

$$\frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial J}{\partial F_{iA}} \frac{\partial F_{iA}}{\partial t} = J F_{Ai}^{-1} \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial X_A}$$

parce que

$$\frac{\partial F_{iA}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_A} \right) = \frac{\partial}{\partial X_A} \left(\frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial t} \right) = \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial X_A}$$

De plus,

$$F_{Ai}^{-1} = \frac{\partial X_A^{(e)}}{\partial x_i} = \frac{\partial X_A}{\partial x_i},$$

en notant les relations réciproques de $x_i = x_i^{(l)}(X_A, t)$ sous la forme $X_A = X_A^{(e)}(x_i, t)$ ou $X_A = X_A(x_i, t)$.

Finalement,

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial t} &= J \frac{\partial v_i^{(l)}}{\partial X_A} \frac{\partial X_A^{(e)}}{\partial x_i} \\ &= J \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i} \end{aligned}$$

(en repassant en représentation eulérienne anticipativement)

En mettant tout ensemble, il vient

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{V_0} \left(\frac{\partial f^{(l)}}{\partial t} J + f^{(l)} J \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i} \right) dV_0.$$

On repasse partout en représentation eulérienne, en observant que $\frac{\partial f^{(l)}}{\partial t}$ est la dérivée matérielle de f , notée $\frac{Df}{Dt}$ dans toutes les représentations. Par conséquent :

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{V(t)} \left(\frac{Df^{(e)}}{Dt} + f^{(e)} \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i} \right) dV.$$

b) Second et troisième énoncés

En développant la formule précédente, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t} + v_i^{(e)} \frac{\partial f^{(e)}}{\partial x_i} + f^{(e)} \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \left(\frac{\partial f^{(e)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (f^{(e)} v_i^{(e)}) \right) dV \end{aligned}$$

et, en appliquant le théorème de Green,

$$\frac{dI(t)}{dt} = \int_{V(t)} \frac{\partial f^{(e)}}{\partial t} dV + \int_{\partial V(t)} f^{(e)} v_i^{(e)} n_i dS$$

c) Quatrième énoncé

Pour le démontrer, on se sert de la forme locale de la loi de conservation de la masse, qui elle-même se démontrera plus tard à l'aide du premier énoncé du théorème de transport :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0$$

Si

$$f^{(e)}(x_i, t) = \rho^{(e)}(x_i, t) g^{(e)}(x_i, t),$$

on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dI(t)}{dt} &= \int_{V(t)} \left(\frac{D(\rho^{(e)} g^{(e)})}{Dt} + \rho^{(e)} g^{(e)} \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \left(\cancel{\frac{D\rho^{(e)}}{Dt} g^{(e)}} + \rho^{(e)} \frac{Dg^{(e)}}{Dt} + \cancel{\rho^{(e)} g^{(e)} \frac{\partial v_i^{(e)}}{\partial x_i}} \right) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho^{(e)} \frac{Dg^{(e)}}{Dt} dV \end{aligned}$$

(simplification par conservation locale de la masse)

Chapitre 3

Dynamique

Démonstration 3.1 Les lois de conservation sont vérifiées dans tout repère inertiel si elles le sont dans l'un d'entre eux

On fait les démonstrations pour la conservation de la masse, de la quantité de mouvement et du moment de la quantité de mouvement. La méthode est la même pour la conservation de l'énergie.

– D'abord,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}' &= \int_{V(t)} \rho^{(e)}(x'_i, t) dV \\ &= \int_{V(t)} \rho^{(e)}(x_i, t) dV = \mathcal{M}\end{aligned}$$

En effet, $\rho^{(e)}(x'_i, t)$ et $\rho^{(e)}(x_i, t)$ sont égaux, car ρ est objectif puisque la masse spécifique en un point ne dépend pas du mouvement du repère.

Donc $\frac{d\mathcal{M}'}{dt}$ et $\frac{d\mathcal{M}}{dt}$ sont nuls en même temps.

– Ensuite,

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{P}}'(t) &= \int_{V(t)} \rho' \underline{v}' dV \quad (\text{notation concise}) \\ &= \int_{V(t)} \rho(\underline{v} - \underline{v}_0) dV \\ &= \underline{\mathcal{P}}(t) - \underline{v}_0 \mathcal{M}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{N}}'(t) &= \int_{V(t)} \rho' \underline{x}' \times \underline{v}' dV \\ &= \int_{V(t)} \rho(\underline{x} - \underline{OO}'(t)) \times (\underline{v} - \underline{v}_0) dV \\ &= \underline{\mathcal{N}}(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{P}}(t) - \left(\int_{V(t)} \rho \underline{x} dV \right) \times \underline{v}_0 \\ &\quad + \left(\int_{V(t)} \rho dV \right) \underline{OO}'(t) \times \underline{v}_0\end{aligned}$$

Dès lors, par définition de $\underline{x}_m(t)$,

$$\underline{\mathcal{N}}'(t) = \underline{\mathcal{N}}(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{P}}(t) - \mathcal{M} \underline{x}_m(t) \times \underline{v}_0 + \mathcal{M} \underline{OO}'(t) \times \underline{v}_0$$

- Par ailleurs, on calcule facilement les forces et leur moments en tenant compte du fait que les vecteur \underline{g} et $\underline{\tau}(\underline{n})$ ne dépendent pas du mouvement du repère :

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{F}}^{d'}(t) &= \int_{V(t)} \rho' \underline{g}' dV = \int_{V(t)} \rho \underline{g} dV = \underline{\mathcal{F}}^d(t) \\ \underline{\mathcal{F}}^{c'}(t) &= \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}'(\underline{n}) dS = \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}(\underline{n}) dS = \underline{\mathcal{F}}^c(t) \\ \underline{\mathcal{M}}^{d'}(t) &= \int_{V(t)} \underline{x}' \times \rho' \underline{g}' dV = \int_{V(t)} (\underline{x} - \underline{OO}'(t)) \times \rho \underline{g} dV \\ &= \underline{\mathcal{M}}^d(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^d(t) \\ \underline{\mathcal{M}}^{c'}(t) &= \int_{\partial V(t)} \underline{x}' \times \underline{\tau}'(\underline{n}) dS = \int_{\partial V(t)} (\underline{x} - \underline{OO}'(t)) \times \underline{\tau}(\underline{n}) dS \\ &= \underline{\mathcal{M}}^c(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^c(t)\end{aligned}$$

- Mettant tout cela ensemble et tenant compte de l'hypothèse de repères inertiels et de ce que $\frac{d\underline{OO}'(t)}{dt} = \underline{v}_0$, il vient :

$$\frac{d\underline{\mathcal{P}}'(t)}{dt} = \frac{d\underline{\mathcal{P}}(t)}{dt} = \underline{\mathcal{F}}^d(t) + \underline{\mathcal{F}}^c(t) = \underline{\mathcal{F}}^{d'}(t) + \underline{\mathcal{F}}^{c'}(t)$$

et, de même,

$$\frac{d\underline{\mathcal{N}}'(t)}{dt} = \frac{d\underline{\mathcal{N}}(t)}{dt} - \underline{v}_0 \times \underline{\mathcal{P}}(t) - \underline{OO}'(t) \times \frac{d\underline{\mathcal{P}}(t)}{dt} - \mathcal{M} \frac{d\underline{x}_m(t)}{dt} \times \underline{v}_0 + \cancel{\mathcal{M} \underline{v}_0 \times \underline{v}_0}$$

Mais

$$\begin{aligned}\mathcal{M} \frac{d\underline{x}_m(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{x} dV \\ &= \int_{V(t)} \rho \frac{D\underline{x}}{Dt} dV \quad (\text{théorème du transport, variante 4.}) \\ &= \underline{\mathcal{P}}(t) \quad (\text{car } \frac{D\underline{x}}{Dt} = \underline{v}).\end{aligned}$$

Donc, finalement :

$$\begin{aligned}\frac{d\underline{\mathcal{N}}'(t)}{dt} &= \underline{\mathcal{M}}^d(t) + \underline{\mathcal{M}}^c(t) - \cancel{\underline{v}_0 \times \underline{\mathcal{P}}(t)} - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^d(t) - \underline{OO}'(t) \times \underline{\mathcal{F}}^c(t) \\ &\quad - \cancel{\underline{\mathcal{P}}(t) \times \underline{v}_0} \\ &= \underline{\mathcal{M}}^{d'}(t) + \underline{\mathcal{M}}^{c'}(t)\end{aligned}$$

Démonstration 3.2 Formes locales des lois de conservation

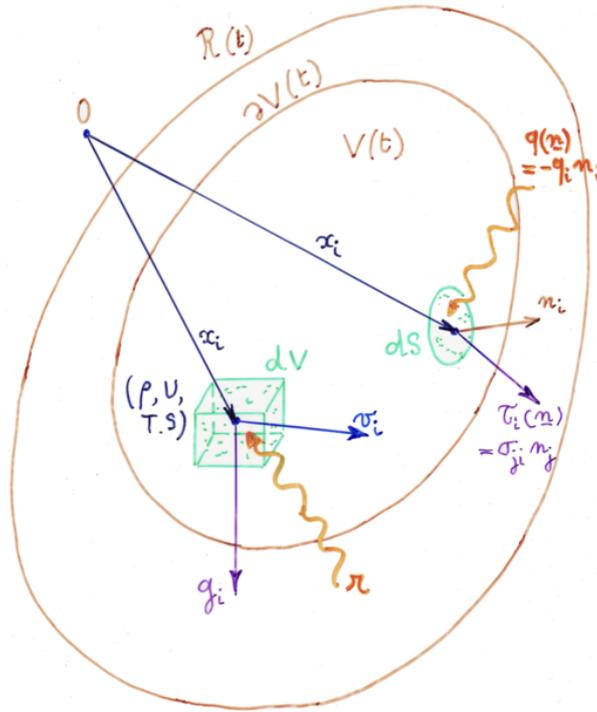


FIG. 3.1 – Formes locales des lois de conservation : mise en évidence des effets exercés dans un volume matériel et à sa frontière.

a) Conservation de la masse

(a) Par hypothèse, on suppose que, pour tout volume matériel $V(t)$, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0.$$

Par le théorème de transport de Reynolds (variante 1, seule démontrée à ce stade), il vient :

$$\forall V(t), \int_{V(t)} \left(\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} \right) dV = 0.$$

Cette intégrale est nulle pour tout volume d'intégration. Si l'intégrand est continu (ou même seulement continu par morceaux, mais borné), il doit être nul partout (ou du moins en tout point de continuité).

Par conséquent :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0, \quad \forall(\underline{x}, t).$$

(b) Réciproquement, si

$$\forall(\underline{x}, t), \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \underline{v} = 0,$$

on peut remonter jusqu'à la conservation de la masse globale en appliquant le théorème de Reynolds à l'envers.

- (c) La variante 4 du théorème de Reynolds est alors établie à partir de la variante 1, en posant $\underline{f} = \rho \underline{g}$ et en développant.

b) Conservation de la quantité de mouvement

- (a) Par hypothèse, pour tout volume matériel $V(t)$, dans un certain (et donc pour tout) repère inertiel, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \rho \underline{g} dV + \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}(\underline{n}) dS.$$

Appliquant la variante 4 du théorème de transport de Reynolds, on trouve :

$$\forall V(t), \int_{V(t)} \rho \left(\frac{D\underline{v}}{Dt} - \underline{g} \right) dV = \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}(\underline{n}) dS. \quad (3.1)$$

- (b) Mise en évidence de $\underline{\sigma}$.

On prend un volume matériel particulier (fig 3.2). Celui-ci est, au temps t précis, un tétraèdre rectangle

- de base ΔS , dont la normale sortante est \underline{n} ;
- de hauteur Δh et donc de volume $\Delta V = \frac{1}{3} \Delta h \Delta S$;
- de sommet P situé au point (x_i) précis;
- de faces latérales $\Delta S_i = n_i \Delta S$, de normales sortantes $(-\underline{e}_i)$.

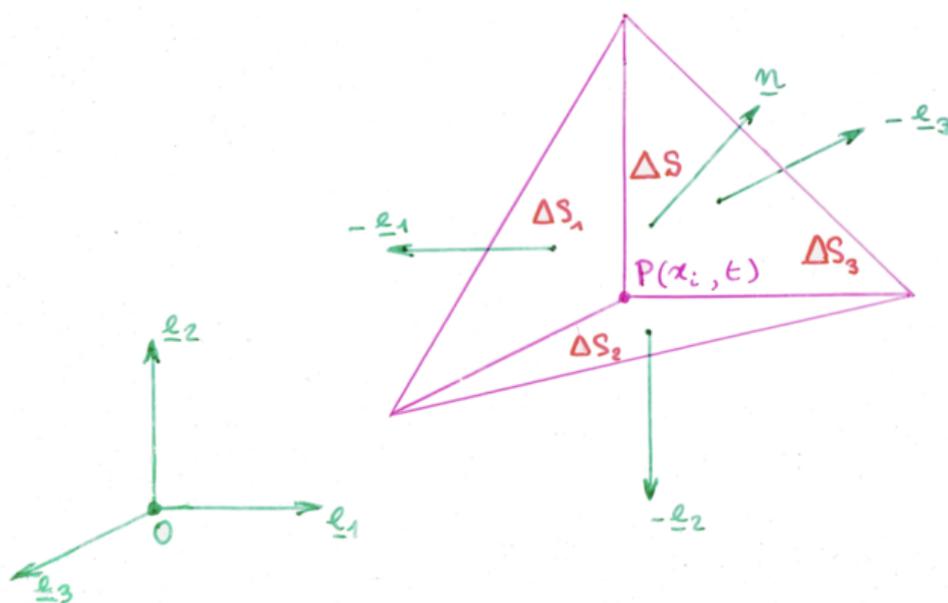


FIG. 3.2 – Formes locales des lois de conservation :

établissement des relations : $\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$ et $q(\underline{n}) = -q_i n_i$.

Il est clair qu'aux autres instants, ce même volume matériel peut avoir bougé et ne plus être un tétraèdre rectangle.

La conservation de la quantité de mouvement de ce volume matériel au temps t précis s'écrit par (3.1) :

$$\int_{V(t)} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - \underline{g} \right) dV = \int_{\Delta S} \underline{\tau}(\underline{n}) dS + \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta S_i} \underline{\tau}(-\underline{e}_i) dS.$$

Par composantes, on trouve en notation indicée :

$$\int_{V(t)} \rho \left(\frac{Dv_i}{Dt} - g_i \right) dV = \int_{\Delta S} \tau_i(\underline{n}) dS + \sum_{j=1}^3 \int_{\Delta S_j} \tau_i(-\underline{e}_j) dS.$$

On applique le théorème de la moyenne sur ΔV , sur ΔS et sur chacun des ΔS_j . Les intégrands sont continus par hypothèse. Chaque intégrale est alors égale à une valeur moyenne de l'intégrand sur son domaine d'intégration, multipliée par le volume ou l'aire d'intégration (cette valeur moyenne étant obtenue en prenant l'intégrand en un certain point de ce domaine).

Par conséquent, en désignant les moyennes par une $\bar{\quad}$,

$$\bar{\rho} \left(\frac{D\bar{v}_i}{Dt} - \bar{g}_i \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \Delta h \Delta S \right) = \bar{\tau}_i(\underline{n}) \Delta S + \bar{\tau}_i(-\underline{e}_j) \cdot (n_j \Delta S) \quad (j \text{ muet}).$$

Simplifiant par $\Delta S \neq 0$ et utilisant le principe de l'action et de la réaction ($\tau_i(-\underline{e}_j) = -\tau_i(\underline{e}_j)$), il vient :

$$\bar{\rho} \left(\frac{D\bar{v}_i}{Dt} - \bar{g}_i \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \Delta h \right) = \bar{\tau}_i(\underline{n}) - \bar{\tau}_i(\underline{e}_j) n_j.$$

Cette relation est vraie pour tout volume matériel du type choisi. On peut donc faire tendre la hauteur Δh vers 0. Les moyennes tendent alors toutes vers les valeurs des champs en (x_i, t) précis.

A la limite, il vient donc

$$0 = \tau_i^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) - \tau_i^{(e)}(x_k, t, \underline{e}_j) n_j.$$

Rappelant la définition de $\sigma_{ij} = \tau_j^{(e)}(x_k, t, \underline{e}_i)$, on a donc

$$\tau_i^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) = \sigma_{ji}^{(e)}(x_k, t) n_j.$$

Pour rappel : σ_{ij} est la composante selon \underline{e}_j de la densité de force de contact exercée sur une facette de normale sortante \underline{e}_i

- (c) On repart alors de l'équation (3.1) pour un volume matériel quelconque, tenant compte de ce que $\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$. Par composante, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{Dv_i}{Dt} - g_i \right) dV &= \int_{\partial V(t)} \sigma_{ji} n_j dS \\ &= \int_{V(t)} \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV \\ &\quad (\text{par application du théorème de Green}). \end{aligned}$$

Regroupant les intégrales, on a donc

$$\forall V(t), \forall \text{ repère inertiel }, \int_{V(t)} \rho \left(\left(\frac{Dv_i}{Dt} - g_i \right) - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) dV = 0$$

et l'intégrand est donc nul en tout point de continuité.

- (d) Réciproquement, il suffit d'appliquer les théorèmes de Reynolds et de Green à l'envers, en tenant compte de la conservation de la masse, pour remonter jusqu'à la conservation globale de la quantité de mouvement.

c) Conservation du moment de la quantité de mouvement

- (a) Par hypothèse, pour tout volume matériel $V(t)$, dans un certain (et donc pour tout) repère inertiel, on a :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \underline{x} \times \rho \underline{v} dV = \int_{V(t)} \underline{x} \times \rho \underline{g} dV + \int_{\partial V(t)} \underline{x} \times \underline{\tau}(\underline{n}) dS$$

soit

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} x_j \rho v_k dV = \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} x_j \rho g_k dV + \int_{\partial V(t)} \epsilon_{ijk} x_j \tau_k(\underline{n}) dS.$$

On sait par conservation de la quantité de mouvement que $\tau_k(\underline{n}) = \sigma_{lk} n_l$. On applique les théorèmes de Reynolds et de Green en tenant compte de ce que ϵ_{ijk} est constant, ce qui donne :

$$\int_{V(t)} \rho \epsilon_{ijk} \left(\frac{D}{Dt} (x_j v_k) - x_j g_k \right) dV = \int_{V(t)} \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (x_j \sigma_{lk}) dV$$

ou encore, en regroupant les intégrales et en tenant compte de ce que $\frac{Dx_j}{Dt} = v_j$ et $\frac{\partial x_j}{\partial x_l} = \delta_{jl}$,

$$\int_{V(t)} \left[\rho \epsilon_{ijk} (v_j v_k + x_j \frac{Dv_k}{Dt} - x_j g_k) - \epsilon_{ijk} (\delta_{jl} \sigma_{lk} + x_j \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l}) \right] dV = 0.$$

Cependant,

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} v_j v_k &= (\underline{v} \times \underline{v})_i = 0 \\ \text{et } \epsilon_{ijk} x_j \left(\rho \frac{Dv_k}{Dt} - \rho g_k - \frac{\partial \sigma_{lk}}{\partial x_l} \right) &= 0 \end{aligned}$$

(conservation locale de la quantité de mouvement).

Il reste alors : $\forall V(t), \forall \text{ repère inertiel },$

$$\int_{V(t)} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} dV = 0$$

et l'intégrand est donc nul en tout point de continuité :

$$\forall (\underline{x}, t), \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} = 0$$

ou, en développant,

$$\forall (\underline{x}, t), \sigma_{ji} = \sigma_{ij}.$$

- (b) Réciproquement, il suffit d'appliquer les théorèmes de Reynolds et de Green à l'envers en tenant compte de la conservation de la masse et de la quantité de mouvement pour remonter jusqu'à la conservation globale du moment de la quantité de mouvement.

d) Forme locale de la loi de conservation de l'énergie

(a) Développement préliminaire.

Par hypothèse,

- $\forall V(t)$ (volume matériel)
- dans un certain (et donc pour tout) repère inertiel,

$$\frac{d\mathcal{K}(t)}{dt} + \frac{d\mathcal{U}(t)}{dt} = P^d(t) + P^c(t) + Q^d(t) + Q^c(t),$$

ou encore :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \left(\frac{\underline{v} \cdot \underline{v}}{2} + U \right) dV = \int_{V(t)} \rho \underline{g} \cdot \underline{v} dV + \int_{\partial V(t)} \underline{\tau}(\underline{n}) \cdot \underline{v} dS + \int_{V(t)} r dV + \int_{\partial V(t)} q(\underline{n}) dS,$$

soit, en appliquant le théorème de Reynolds, en tenant compte de ce que $\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji}n_j$ et en appliquant le théorème de Green :

$$\int_{V(t)} \rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} + U \right) dV = \int_{V(t)} \left(\rho g_i v_i + \frac{\partial}{\partial x_j} (\sigma_{ji} v_i) + r \right) dV + \int_{\partial V(t)} q(\underline{n}) dS$$

ou encore, en regroupant les intégrales :

$$\int_{V(t)} \left(\rho \left(v_i \frac{Dv_i}{Dt} + \frac{DU}{Dt} - g_i v_i \right) - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i - \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} - r \right) dV = \int_{\partial V(t)} q(\underline{n}) dS.$$

D'une part, on a, par conservation locale de la quantité de mouvement,

$$\rho v_i \left(\frac{Dv_i}{Dt} - g_i \right) - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} v_i = 0$$

D'autre part, par conservation du moment de la quantité de mouvement,

$$\begin{aligned} \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= \sigma_{ij} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} && (\sigma_{ji} = \sigma_{ij}) \\ &= \sigma_{ij} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} && (\text{échange de } i \text{ et } j \text{ à gauche}) \\ &= \sigma_{ij} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) && (\text{moyenne des 2 lignes}) \\ &= \sigma_{ij} d_{ij} \end{aligned}$$

Ainsi, on trouve $\forall V(t)$:

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma_{ij} d_{ij} - r \right) dV = \int_{\partial V(t)} q(\underline{n}) dS \quad (3.2)$$

(b) Première étape : mise en évidence de \underline{q} .

On prend un volume matériel particulier (3.2) comme pour la conservation de la quantité de mouvement (tétraèdre rectangle qui, au temps t , a pour sommet x_i , pour

base ΔS de normale \underline{n} , et pour hauteur Δh).

La conservation de l'énergie de ce volume matériel au temps t s'écrit, par (3.2) :

$$\int_{\Delta V} \left(\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma_{ij} d_{ij} - r \right) dV = \int_{\Delta S} q(\underline{n}) dS + \sum_{i=1}^3 \int_{\Delta S_i} q(-\underline{e}_i) dS$$

On applique de nouveau le théorème de la moyenne :

$$\left(\overline{\rho \frac{DU}{Dt}} - \overline{\sigma_{ij} d_{ij}} - r \right) \cdot \left(\frac{1}{3} \Delta h \Delta S \right) = \bar{q}(\underline{n}) \Delta S + \bar{q}(-\underline{e}_i) \cdot n_i \Delta S \quad (i \text{ muet})$$

Passant à la limite $\Delta h \rightarrow 0$ après simplification par ΔS , il vient, en tenant compte de ce que $q(-\underline{e}_i) = -q(\underline{e}_i)$:

$$0 = q^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) - q^{(e)}(x_k, t, \underline{e}_i) n_i.$$

Rappelant la définition de $q_i = -q^{(e)}(x_k, t, \underline{e}_i)$, on a donc $q^{(e)}(x_k, t, \underline{n}) = -q_i^{(e)}(x_k, t) n_i$.

(c) Deuxième étape : pour un volume matériel quelconque.

On repart alors de (3.2) pour un volume matériel quelconque, en tenant compte de ce que $q(\underline{n}) = -q_i n_i$, ce qui donne :

$$\begin{aligned} \int_{V(t)} \left(\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma_{ij} d_{ij} - r \right) dV &= - \int_{\partial V(t)} q_i n_i dS \\ &= - \int_{V(t)} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} dV \quad (\text{Théorème de Green}) \end{aligned}$$

Regroupant les intégrales, on a donc $\forall V(t)$, \forall repère inertiel,

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma_{ij} d_{ij} - r + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} \right) dV = 0$$

et l'intégrand est nul en tout point de continuité.

(d) Développement inverse.

Réciproquement, il suffit d'appliquer Reynolds et Green à l'envers en tenant compte de toutes les autres lois de conservation locales pour remonter jusqu'à la conservation globale de l'énergie.

Démonstration 3.3 Théorème de l'énergie cinétique

On part, dans un repère inertiel, de la forme locale de la conservation de la quantité de mouvement multipliée par v_i :

$$v_i \left(\rho \frac{Dv_i}{Dt} - \rho g_i - \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} \right) = 0$$

ou

$$\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) - \rho v_i g_i - \frac{\partial (\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = 0$$

On intègre sur un volume matériel $V(t)$ quelconque en rappelant que $\sigma_{ji} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = \sigma_{ij} d_{ij}$:

$$\int_{V(t)} \left(\rho \frac{D}{Dt} \left(\frac{v_i v_i}{2} \right) - \rho g_i v_i - \frac{\partial (\sigma_{ji} v_i)}{\partial x_j} + \sigma_{ji} d_{ij} \right) dV = 0$$

On applique à l'envers le théorème de Reynolds au premier terme et le théorème de Green au troisième terme :

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \frac{v_i v_i}{2} dV - \int_{V(t)} \rho g_i v_i dV - \int_{\partial V(t)} \sigma_{ji} v_i n_j dS + \int_{V(t)} \sigma_{ij} d_{ij} dV = 0$$

L'égalité est vérifiée $\forall V(t)$ dans un repère inertiel quelconque et il ne reste qu'à tenir compte de ce que $\tau_i(\underline{n}) = \sigma_{ji} n_j$.

Démonstration 3.4 Thermodynamique des milieux continus - Forme locale

* Par hypothèse, $\forall V(t)$ (volume matériel),

$$\frac{d\mathcal{S}(t)}{dt} \geq \mathcal{R}^d(t) + \mathcal{R}^c(t)$$

ou

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho S dV \geq \int_{V(t)} \frac{r}{T} dV + \int_{\partial V(t)} \frac{q(\underline{n})}{T} dS$$

* La première expression de la forme locale s'obtient en appliquant Reynolds et Green à la forme globale :

$$\forall V(t), \int_{V(t)} \rho \frac{DS}{Dt} dV \geq \int_{V(t)} \frac{r}{T} dV - \int_{V(t)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) dV$$

En regroupant les intégrales, on trouve en tout point de continuité :

$$\rho \frac{DS}{Dt} - \frac{r}{T} + \frac{1}{T} \frac{\partial q_i}{\partial x_i} - \frac{1}{T^2} q_i \frac{\partial T}{\partial x_i} \geq 0.$$

* L'inégalité de *Clausius-Duhem* s'obtient en multipliant l'inégalité précédente par $T > 0$ et en retranchant du résultat la loi locale de conservation de l'énergie

$$\rho \frac{DU}{Dt} - \sigma_{ij} d_{ij} - r + \frac{\partial q_i}{\partial x_i} = 0,$$

ce qui donne une inégalité de même sens.

Démonstration 3.5 Petits déplacements : propriétés

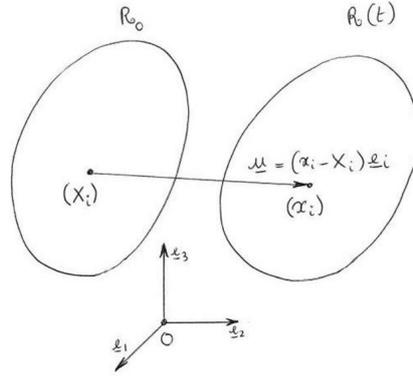


FIG. 3.3 – Vecteur déplacement

a) Représentations lagrangienne et eulérienne des champs confondus

On a toujours

$$s^{(l)}(X_j, t) = s^{(e)}(x_i^{(l)}(X_j, t), t). \quad (1)$$

(passage de la représentation eulérienne à la représentation lagrangienne)

La relation,

$$x_i = x_i^{(l)}(X_j, t) = X_i + u_i^{(l)}(X_j, t), \quad (2)$$

montre que,

$$s^{(l)}(X_j, t) = s^{(e)}(X_i + u_i^{(l)}(X_j, t), t) = s^{(e)}(X_i, t) + \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i}(X_j, t) u_i^{(l)}(X_j, t) + \dots$$

(développement au premier ordre en ϵ)

Comme $u_i^{(l)}(X_j, t) = O(\epsilon)$ avec $\epsilon \ll 1$, il ne reste que $s^{(l)}(X_i, t) \cong s^{(e)}(X_i, t)$. On peut donc remplacer les x_i par les X_i sans faire d'erreur dans la représentation des champs.

b) Dérivées partielles indifféremment faites par rapport aux coordonnées lagrangiennes ou eulériennes

On a

$$\frac{\partial s^{(l)}}{\partial X_i}(X_k, t) = \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_j}(x_l, t) \frac{\partial x_j^{(l)}}{\partial X_i}(X_k, t).$$

par dérivation de (1) (fonction composée), en notant $x_l = x_l^{(l)}(X_k, t)$.

Par dérivation de (2), on trouve

$$\frac{\partial x_j^{(l)}}{\partial X_i}(X_k, t) = \frac{\partial X_j}{\partial X_i} + \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial X_i}(X_k, t) = \delta_{ij} + O(\epsilon) \quad (\epsilon \ll 1).$$

On a donc

$$\frac{\partial s^{(l)}}{\partial X_i}(X_k, t) = \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_j}(x_l, t)\delta_{ij} + \dots \cong \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i}(x_l, t).$$

On peut ensuite remplacer X_k par x_k et vice-versa.

Ceci montre que les dérivées partielles en représentation eulérienne et lagrangienne sont les mêmes.

c) Calcul des dérivées matérielles par dérivation partielle temporelle

On a

$$\frac{Ds^{(e)}}{Dt}(x_j, t) = \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t}(x_j, t) + v_i \frac{\partial s^{(e)}}{\partial x_i}(x_j, t).$$

avec $v_i = v_i^{(e)} = \frac{Dx_i}{Dt}$ (la vitesse est la dérivée matérielle de la position).

On passe provisoirement en représentation lagrangienne :

$$v_i = \frac{D}{Dt}(X_i + u_i^{(l)}(X_j, t)) = \frac{\partial}{\partial t}(X_i + u_i^{(l)}(X_j, t)) = \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial t}(X_j, t) = O(\epsilon) \quad (\epsilon \ll 1).$$

Au premier ordre près, on a donc

$$\frac{Ds^{(e)}}{Dt}(X_j, t) = \frac{\partial s^{(e)}}{\partial t}(x_j, t).$$

Les dérivées matérielles et partielles sont donc confondues lorsqu'on est en petits déplacements.

Démonstration 3.6 Déformations et rotations infinitésimales : interprétation

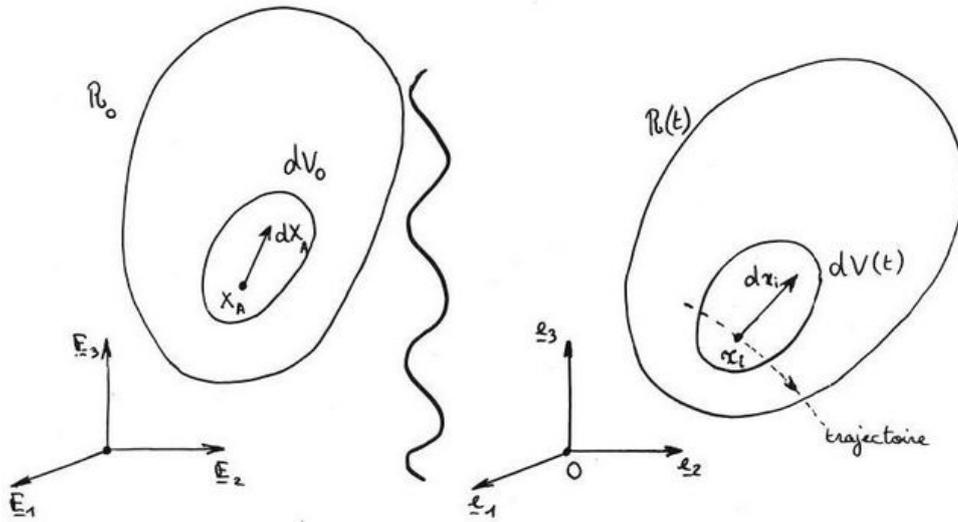


FIG. 3.4 – Interprétation du tenseur des gradients de déformation

a) Introduction des tenseurs de déformations de Lagrange et d'Euler

Avant de faire la démonstration, il faut introduire les tenseurs de déformations de Lagrange et d'Euler.

Pour clarifier les choses, on repasse d'abord en grandes déformations (on ne parle donc plus de petits déplacements).

En toute généralité, on a

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^{(l)}(X_A, t) \\ dx_i &= F_{iA}^{(l)}(X_B, t) dX_A \end{aligned}$$

où $F_{iA}^{(l)}(X_B, t) = \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_A}$ est le gradient de déformation, qui comprend à la fois déformation et rotation. On voudrait en fait en extraire la déformation seulement.

On voit qu'on peut obtenir seulement la déformation de deux manières différentes : soit en effectuant la différence des carrés des longueurs finales et initiales de dx_i et dX_A , soit en effectuant la différence des produits scalaires entre dx_i et dy_i , d'une part, et dX_A et dY_A , d'autre part :

$$\begin{aligned} dx_i dx_i - dX_A dX_A &= ds(t)^2 - dS^2 \quad (\neq \text{ce des carrés des longueurs}) \\ &= F_{iA} dX_A F_{iB} dX_B - \delta_{AB} dX_A dX_B \\ &= (F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB}) dX_A dX_B \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} dx_i dy_i - dX_A dY_A &= F_{iA} dX_A F_{iB} dY_B - \delta_{AB} dX_A dY_B \quad (\neq \text{ce des produits scalaires}) \\ &= (F_{iA} F_{iB} - \delta_{AB}) dX_A dY_B \end{aligned} \tag{3.3}$$

En fait, le premier développement est un cas particulier du second.

On définit alors le tenseur des déformations de Lagrange :

$$2E_{AB} = F_{iA}F_{iB} - \delta_{AB}$$

On peut développer l'équation (3.3) d'une autre manière :

$$\begin{aligned} dx_i dy_i - dX_A dY_A &= \delta_{ij} dx_i dy_j - F_{Ai}^{-1} dx_i F_{Aj}^{-1} dy_j \\ &= (\delta_{ij} - F_{Ai}^{-1} F_{Aj}^{-1}) dx_i dy_j \end{aligned}$$

On définit ainsi le tenseur des déformations d'Euler :

$$2e_{ij} = \delta_{ij} - F_{Ai}^{-1} F_{Aj}^{-1}$$

On a donc

$$\begin{aligned} dx_i dy_i - dX_A dY_A &= 2 E_{AB} dX_A dY_B \\ &= 2 e_{ij} dx_i dy_j \end{aligned}$$

Les tenseurs de déformations de Lagrange et d'Euler sont un moyen de mesurer la déformation avec précision quand on est en grandes déformations. On va appliquer ces notions au cas limite des petits déplacements.

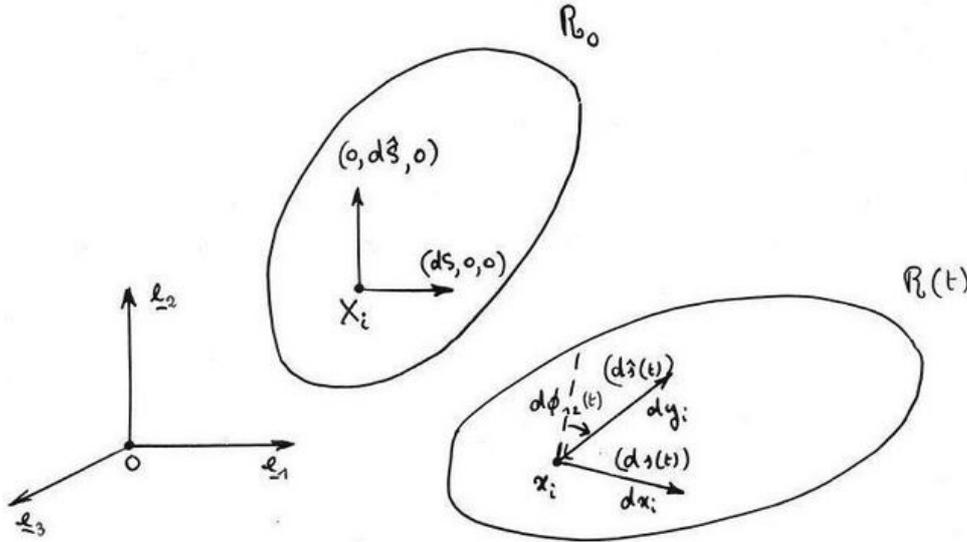


FIG. 3.5 – Interprétation des composantes du tenseur des déformations infinitésimales

b) Interprétation des composantes diagonales de ϵ_{ij}

On définit d'abord (3.5) un vecteur matériel élémentaire qui, dans R_0 , est parallèle à \underline{e}_1 .

Ce vecteur matériel est $(dX_i) = (dS, 0, 0)$ dans R_0 et (dx_i) , de longueur $ds(t)$ dans $R(t)$. La variation du carré de longueur de ce vecteur élémentaire depuis R_0 jusque $R(t)$ est obtenue en utilisant le tenseur des déformations de Lagrange :

$$(ds(t))^2 - dS^2 = 2E_{ij} dX_i dX_j = 2E_{11} dS^2 \quad (dX_2 = dX_3 = 0).$$

Mais, par définition,

$$\begin{aligned}
2E_{11} &= F_{i1}F_{i1} - \delta_{11} = \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_1} \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_1} - 1 \\
&= \frac{\partial}{\partial X_1} (X_i + u_i^{(l)}) \frac{\partial}{\partial X_1} (X_i + u_i^{(l)}) - 1 \\
&= \left(\delta_{i1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \right) \left(\delta_{i1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \right) - 1 \\
&= \delta_{11} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \delta_{i1} + \delta_{i1} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} - 1 \\
&= \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \\
&= 2\epsilon_{11} + O(\epsilon^2) \quad (\epsilon \ll 1).
\end{aligned}$$

On rappelle la définition du tenseur des déformations infinitésimales :

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_j} + \frac{\partial u_j^{(l)}}{\partial X_i} \right),$$

et ainsi $\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial X_1}$.

Donc,

$$(ds(t))^2 - dS^2 = 2\epsilon_{11}dS^2 + O(\epsilon^2),$$

et

$$(ds(t))^2 = (1 + 2\epsilon_{11})dS^2 + O(\epsilon^2)$$

et donc :

$$ds(t) = (1 + \epsilon_{11})dS + O(\epsilon^2).$$

En effet, le terme $(\epsilon_{11})^2$ est négligeable et donc

$$(1 + \epsilon_{11})^2 = 1 + 2\epsilon_{11} + O(\epsilon^2).$$

On tire facilement ϵ_{11} de la relation précédente :

$$\epsilon_{11} = \frac{ds(t) - dS}{dS}$$

Dans le repère considéré, une composante diagonale de ϵ_{ij} , soit ϵ_{11} , est l'allongement relatif d'un segment élémentaire de matière qui, dans R_0 , est parallèle à \underline{e}_1 .

c) Interprétation des composantes non diagonales de ϵ_{ij}

On définit ensuite (3.5) un second vecteur matériel élémentaire, qui dans R_0 est parallèle à \underline{e}_2 .

Ce vecteur matériel est $(dY_i) = (0, d\hat{S}, 0)$ dans R_0 et (dy_i) , de longueur $d\hat{s}(t)$ dans $R(t)$. La variation du produit scalaire du premier et du second vecteur élémentaire ainsi définis depuis R_0 jusque $R(t)$ est obtenue en utilisant le tenseur des déformations de Lagrange :

$$\begin{aligned}
dx_i dy_i - 0 &= 2E_{ij} dX_i dY_j \\
&= 2E_{12} dS d\hat{S}.
\end{aligned}$$

Par définition,

$$\begin{aligned}
2E_{12} &= F_{i1}F_{i2} - \delta_{12} \\
&= \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_1} \frac{\partial x_i^{(l)}}{\partial X_2} - 0 \\
&= \frac{\partial}{\partial X_1}(X_i + u_i^{(l)}) \cdot \frac{\partial}{\partial X_2}(X_i + u_i^{(l)}) \\
&= (\delta_{i1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1})(\delta_{i2} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_2}) \\
&= \delta_{12} + \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial X_1} + \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_1} \frac{\partial u_i^{(l)}}{\partial X_2} \\
&= 2\epsilon_{12} + O(\epsilon^2) \quad \text{car } 2\epsilon_{12} = \frac{\partial u_1^{(l)}}{\partial X_2} + \frac{\partial u_2^{(l)}}{\partial X_1}.
\end{aligned}$$

Donc,

$$dx_i dy_i = 2\epsilon_{12} dS d\hat{S} + O(\epsilon^2) \quad (\epsilon \ll 1).$$

Mais, d'autre part, ce produit scalaire vaut :

$$\begin{aligned}
dx_i dy_i &= ds(t)d\hat{s}(t) \cos(\pi/2 - d\phi_{12}(t)) \quad (3.5) \\
&= ds(t)d\hat{s}(t) \sin(d\phi_{12}(t)) \\
&= dS(1 + \epsilon_{11}) \cdot d\hat{S}(1 + \epsilon_{22}) \cdot d\phi_{12}(t) + O(\epsilon^2) \\
&= dS \cdot d\hat{S} \cdot d\phi_{12}(t) + O(\epsilon^2).
\end{aligned}$$

On tire immédiatement ϵ_{12} des deux expressions de $dx_i dy_i$:

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2}d\phi_{12}(t)$$

Dans le repère considéré, une composante non diagonale de ϵ_{ij} , soit ϵ_{12} , est la moitié du rapprochement angulaire de deux segments élémentaires de matière qui, dans R_0 , sont parallèles l'un à \underline{e}_1 et l'autre à \underline{e}_2 .

Démonstration 3.7 Petits déplacements : Formes locales des lois de conservation - Inégalité de Clausius Duhem

a) Conservation de la masse

Comme $\frac{\partial u_i}{\partial t} \cong v_i$, on a aussi $\frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t} \cong d_{ij}$.

L'équation locale de conservation de la masse à prouver s'écrit :

$$\rho_0 = \frac{\rho}{1 - \epsilon_{mm}} = \rho(1 + \epsilon_{mm}) + O(\epsilon^2) \quad (\epsilon \ll 1)$$

Elle est bien satisfaite dans R_0 , puisque $\epsilon_{mm} = 0$ et $\rho = \rho_0$.

De plus, la dérivée par rapport à t de cette équation est aussi satisfaite, puisqu'elle s'écrit

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial t}(1 + \epsilon_{mm}) + \rho \frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial t}$$

Cette dernière relation se justifie par le fait que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} &\cong \frac{D\rho}{Dt} \\ \frac{\partial \epsilon_{mm}}{\partial t} &\cong d_{mm} = \frac{\partial v_m}{\partial x_m} \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} \epsilon_{mm} &\cong \frac{D\rho}{Dt} \epsilon_{mm} \\ &\cong -\rho d_{nn} \epsilon_{mm} \\ &\cong -\rho \frac{\partial \epsilon_{nn}}{\partial t} \epsilon_{mm} = O(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Finalement, on trouve bien :

$$0 = \frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial v_m}{\partial x_m} + O(\epsilon^2) \quad (\text{satisfaite par conservation locale de la masse}).$$

b) Conservation de la quantité de mouvement

Il suffit de noter les approximations

$$\begin{aligned} \rho \frac{Dv_i}{Dt} &\cong \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) \frac{\partial v_i}{\partial t} \\ &\cong \rho_0 \frac{\partial v_i}{\partial t} \quad (\text{car } \epsilon_{mm} \frac{\partial v_i}{\partial t} = O(\epsilon^2)) \\ &\cong \rho_0 \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \quad (\text{car } v_i \cong \frac{\partial u_i}{\partial t}) \\ \rho g_i &\cong \rho_0 g_i. \end{aligned}$$

c) Conservation de l'énergie

On a les approximations

$$\begin{aligned}\rho \frac{DU}{Dt} &\cong \rho_0(1 - \epsilon_{mm}) \frac{\partial U}{\partial t} \\ &\cong \rho_0 \frac{\partial U}{\partial t} \\ d_{ij} &\cong \frac{\partial \epsilon_{ij}}{\partial t}.\end{aligned}$$

d) Inégalité de Clausius-Duhem

On a en outre l'approximation

$$\rho \frac{DS}{Dt} \cong \rho_0 \frac{\partial S}{\partial t}$$

et le reste des développements est élémentaire.

Chapitre 4

Thermoélasticité isotrope infinitésimale

Démonstration 4.1 Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem

a) Membre de gauche

Le membre de gauche de l'inégalité s'écrit en petits déplacements, à partir des équations de constitution de la thermoélasticité infinitésimale, sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}
 \rho_0 \left(T \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t} \right) &= \rho_0 \left(T \frac{\partial S}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t} (F + TS) \right) \quad (\text{avec } F = U - TS) \\
 &= -\rho_0 \left(\frac{\partial F}{\partial t} + S \frac{\partial T}{\partial t} \right) \\
 &= -\rho_0 \left(\frac{\partial \hat{F}}{\partial \varepsilon_{ij}} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \frac{\partial \hat{F}}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} + S \frac{\partial T}{\partial t} \right) \quad (\text{car } F = \hat{F}(T, \varepsilon_{ij})) \\
 &= -\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} + \cancel{\rho_0 S \frac{\partial T}{\partial t}} - \cancel{\rho_0 S \frac{\partial T}{\partial t}} = -\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} \\
 &\quad (\text{car } \sigma_{ij} = \rho_0 \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}, S = -\frac{\partial F}{\partial T}).
 \end{aligned}$$

b) Membre de droite

Le membre de droite s'écrit

$$-\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial t} - \frac{\hat{k}(T)}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right).$$

c) Différence entre les deux membres

La différence entre les deux membres est

$$\frac{\hat{k}(T)}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right),$$

soit le produit de $\frac{\hat{k}(T)}{T}$ qui est positif par la somme des carrés $\left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$. Cette différence est bien positive.

d) Commentaires

On peut en outre prouver que les conditions sur S , σ_{ji} et $\hat{k}(T)$ sont nécessaires pour que l'inégalité de Clausius-Duhem soit satisfaite pour tout processus thermodynamique. Cette réciproque ne sera pas démontrée ici.

Démonstration 4.2 Équation de constitution des contraintes – Inversion

Après avoir décomposé les contraintes en parties sphérique et déviatoire (ce qui demande certains calculs), on inverse très facilement les relations.

On trouve

$$\begin{cases} \varepsilon_{mm} &= 3\alpha(T - T_0) + \frac{1}{3\kappa} \sigma_{mm} \\ \varepsilon_{ij}^d &= \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij}^d \end{cases}$$

Il suffit alors de développer

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{3} \varepsilon_{mm} \delta_{ij} + \varepsilon_{ij}^d$$

en tenant compte des définitions de E et ν pour arriver aux expressions cherchées.

Chapitre 5

Fluide visqueux newtonien

Démonstration 5.1 Vérification de l'inégalité de Clausius-Duhem

a) Membre de droite

Le membre de droite de l'inégalité de Clausius-Duhem s'écrit à partir des équations de constitution :

$$\rho \left(T \frac{DS}{Dt} - \frac{DU}{Dt} \right) = \rho \left(T \frac{\partial \hat{S}}{\partial T} - \frac{\partial \hat{U}}{\partial T} \right) \frac{DT}{Dt} = \rho \left(T \frac{c_V(T)}{T} - c_V(T) \right) \frac{DT}{Dt} = 0$$

$$\left(\text{avec } S = \hat{S}(T), \quad \frac{d\hat{S}}{dT} = \frac{c_V(T)}{T}, \quad \frac{d\hat{U}}{dT} = c_V(T) \right).$$

b) Membre de gauche

Le membre de gauche s'écrit

$$-(-p\delta_{ij} + 2\eta(T)d_{ij})d_{ij} - \frac{k(T)}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = \underbrace{pd_{ii}}_{=0} - 2\eta(T)d_{ij}d_{ij} - \frac{k(T)}{T} \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial T}{\partial x_i} \right)$$

En effet, $d_{ii} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = 0$ (conservation de la masse).

c) Différence

La différence entre les deux membres est la somme de deux expressions positives, puisqu'elles sont le produit d'une expression positive ($\eta(T)$ ou $\frac{k(T)}{T}$) par une somme de carrés. L'inégalité de Clausius-Duhem est donc identiquement satisfaite.

d) Commentaires

On peut également prouver la réciproque, c'est à dire que les conditions sur les équations de constitution sont nécessaires pour que l'inégalité de Clausius-Duhem soit satisfaite pour tout processus thermodynamique. Cette démonstration ne sera pas faite ici.

NOTE : DIFFÉRENTIELLES

Définitions

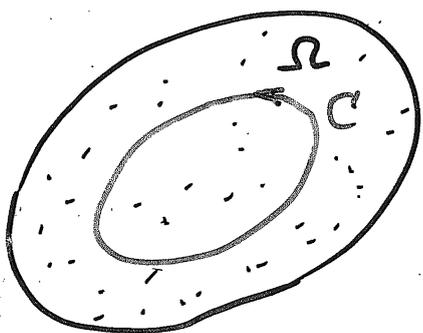
- Soit $p(x,y)$ et $q(x,y)$ de classe \mathcal{C}^1 ,
et la forme différentielle : $p dx + q dy$
- Alors, par définition, c'est une différentielle exacte s'il existe $f(x,y)$ telle que
$$\frac{\partial f}{\partial x} = p(x,y) \text{ et } \frac{\partial f}{\partial y} = q(x,y) ,$$

c.-à-d. précisément telle que ce soit la différentielle de $f(x,y)$.
- Par ailleurs, la forme différentielle $p dx + q dy$ est fermée si, en tout point du domaine,
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x}$$

Propriétés

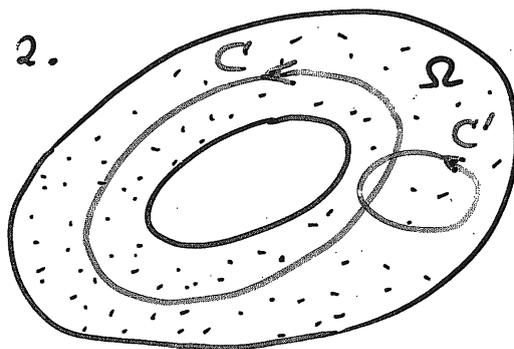
- Toute différentielle exacte est fermée, car alors
$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial q}{\partial x} .$$
- La réciproque n'est pas toujours vraie. Cependant, une différentielle fermée définie sur un domaine simplement connexe (c.-à-d. tel que tout lacet fermé tracé dans ce domaine puisse être réduit continûment à un point) est toujours exacte.

1.



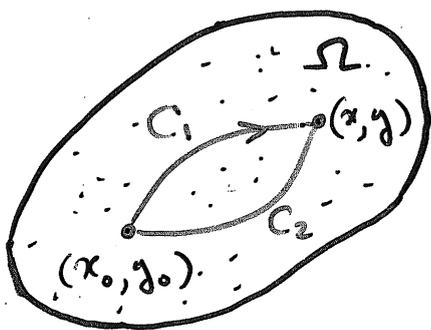
Ω est simplement connexe,
et C peut être réduite
continûment à un point.

2.



Ω n'est pas simplement
connexe et C ne peut pas
être réduite continûment
à un point (mais bien C').

1.



Choisissant arbitrairement.

$$f(x_0, y_0) = f_0,$$

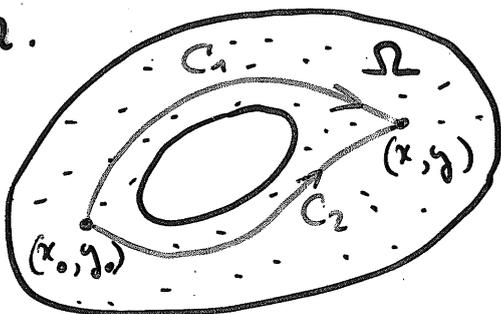
on définit

$$f(x, y) = \int_C (p dx + q dy) + f_0$$

Le chemin C va de (x_0, y_0) à (x, y) , et le
résultat est indépendant du choix de C (C_1 ou C_2 ...).

$$\text{On a bien } \frac{\partial f}{\partial x} = p \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = q.$$

2.



Comme on peut avoir

$$\int_{C_1} p dx + q dy \neq \int_{C_2} p dx + q dy,$$

on ne peut définir $f(x, y)$
continûment sur tout le

domaine. Il faut faire des coupures.

Exemple ①

$$p(x, y) = y, \quad q(x, y) = x.$$

- Comme $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = 1$, la différentielle est fermée, et cela sur le plan \mathbb{R}^2 tout entier (sans trous), donc elle est aussi exacte. On peut intégrer.
- 1^{ère} méthode : On cherche $f(x, y)$ telle que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x.$$

On intègre en x la 1^{ère} relation, à une fonction de y , $F(y)$, près :

$$f(x, y) = xy + F(y) \quad (\text{correct puisque } \frac{\partial}{\partial x}(xy + F(y)) = y).$$

On dérive ensuite par rapport à y pour retrouver la 2^{ème} relation :

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + F'(y) = x.$$

Donc $F'(y) = 0$ et $F(y)$ est une constante C :

$$f(x, y) = xy + C.$$

- 2^{ème} méthode : Comme on écrit

$$df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = y dx + x dy,$$

on voit directement que la différentielle du produit xy est :

$$d(xy) = y dx + x dy,$$

ce qui donne, en ajoutant une constante d'intégration :

$$f(x, y) = xy + C.$$

Exemple (2)

$$p(x,y) = xy + x^2, \quad q(x,y) = \frac{1}{2}x^2$$

- $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial q}{\partial x} = x$, donc la différentielle est fermée, et même exacte puisque p et q sont réguliers sur le plan \mathbb{R}^2 tout entier (pas de trous).

• 1^{ère} méthode:

Si $\frac{\partial f}{\partial x} = p = xy + x^2$, alors $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3} + F(y)$,

où $F(y)$ doit être déterminée par dérivation.

On trouve $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^2}{2} + F'(y) = q = \frac{1}{2}x^2$,

et donc $F'(y) = 0$ et $F(y) = C$ (constante).

Finalement, $f(x,y) = \frac{x^2y}{2} + \frac{x^3}{3} + C$.

• 2^{ème} méthode:

$$d f(x,y) = (xy + x^2) dx + \frac{1}{2}x^2 dy$$

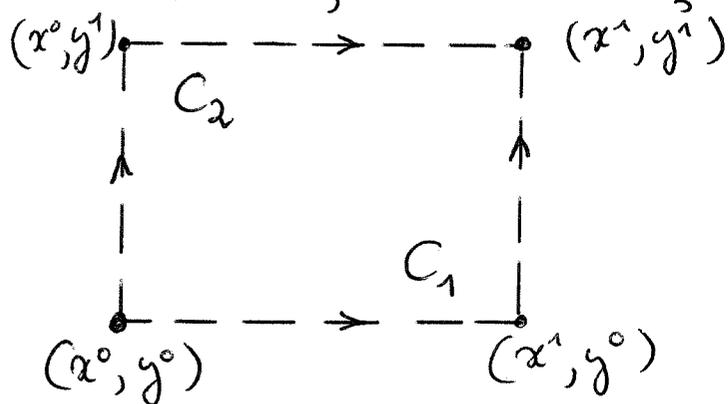
$$= (xy dx + \frac{1}{2}x^2 dy) + x^2 dx$$

$$= d\left(\frac{1}{2}x^2y\right) + d\left(\frac{x^3}{3}\right)$$

Donc, $f(x,y) = \frac{1}{2}x^2y + \frac{x^3}{3} + C$.

- 3^{ème} méthode : On essaye d'intégrer directement, puisqu'on sait que le résultat est indépendant du chemin (la différentielle est exacte). Cette méthode n'est pas pratique, mais illustre ce qui est fait.

Le plus simple est d'intégrer sur des chemins en escalier, avec les tronçons parallèles aux axes



On va considérer les deux chemins

$$\left. \begin{array}{l} (x^0, y^0) \rightarrow (x^1, y^0) \rightarrow (x^1, y^1) : C_1 \\ (x^0, y^0) \rightarrow (x^0, y^1) \rightarrow (x^1, y^1) : C_2 \end{array} \right\}$$

et montrer que l'intégrale est la même.

- Le long de C_1 :

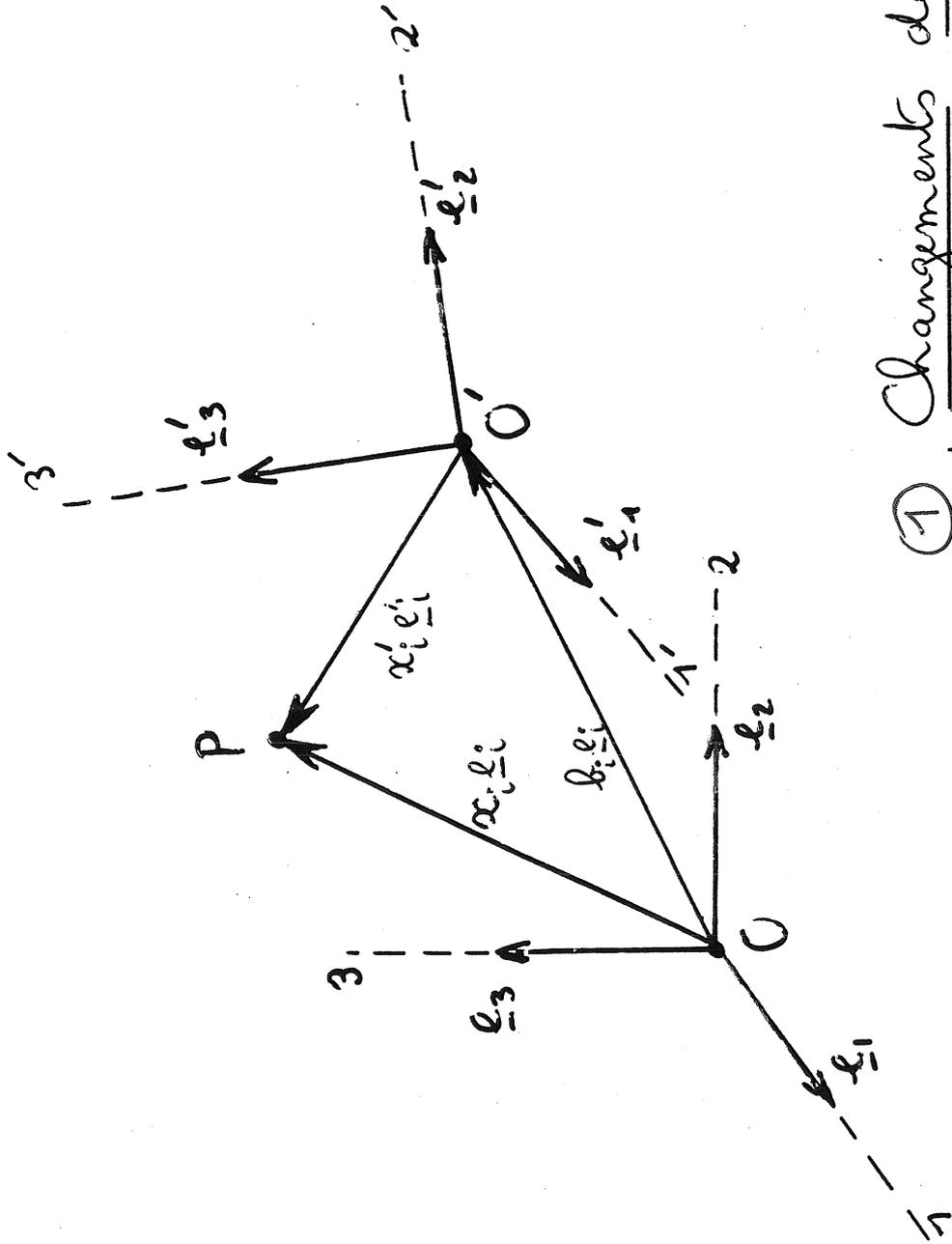
$$\begin{aligned} \int_{C_1} x dy + y dx &= \int_{(x^0, y^0)}^{(x^1, y^0)} \cancel{x dy} + y dx + \int_{(x^1, y^0)}^{(x^1, y^1)} x dy + \cancel{y dx} \\ &= y^0 (x^1 - x^0) + x^1 (y^1 - y^0) \\ &= x^1 y^1 - x^0 y^0 \end{aligned}$$

- Le long de C_2 :

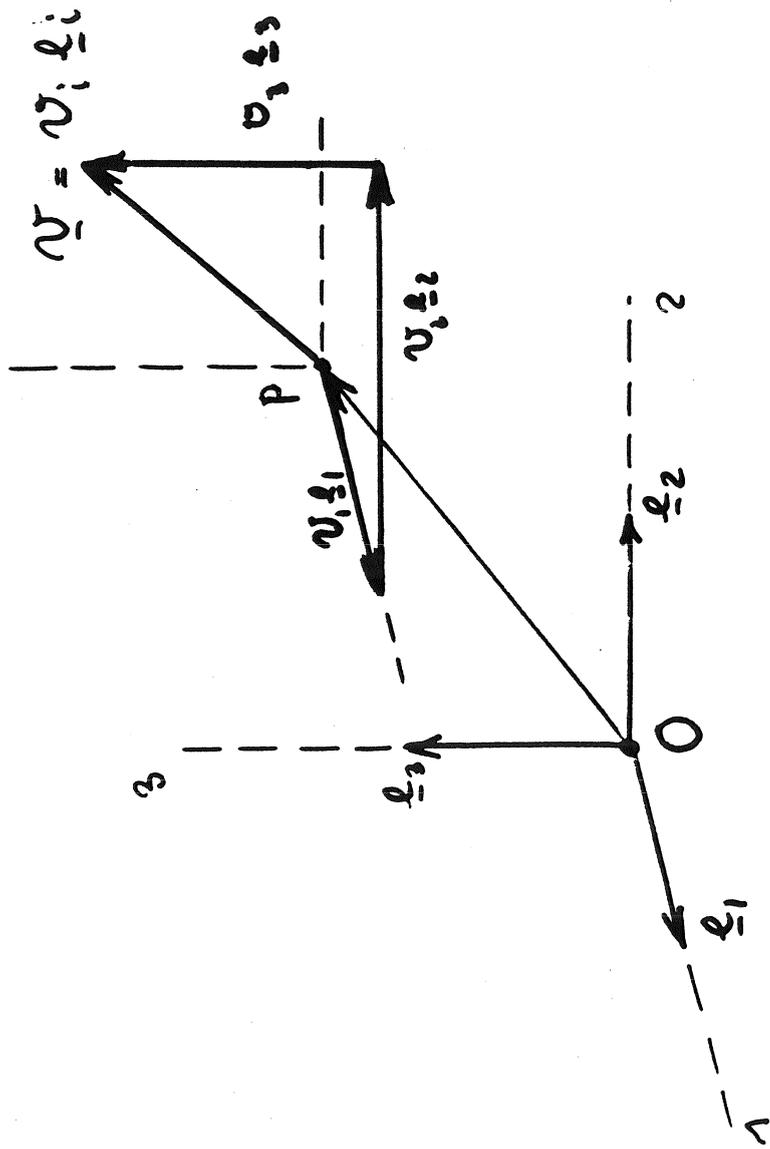
$$\begin{aligned} \int_{C_2} x dy + y dx &= \int_{(x^0, y^0)}^{(x^0, y^1)} \cancel{x dy} + y dx + \int_{(x^0, y^1)}^{(x^1, y^1)} \cancel{x dy} + y dx \\ &= x^0 (y^1 - y^0) + y^1 (x^1 - x^0) \\ &= x^1 y^1 - x^0 y^0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a donc } \int_{C_1} x dy + y dx &= \int_{C_2} x dy + y dx \\ &= f(x^1, y^1) - f(x^0, y^0) \end{aligned}$$

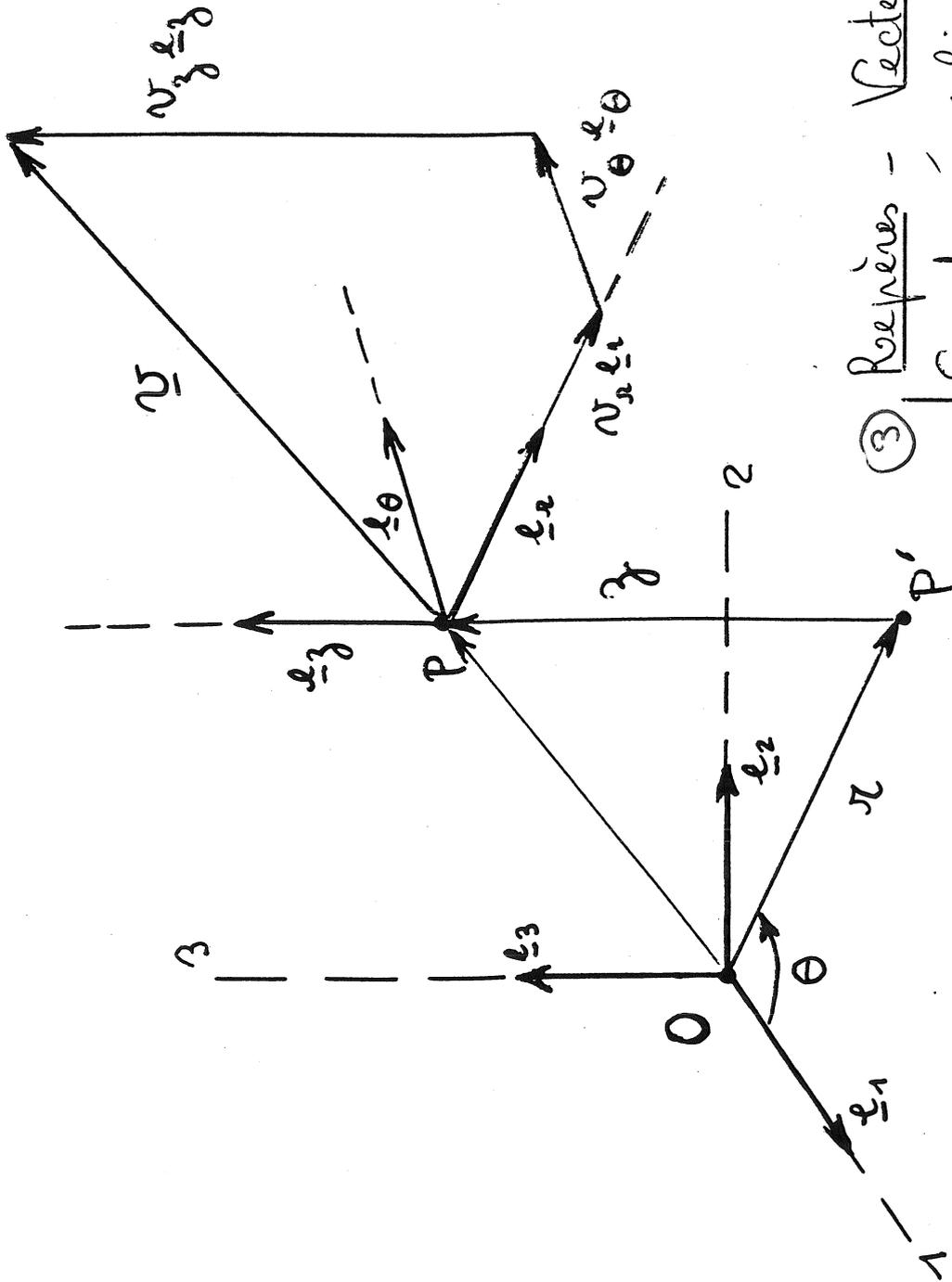
Figures



① Changements de repères
 Changement de coordonnées
 cartésiennes

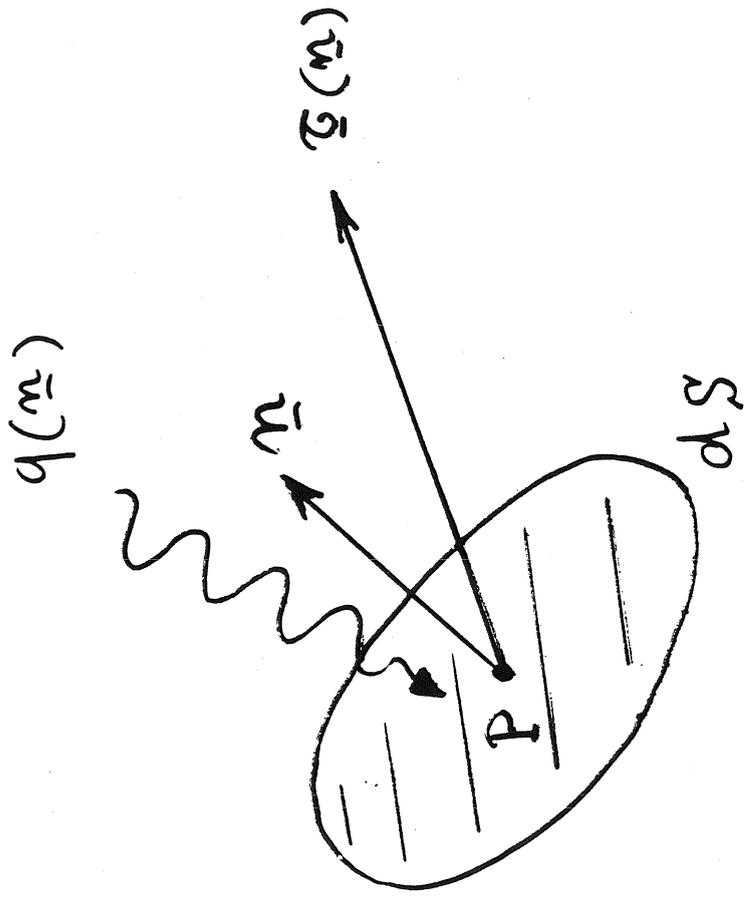


(2) Vecteurs
 Composantes dans un repère cartésien



Repères - Vecteurs
 Coordonnées cylindriques
 d'un point
 Composantes cylindriques
 d'un vecteur

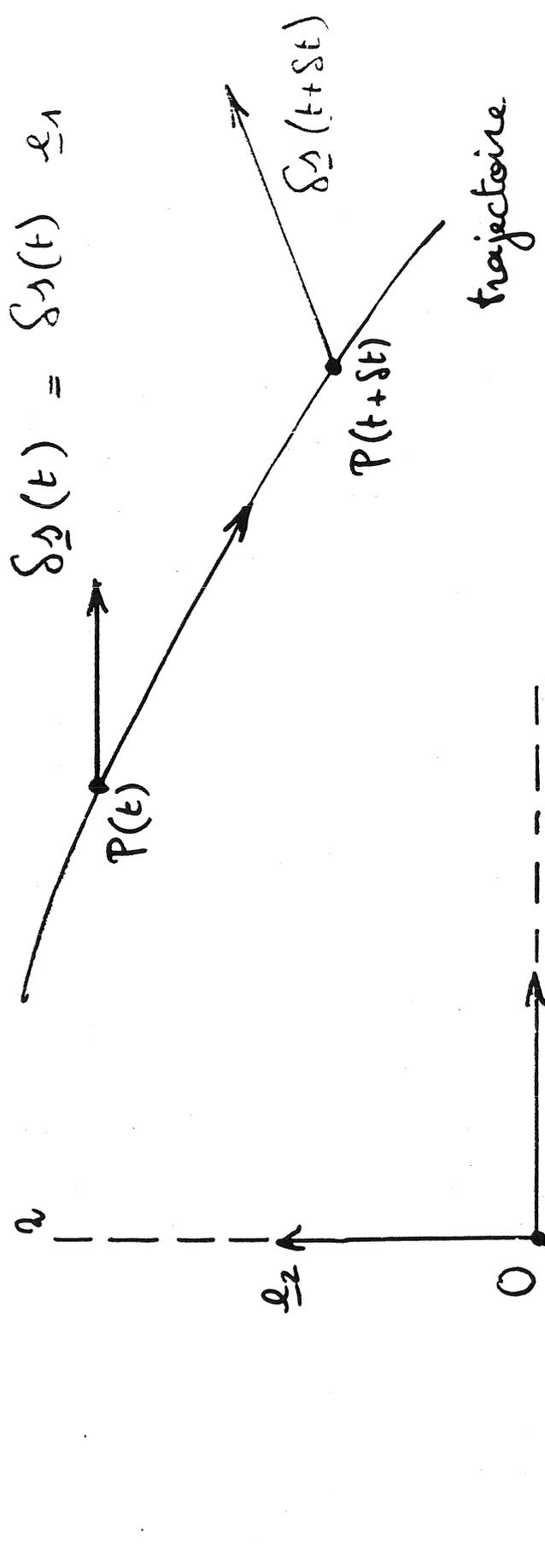
③



⑤ Effets agissant à la frontière d'un corps

Densité de force de contact

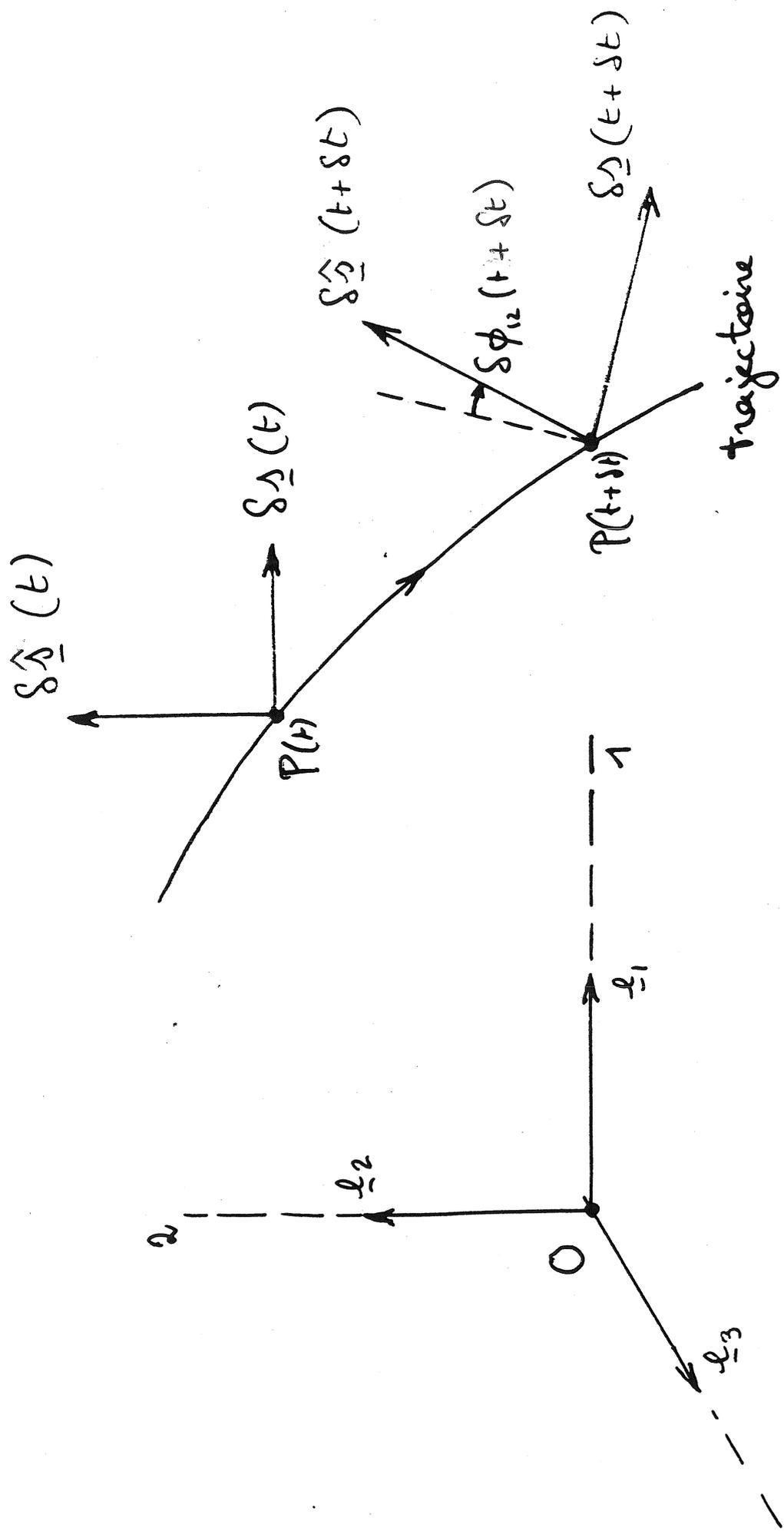
Densité de flux de chaleur



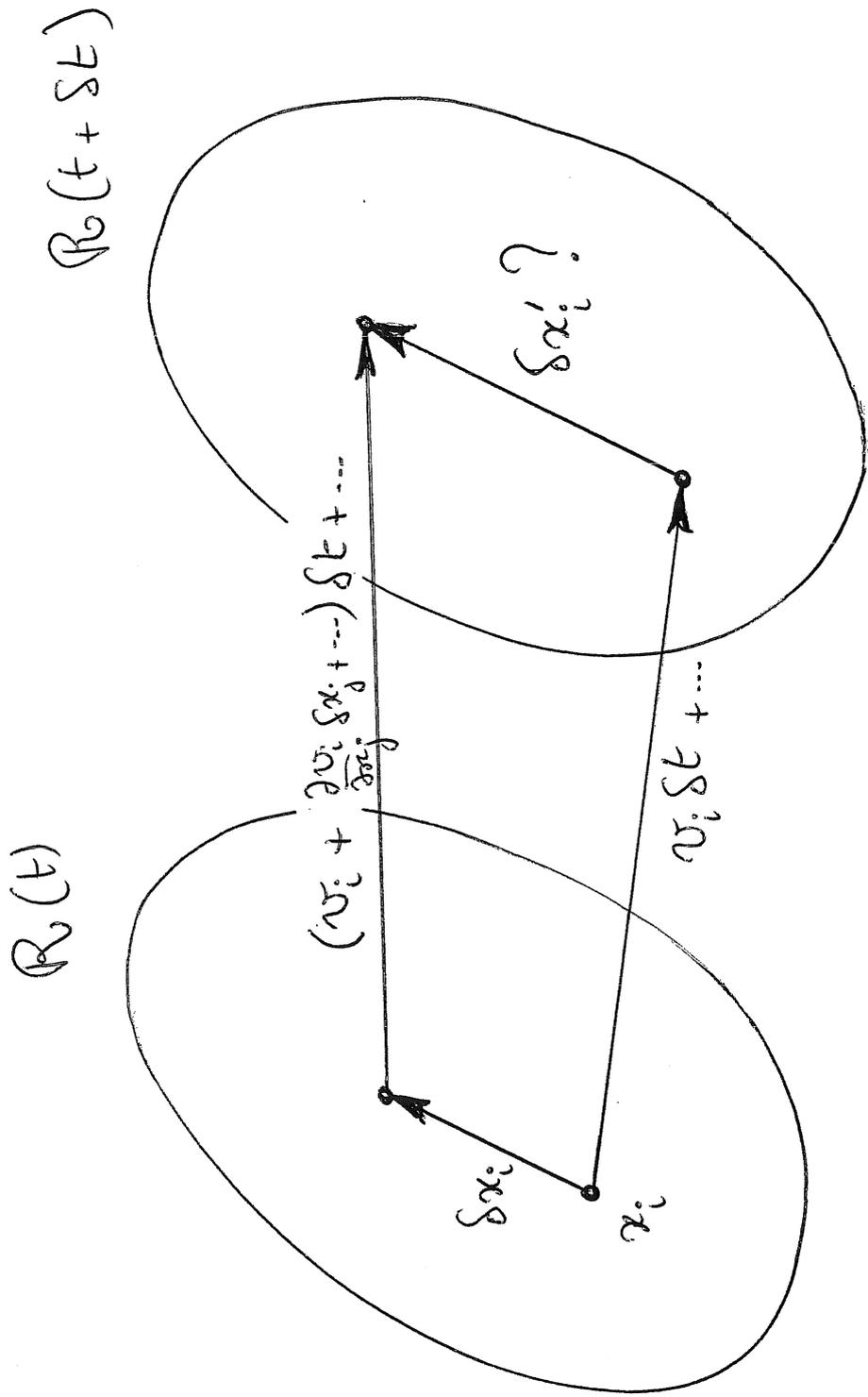
$$\delta \underline{v}(t) = \delta \underline{v}(t) \underline{e}_1$$

⑥ Tenseurs

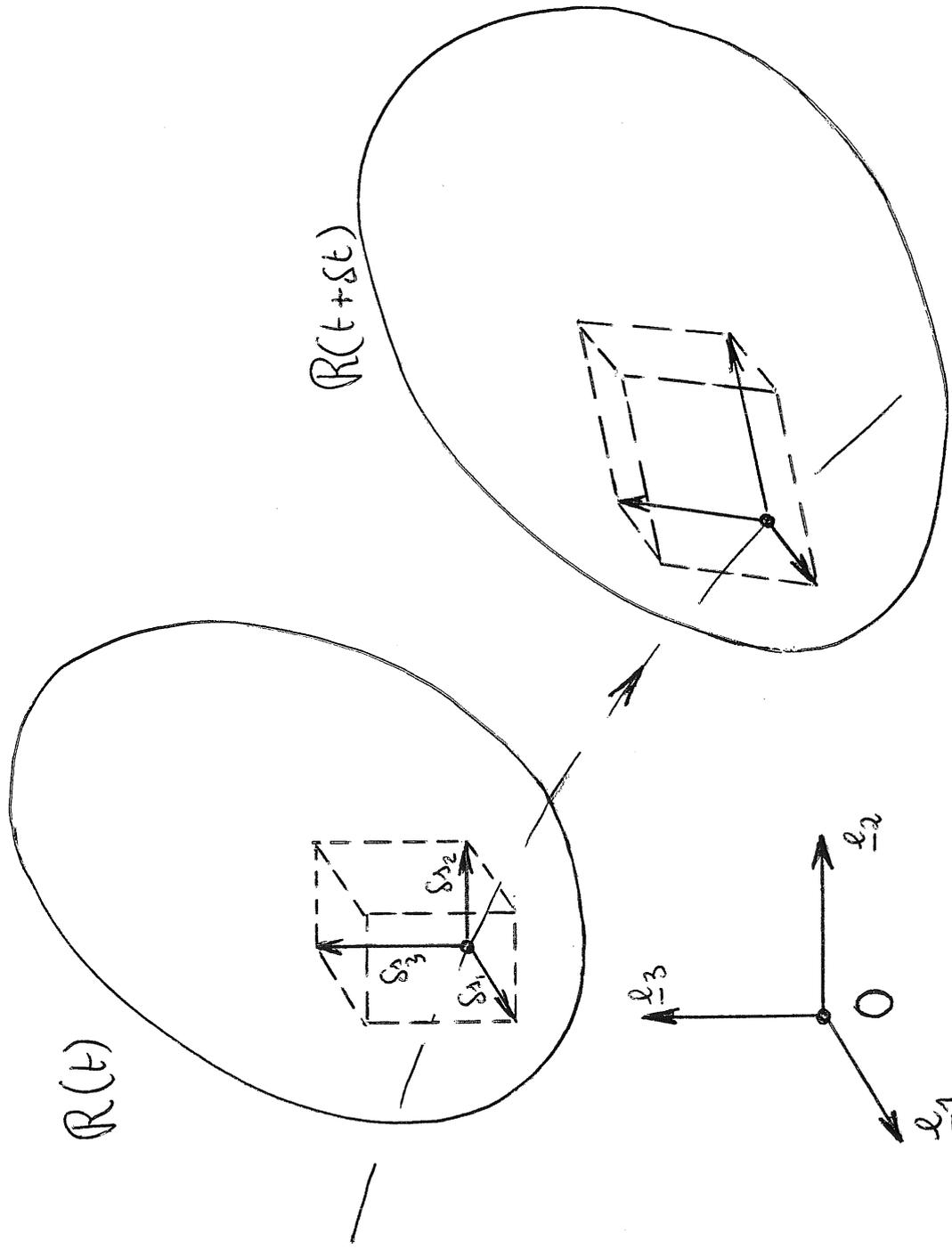
Interprétation d'une composante diagonale du tenseur des vitesses de déformation



⑦ Tenseurs
 Interprétation d'une composante non diagonale
 du tenseur des vitesses de déformation

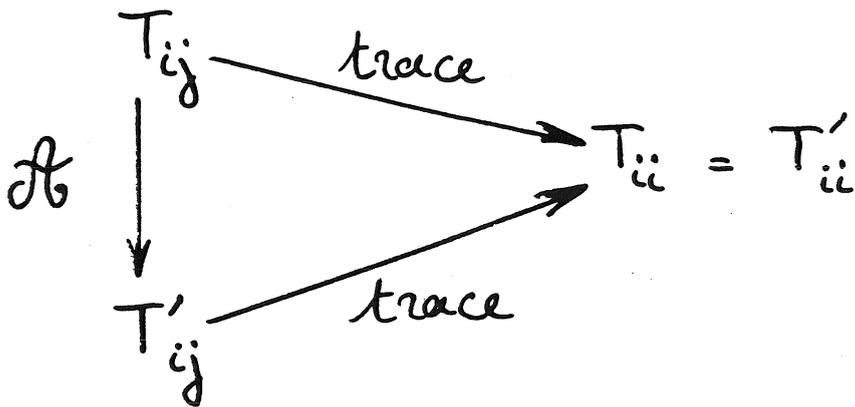
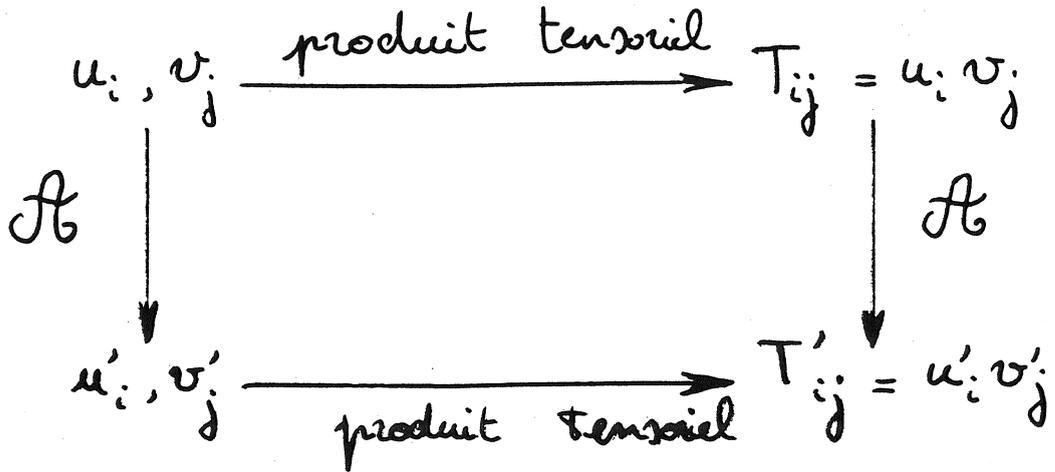


⑧ Interprétation des composantes du tenseur
des vitesses de déformation : évolution d'un
vecteur élémentaire aux instants suivants (t)



⑤ Déformation d'un parallélépipède rectangulaire élémentaire aux instants t et $t+st$

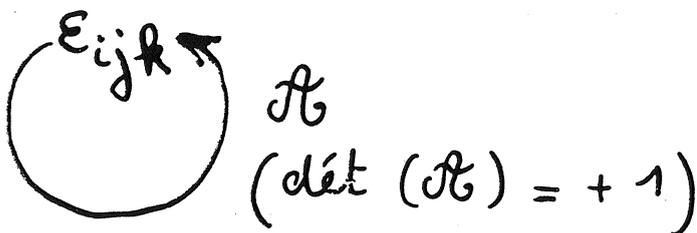
⑩ Opérations tensorielles ponctuelles
Invariance du produit tensoriel et de la trace

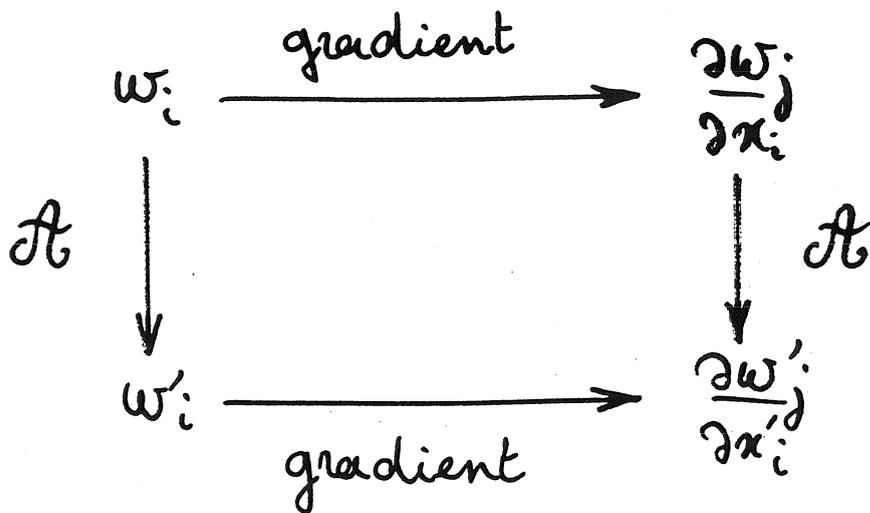
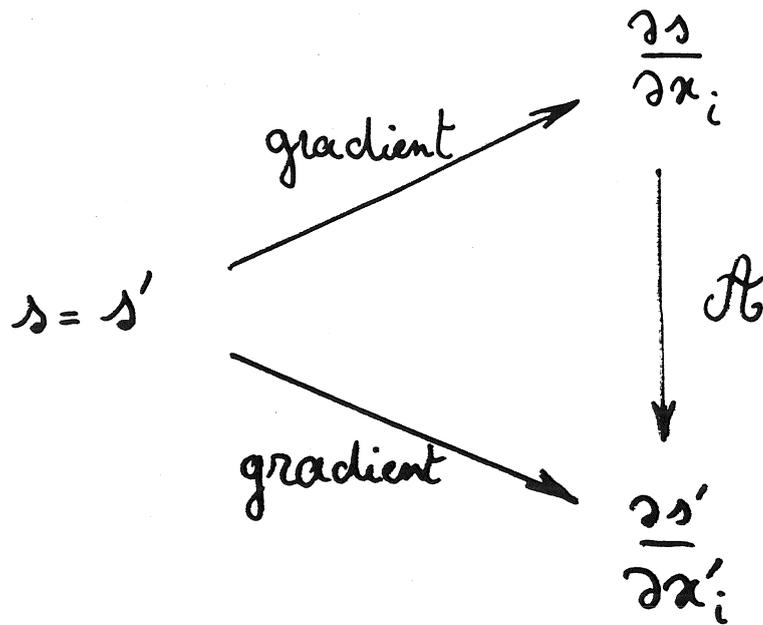


⑪

Tenseurs à
Composantes
invariantes

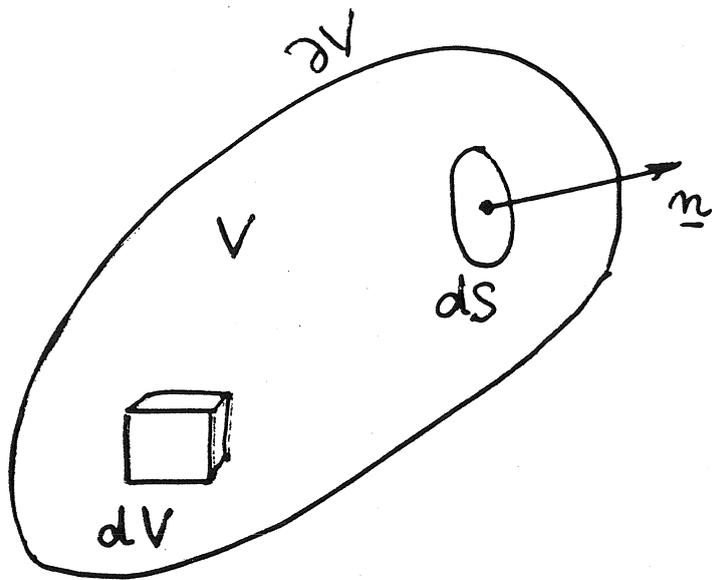
Tenseur identité
 et pseudo-tenseur
 de permutation



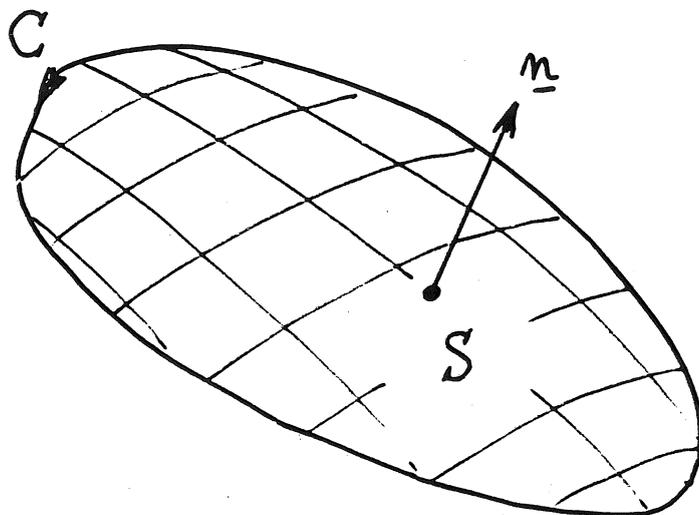


⑫ Gradient en coordonnées cartésiennes orthogonales

Invariance du gradient d'un scalaire et d'un vecteur



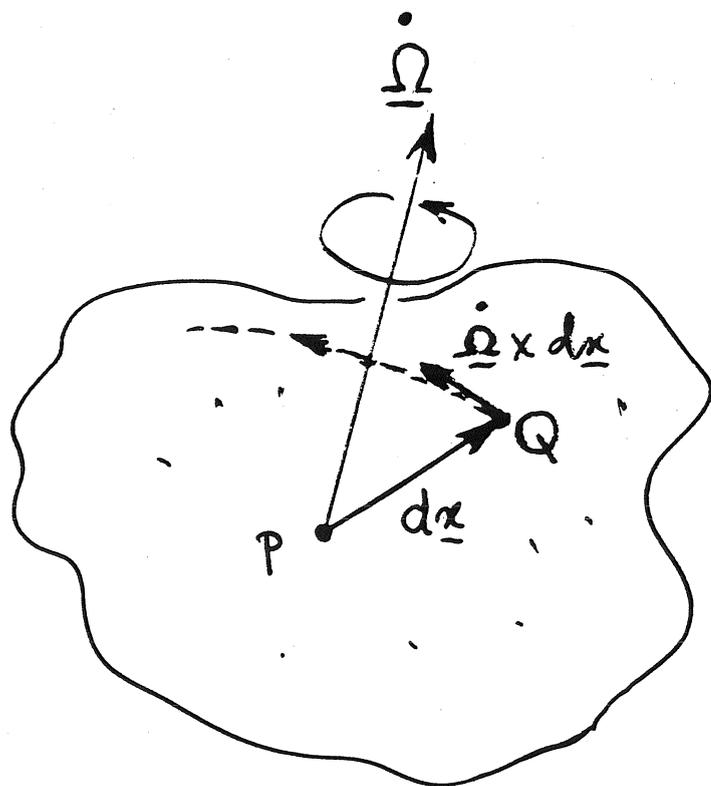
- ⑬ Gradient en coordonnées cartésiennes orthonormées
Théorème de la divergence (de Green)

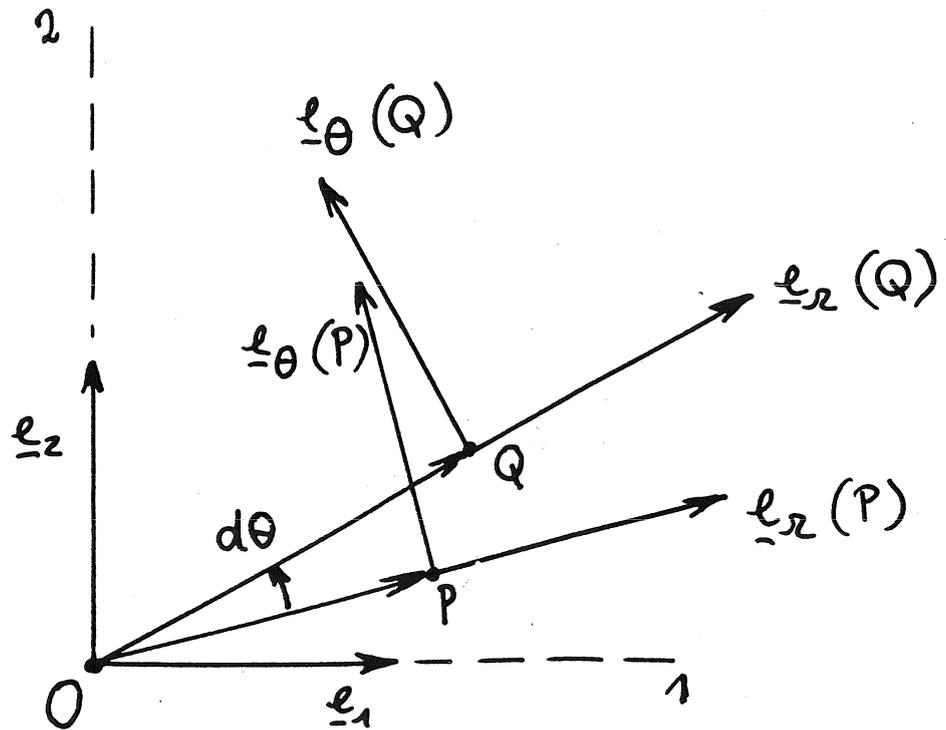


- ⑭ Gradient en coordonnées cartésiennes orthonormées
Théorème de Stokes

①⑤ Gradient en coordonnées cartésiennes
orthonormées

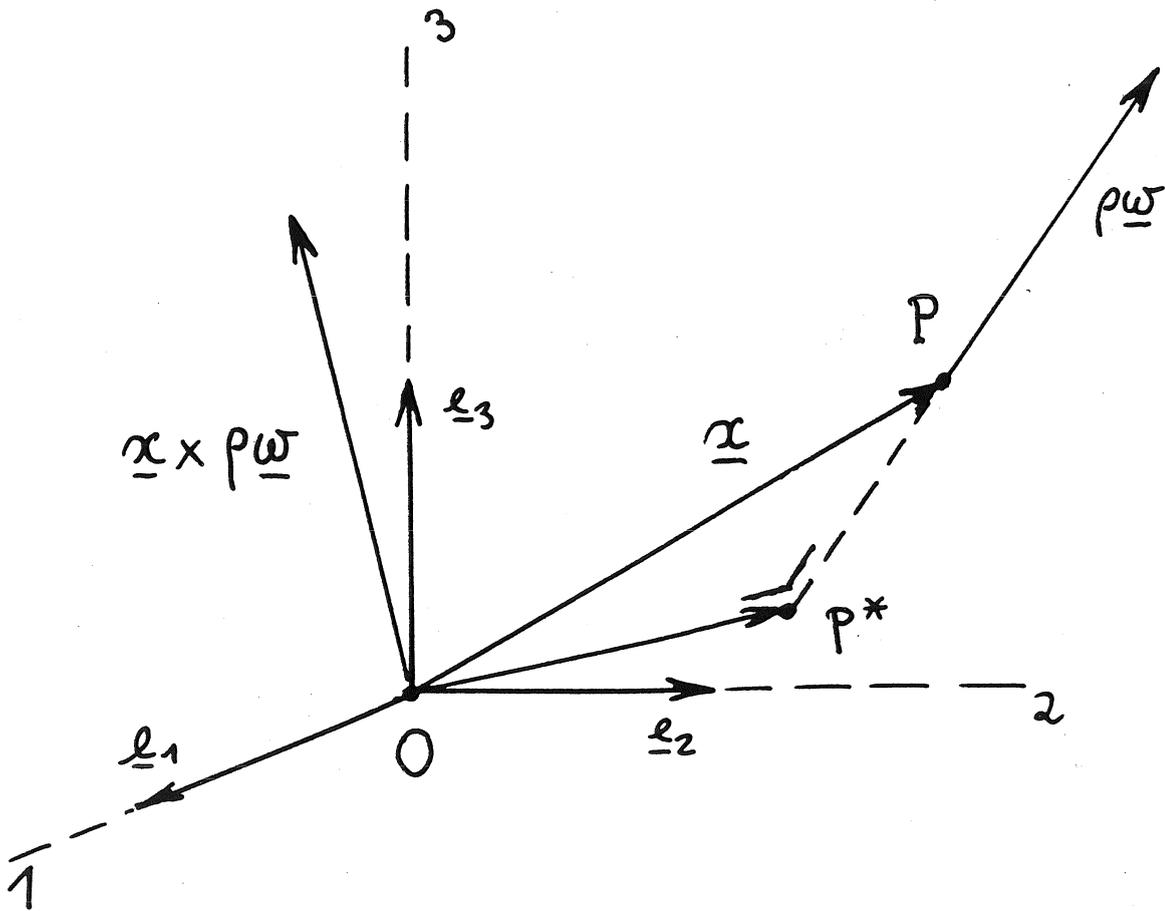
Interprétation du vecteur taux
de rotation



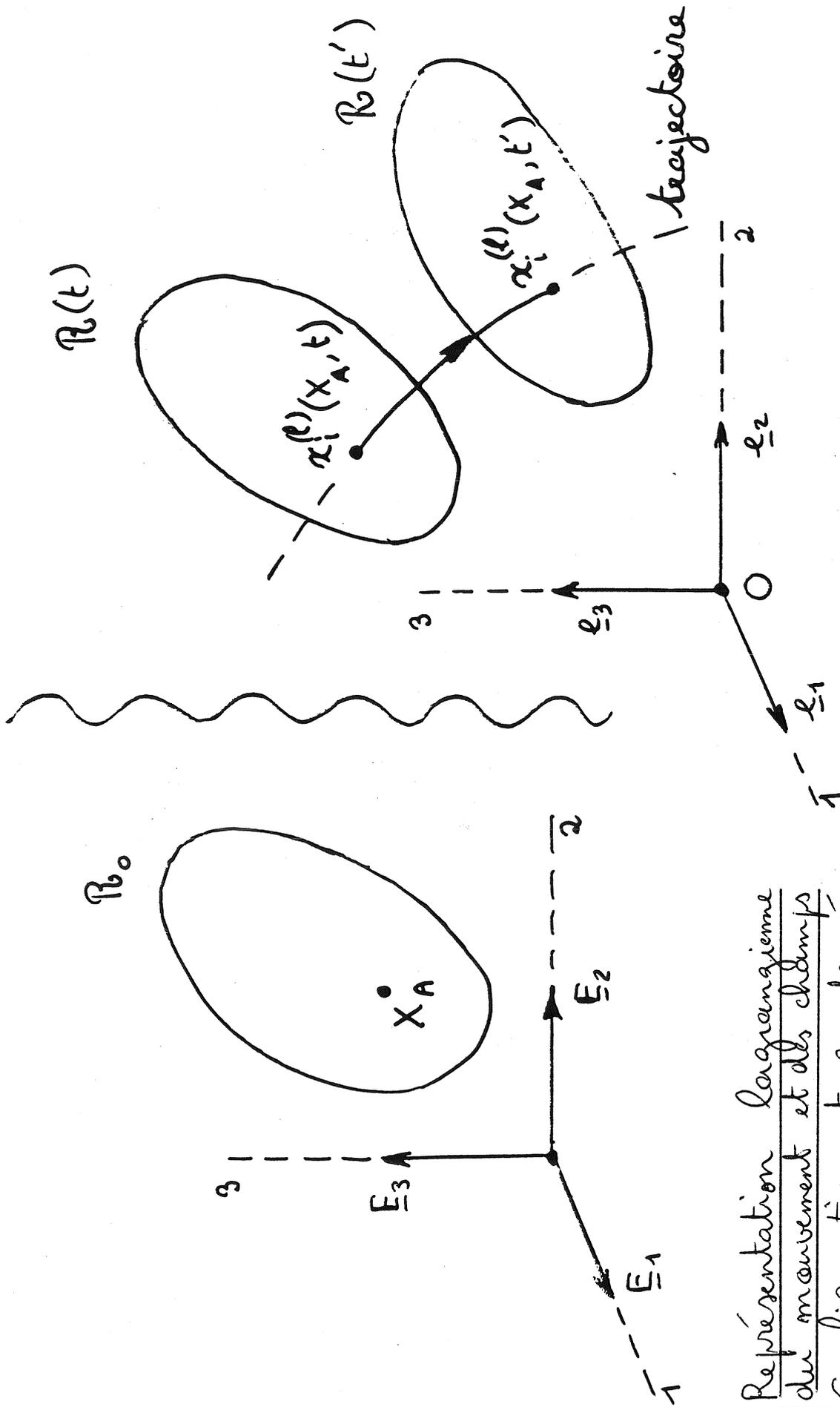


(16) Gradient en coordonnées curvilignes orthogonales

Différentiation de la base locale en coordonnées - composantes cylindriques



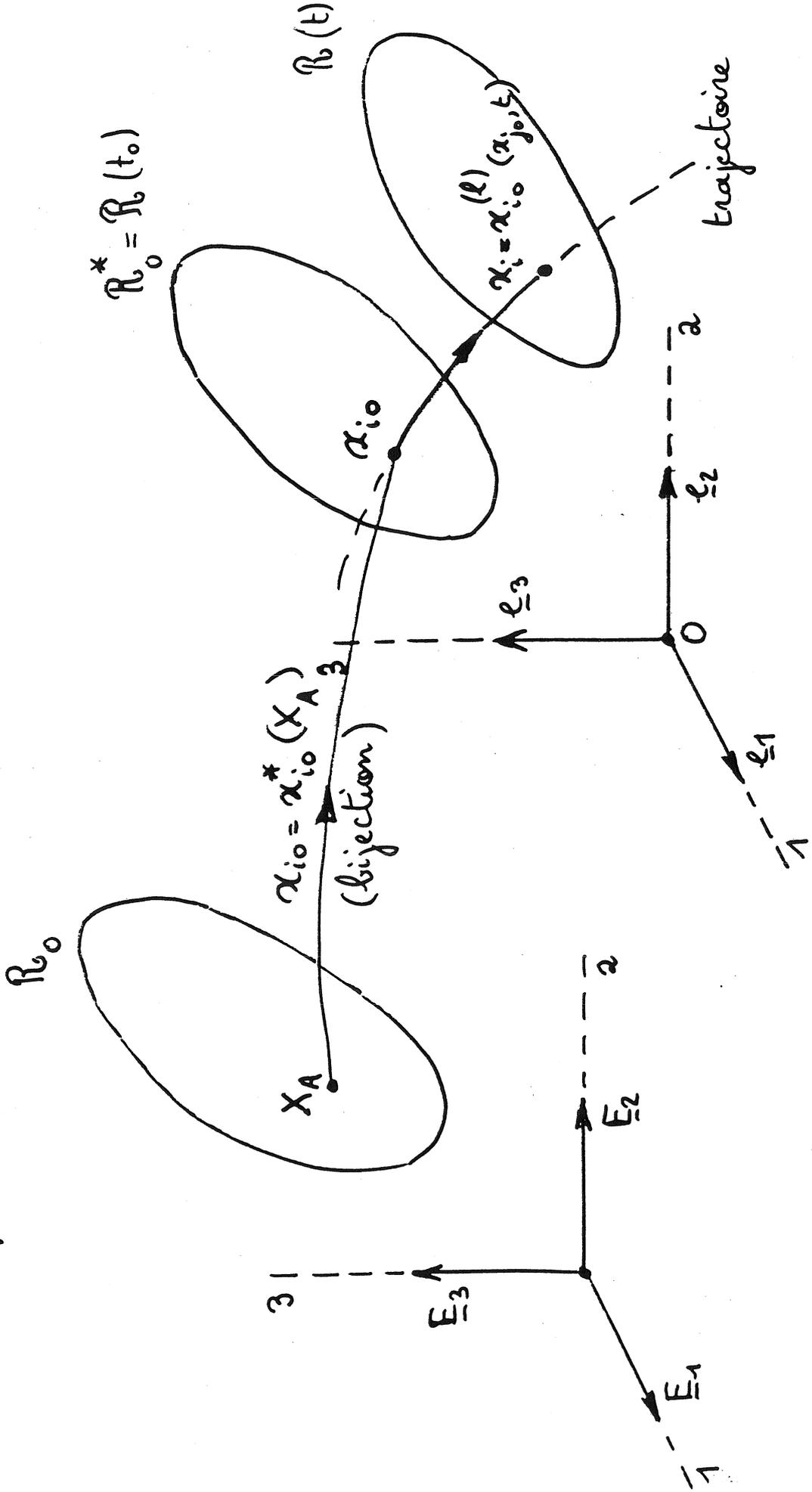
(17) Moments
 Densité de moment d'une
 grandeur par rapport à l'origine
 (par unité de volume)



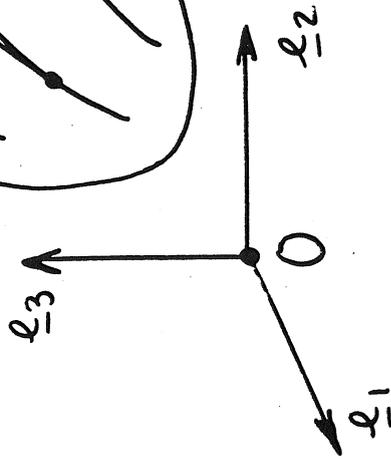
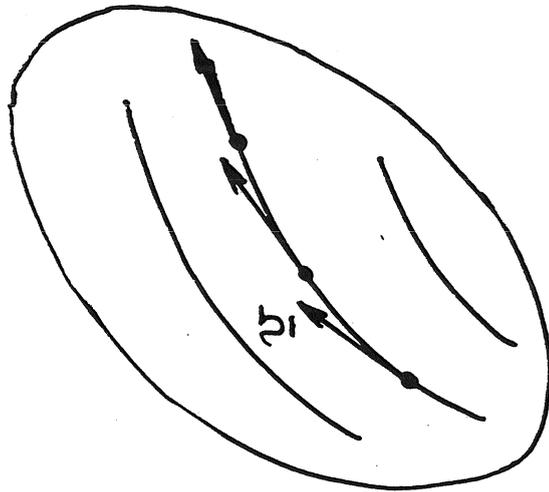
18) Représentation Lagrangienne
du mouvement et des champs
de configuration et coordonnées
de référence
 Configurations successives, description du mouvement, trajectoire

19) Représentation lagrangienne du mouvement et des champs

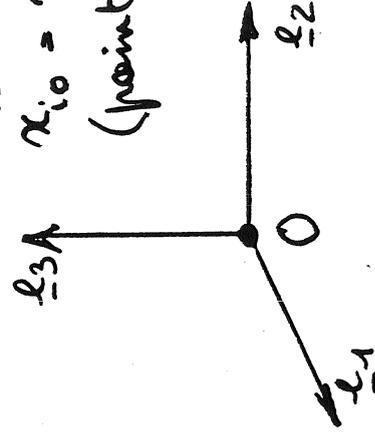
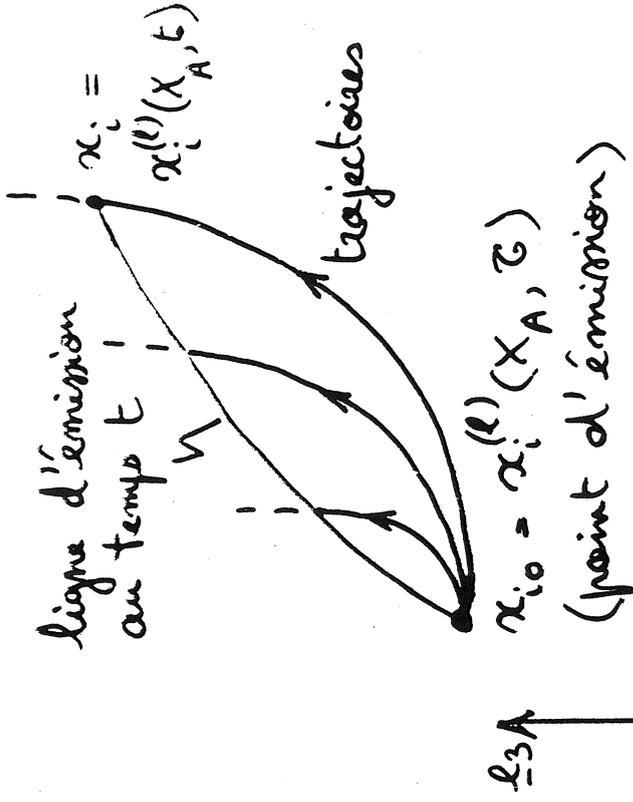
Intégration des relations de base en partant d'une représentation eulérienne des vitesses



$R(t)$

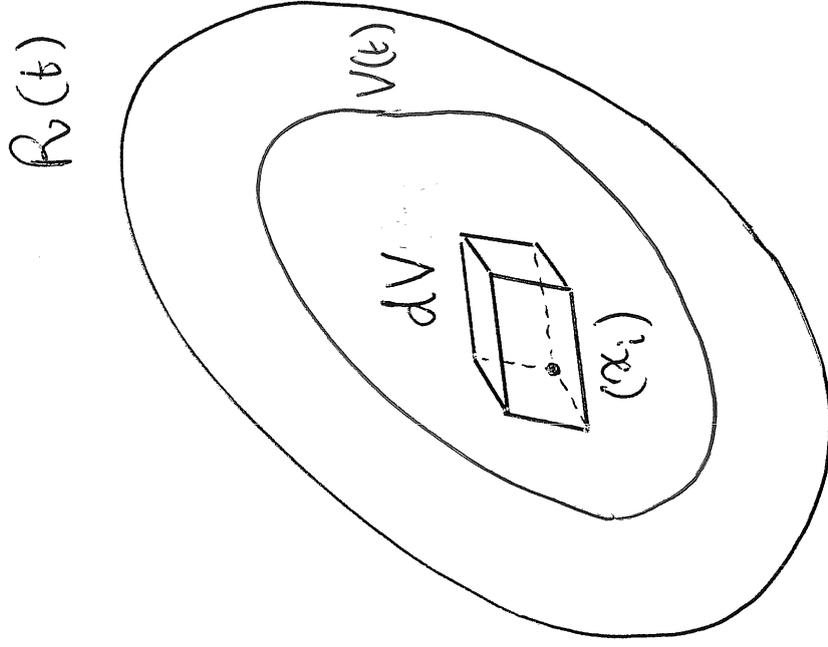
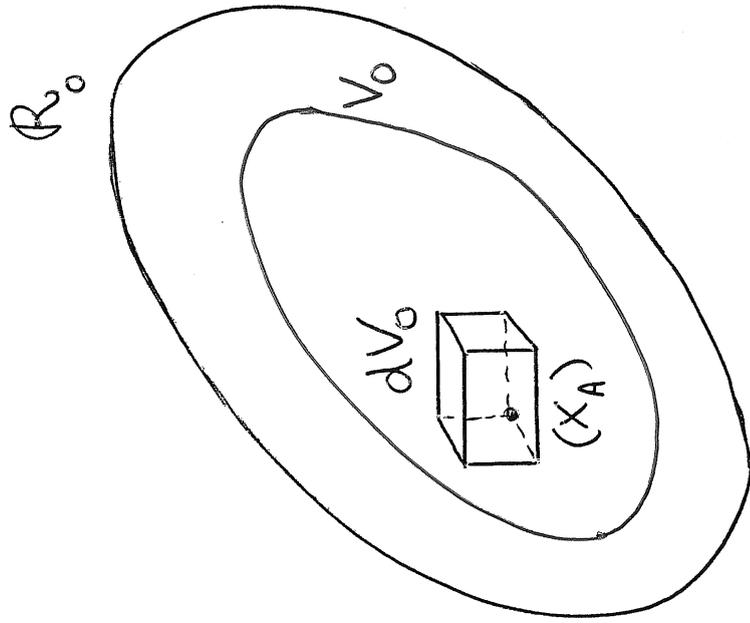


Lignes de courant



Ligne d'émission

Représentation lagrangienne du mouvement et des champs
Lignes de courant et lignes d'émission

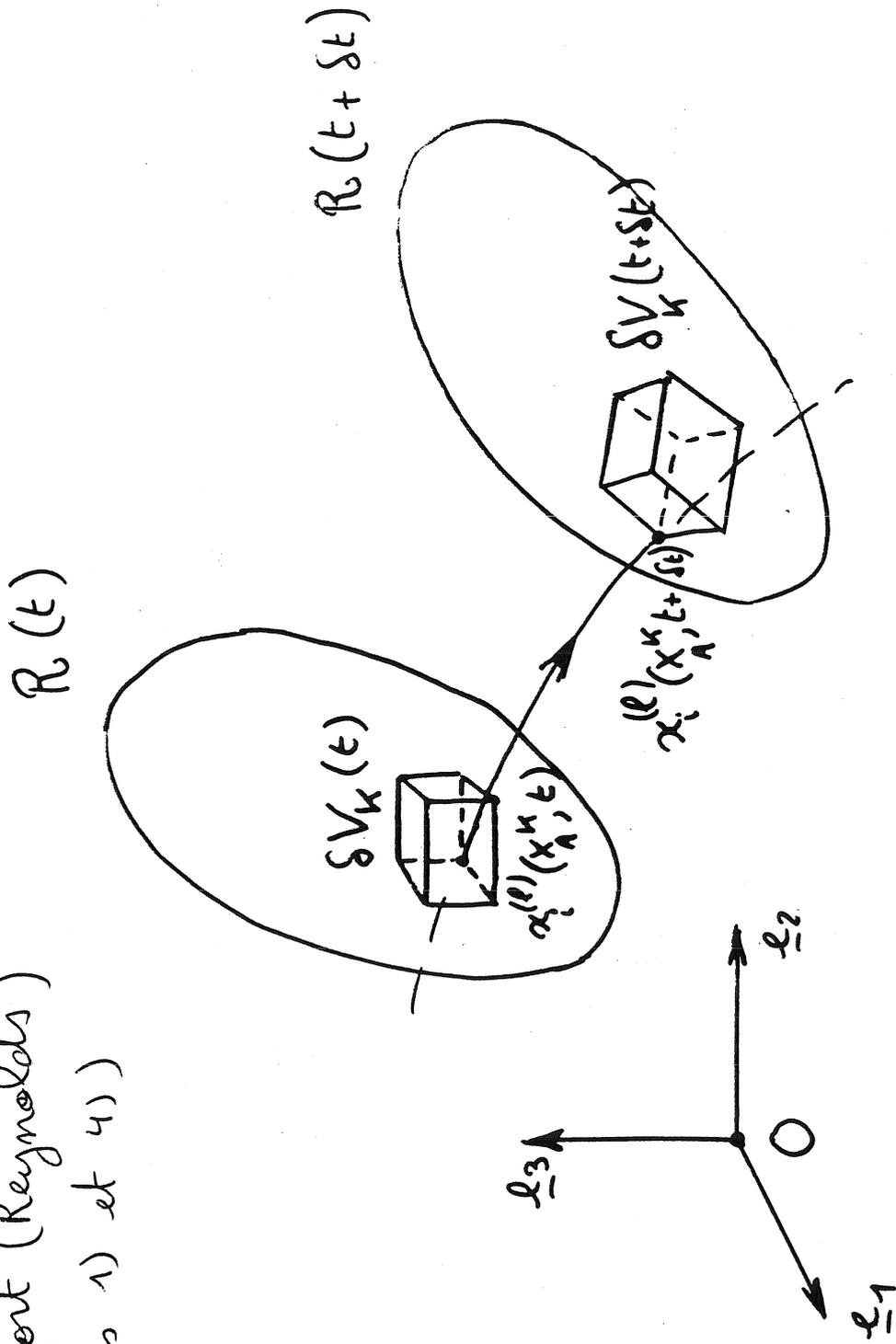


(21) Théorème du transport de Reynolds

22

Dérivées temporelles

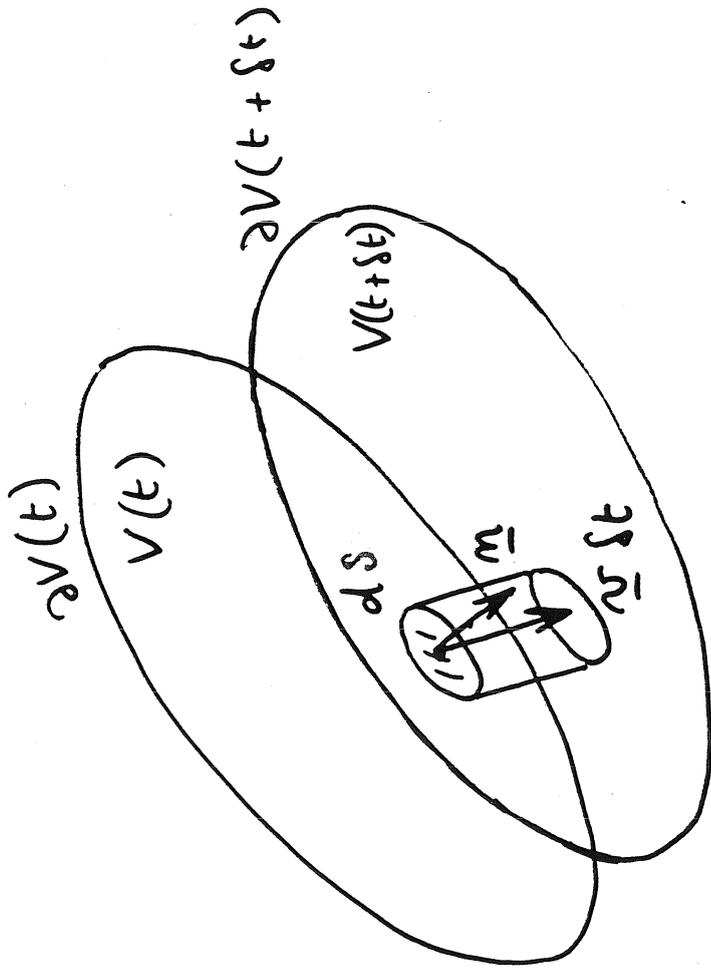
Interprétation du théorème
du transport (Reynolds)
(formules 1) et 4)



23

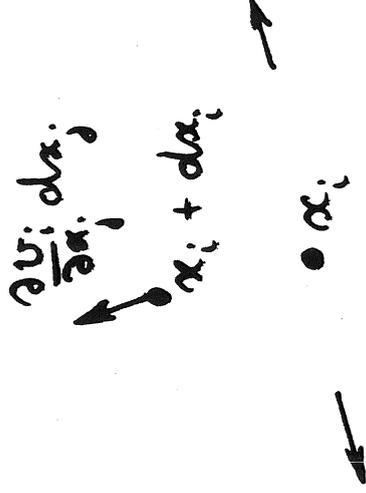
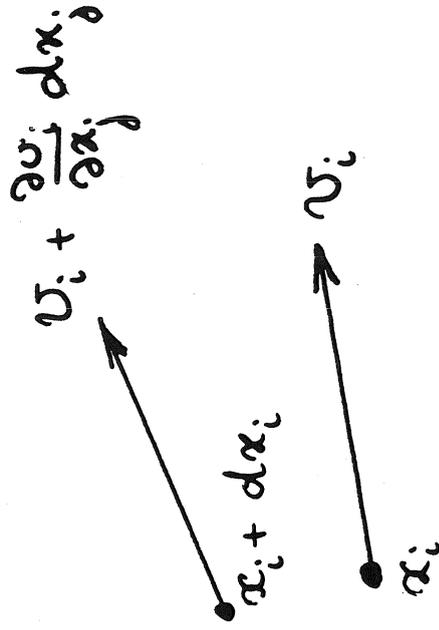
Dérivées temporelles

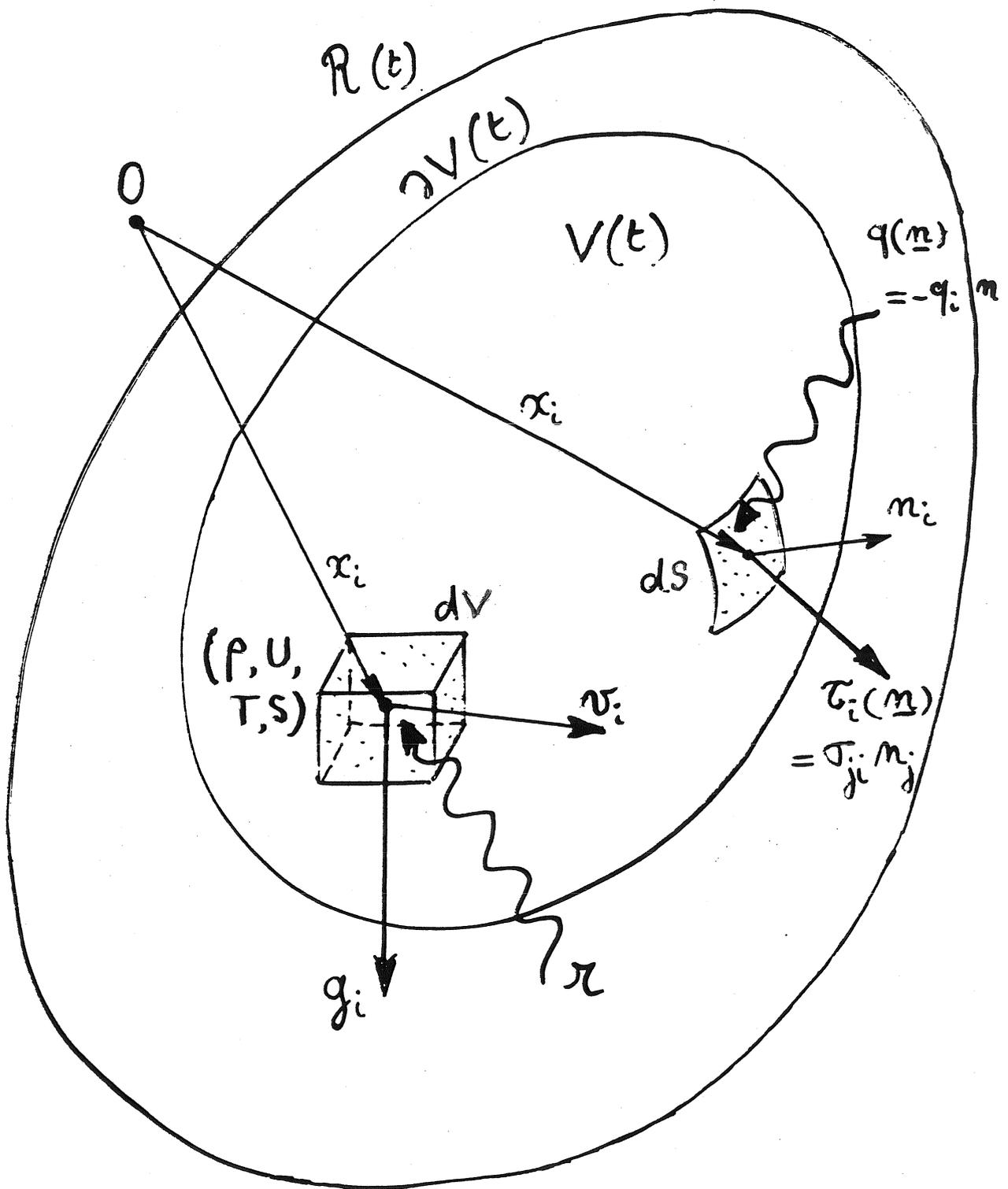
Interprétation du théorème du transport (Reynolds)
(formule 3)



(24) Dérivées temporelles

Interprétation de la divergence d'un champ vectoriel
(champ de vitesses)



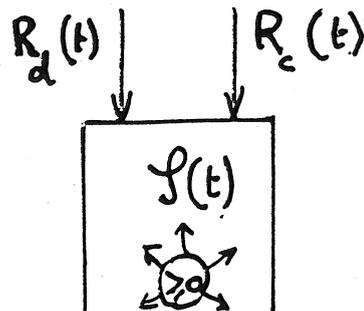
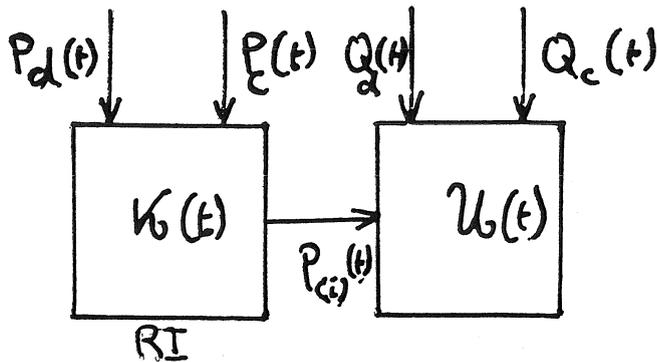
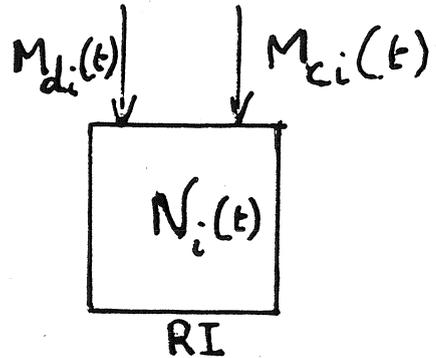
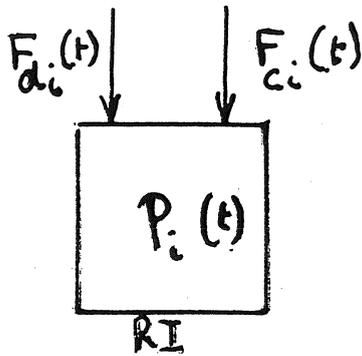
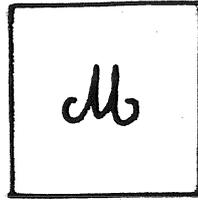


(25) Lois de conservation globales - Formes locales
 Effets exercés dans un volume matériel et à sa frontière

26

Lois de conservation

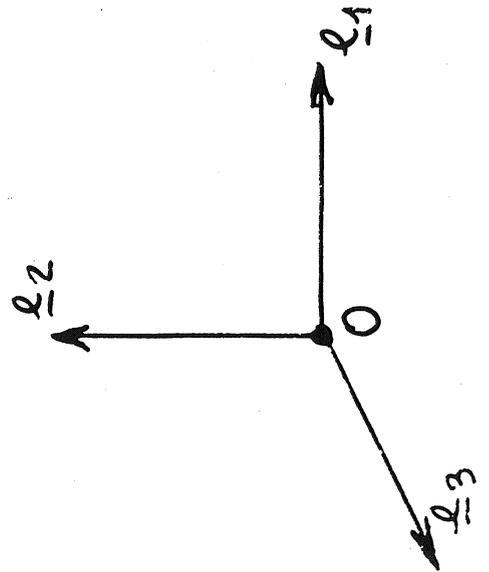
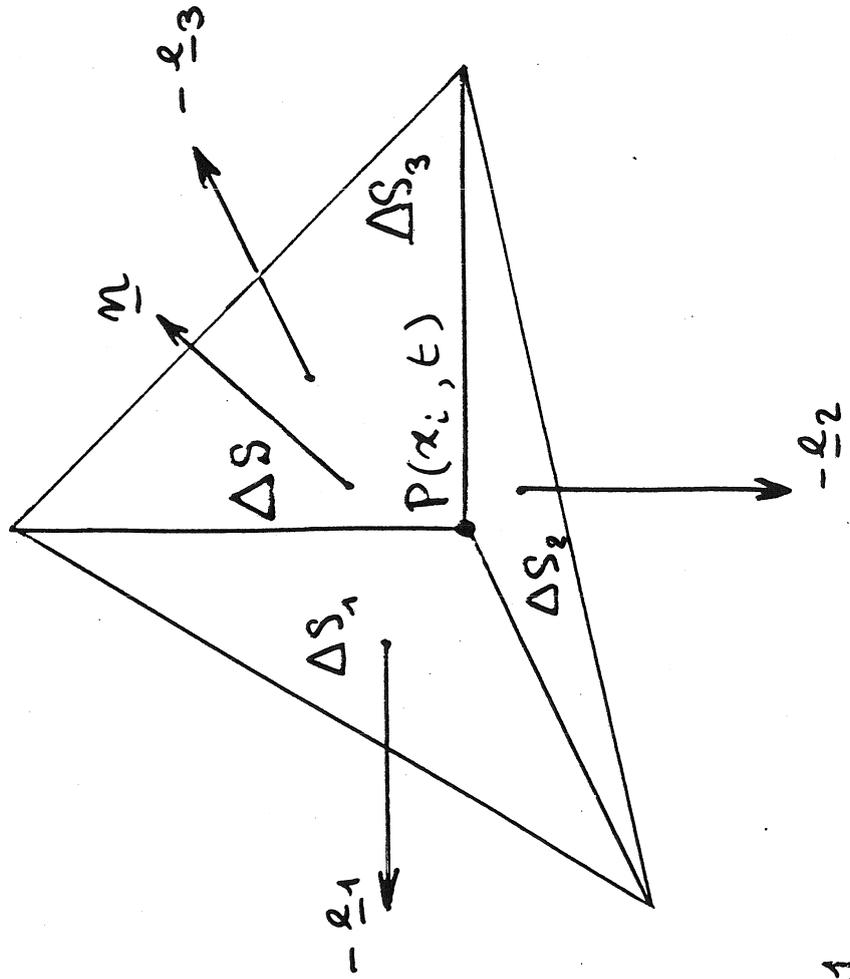
Formes globales



(27)

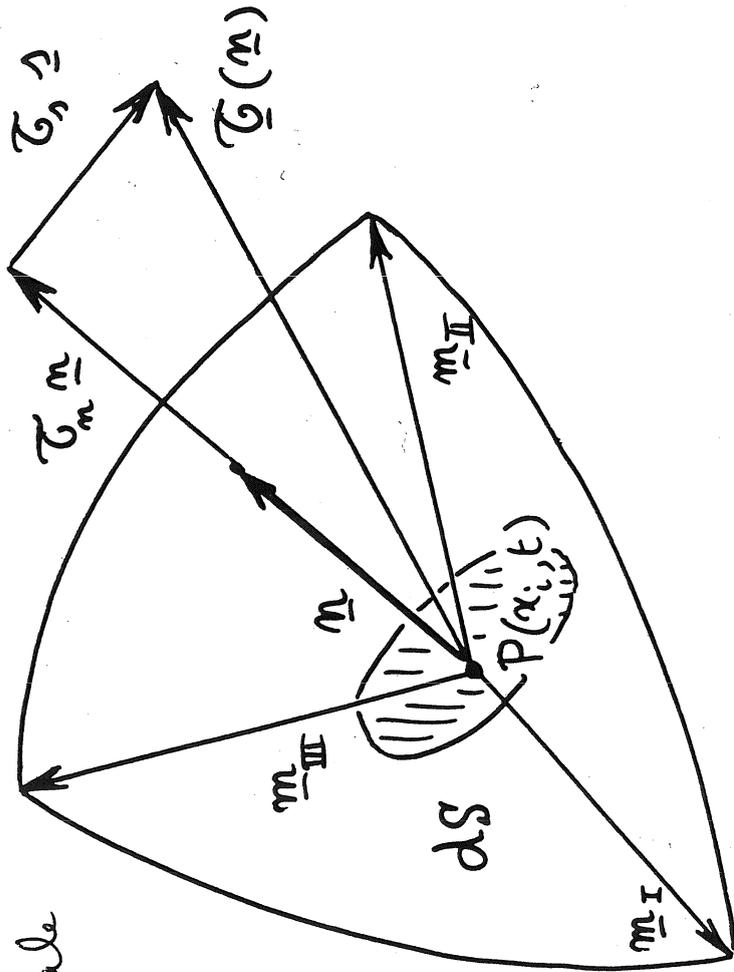
Formes locales des lois de conservation

Etablissement des relations $\begin{cases} \tau_i(\underline{m}) = \sigma_{ji} m_j \\ q_i(\underline{m}) = -q_j m_j \end{cases}$

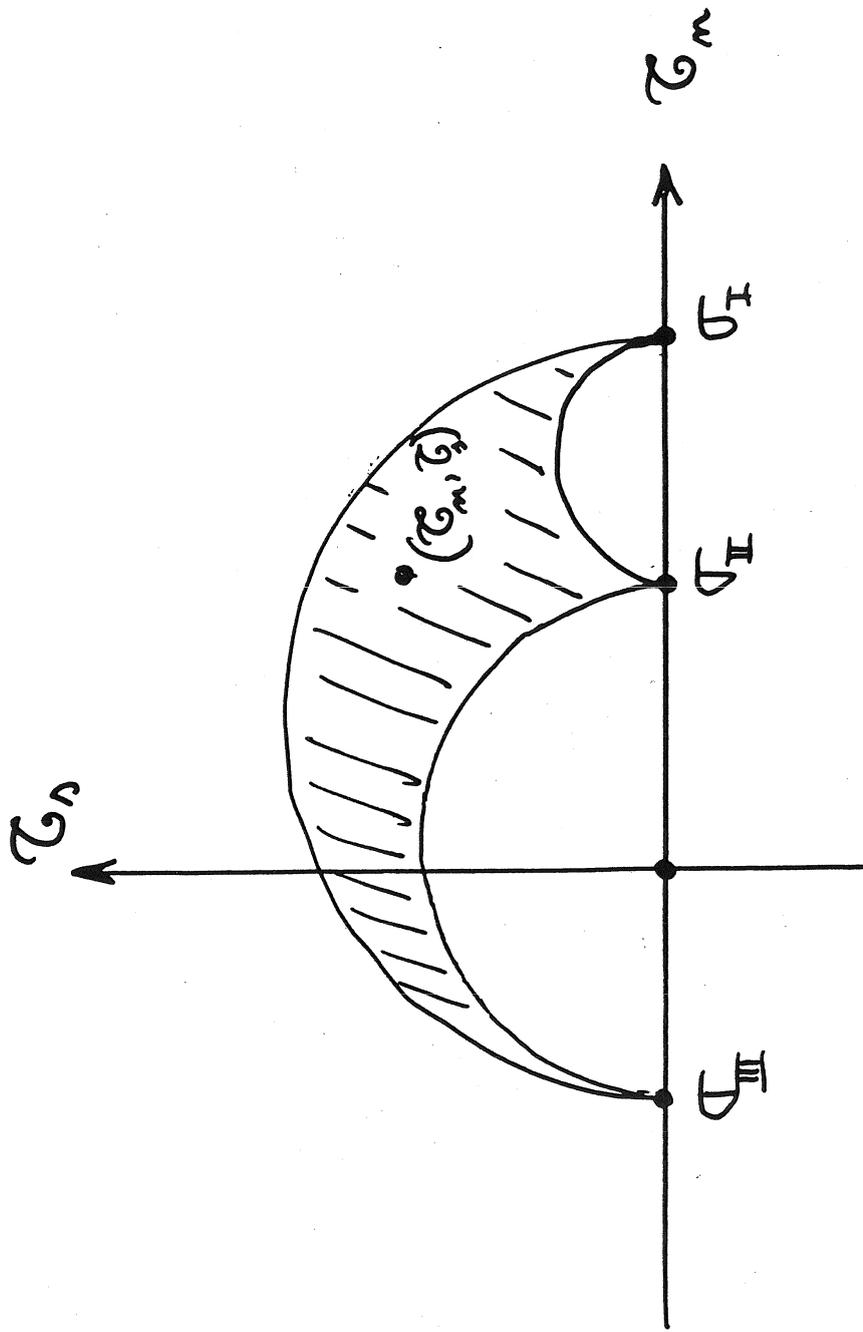


28) Cercles de Mohr

Composante normale et tangentielle de la densité de forces de contact (en un point, à un instant, pour une orientation).

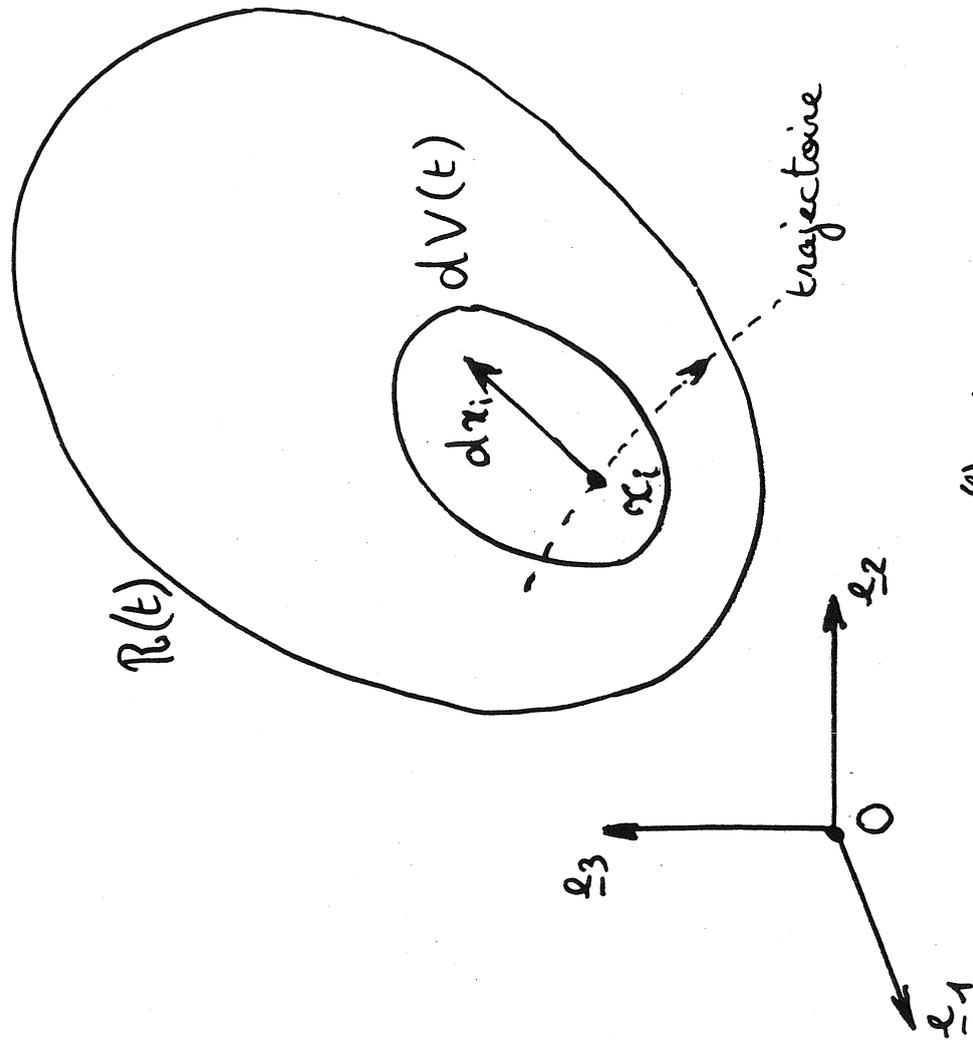
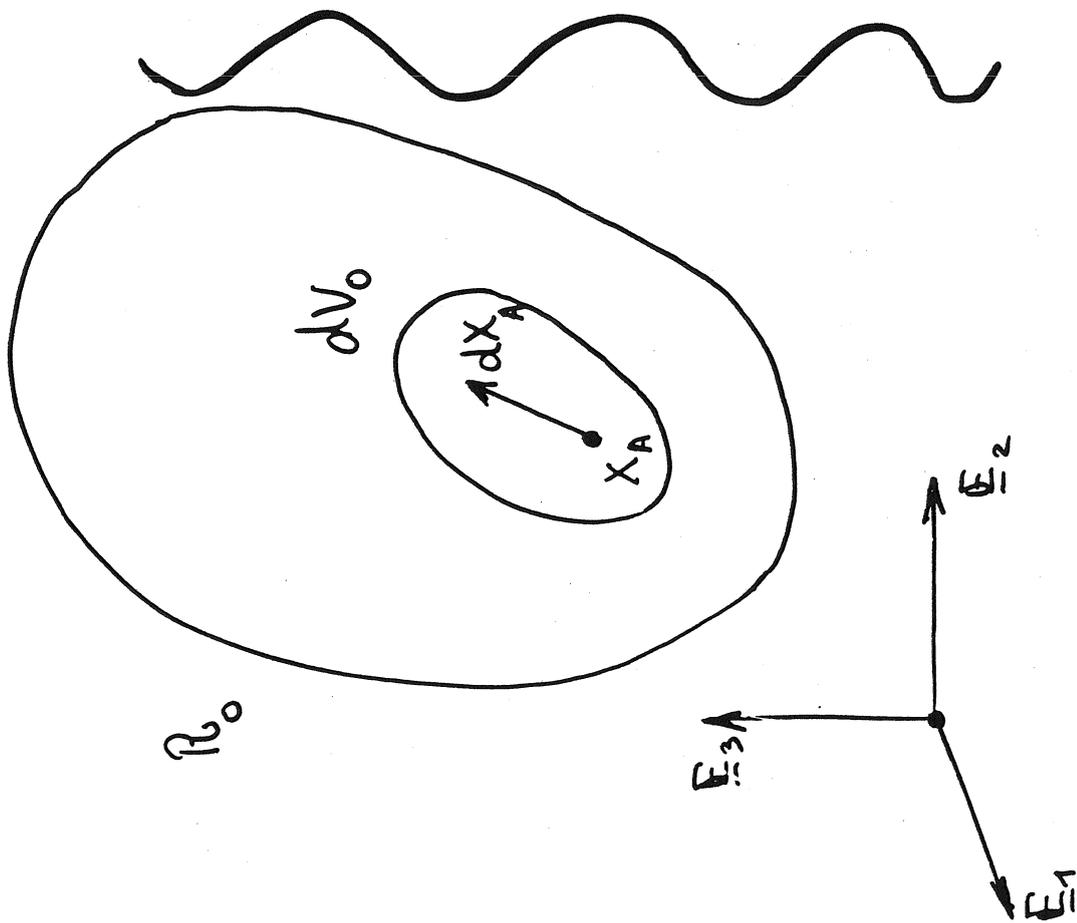


$$\left\{ \begin{array}{l} \tau_m = \tau(\bar{m}) \cdot \bar{m} \\ \tau_n = \|\tau(\bar{m}) - \bar{m} \tau_m\| \end{array} \right.$$



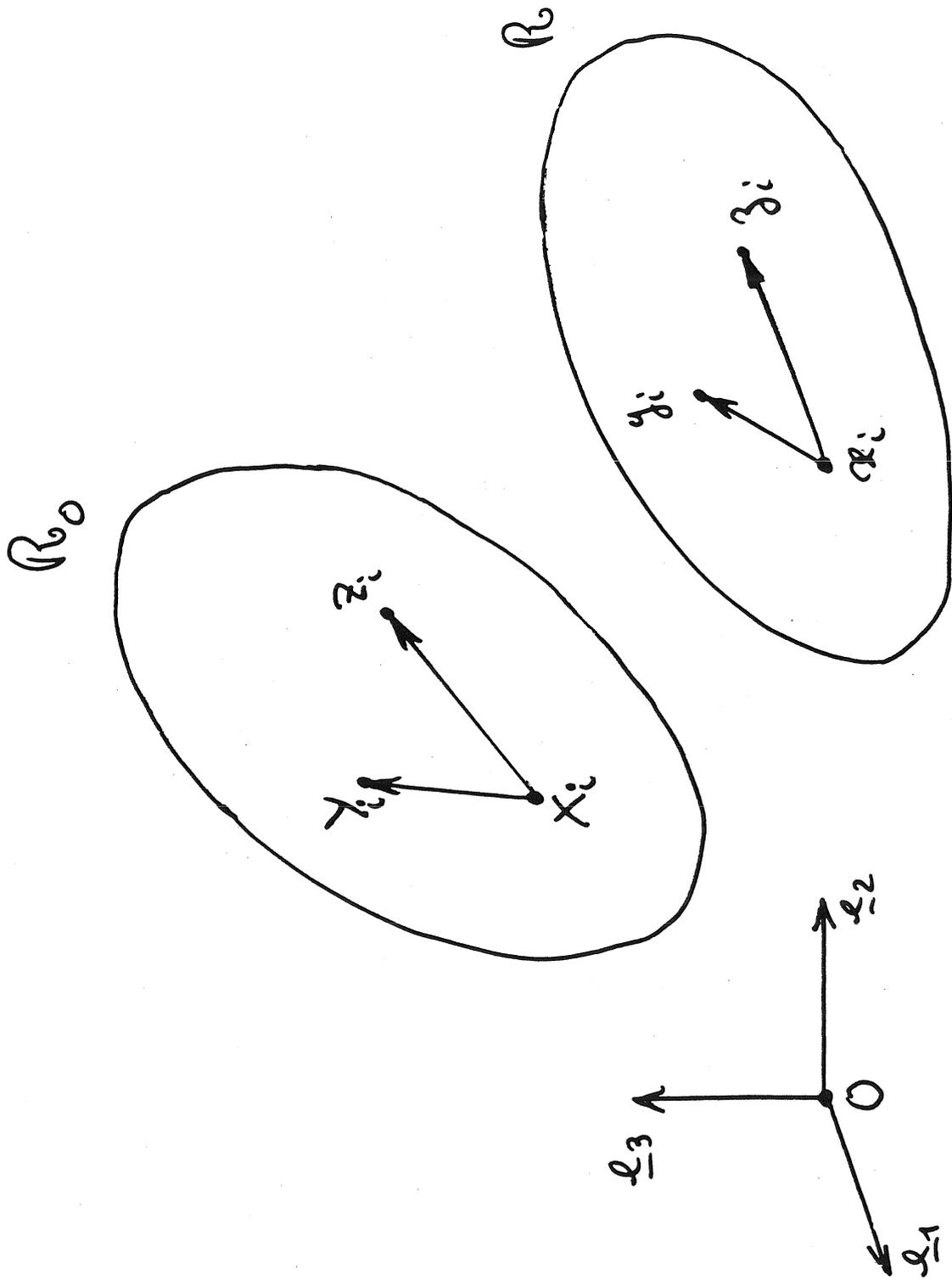
29) Cercles de Mohr

Diagramme des couples (composante normale des forces de contact, composante tangentielle des forces de contact) possibles en un point à un instant (diagramme local)

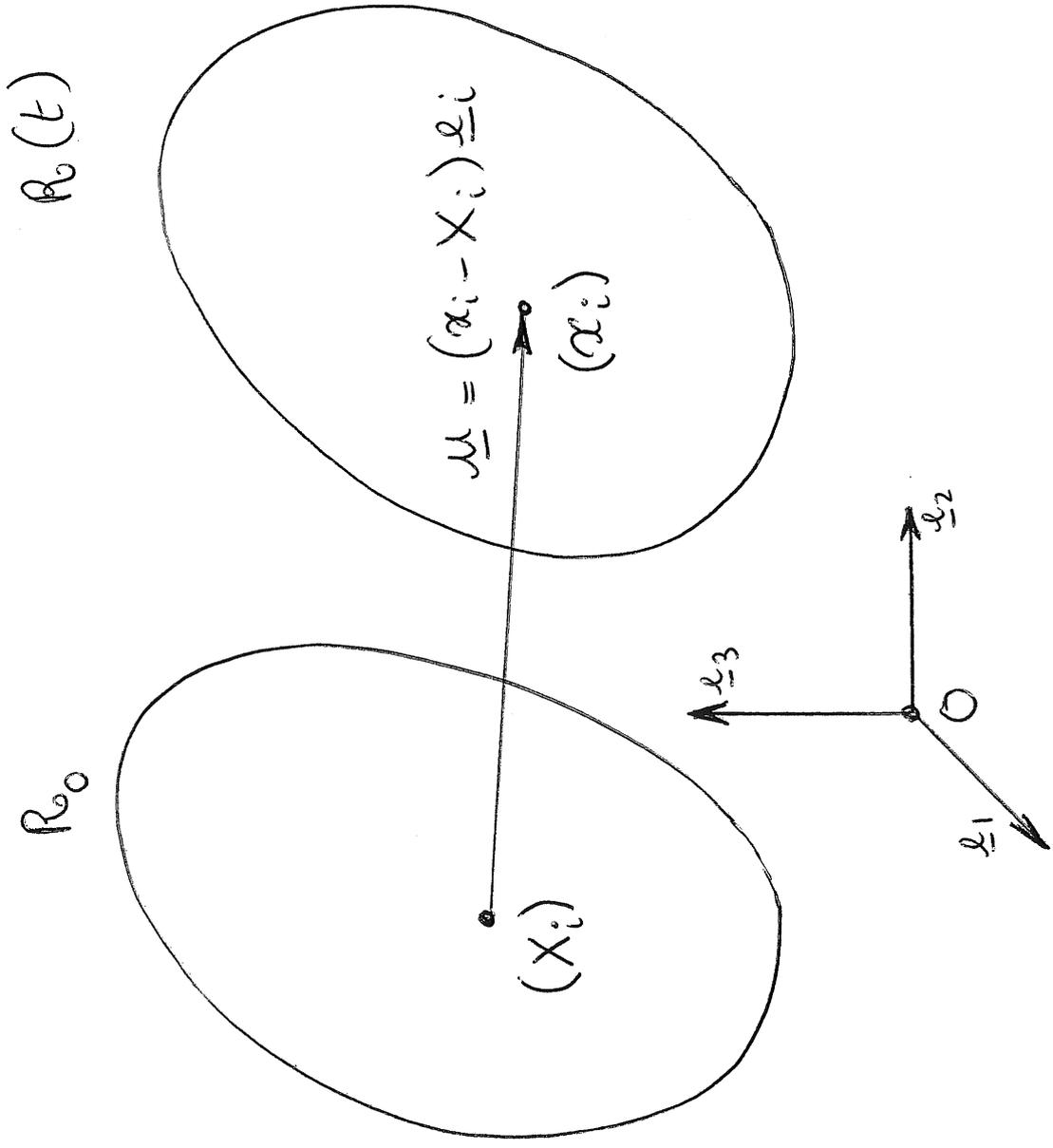


$$\begin{cases} x_i = x_i^{(t)}(X_A, t) \\ dx_i = F_{iA}^{(t)}(X_A, t) dX_A \end{cases}$$

Déformation
Interprétation du tenseur
des gradients de déformation



(31) Déformation | Changement affine de configuration

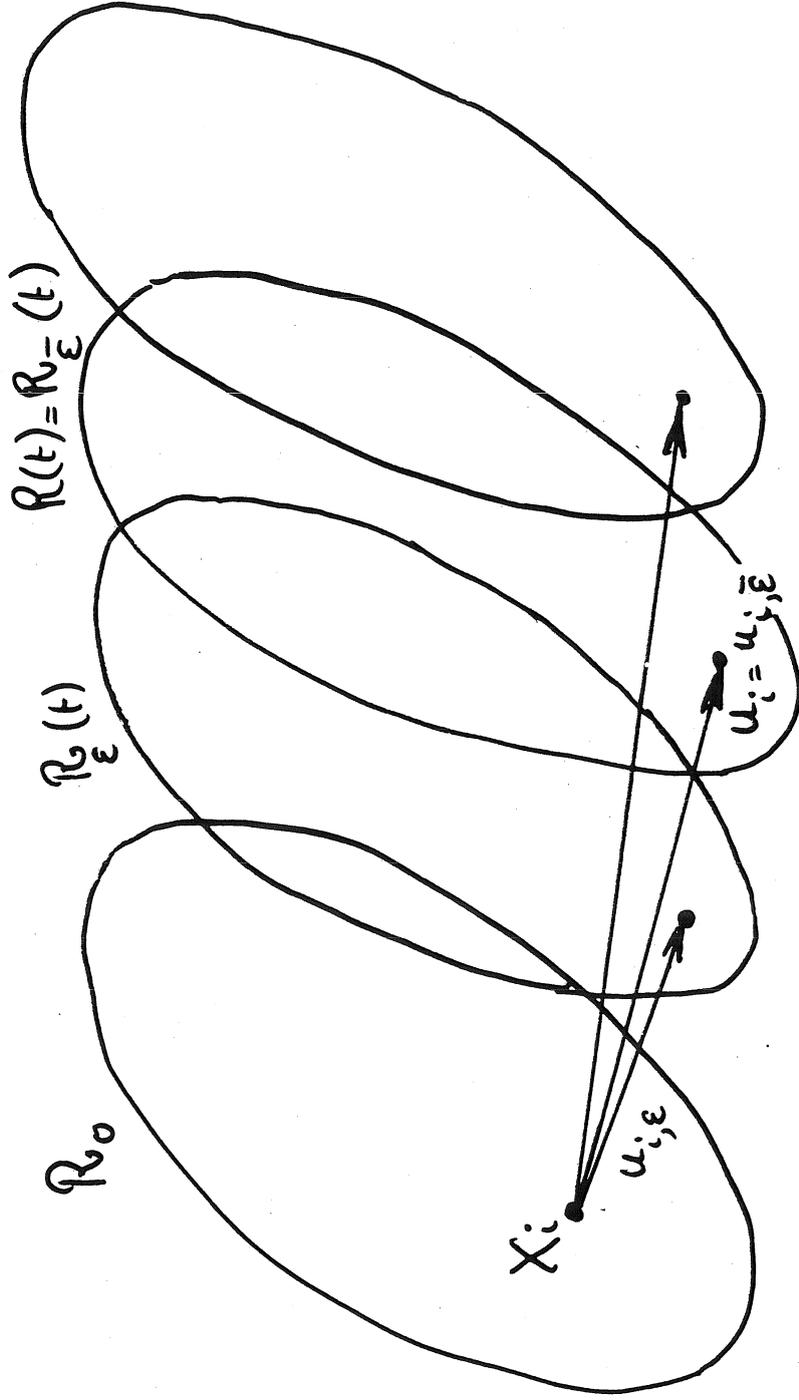


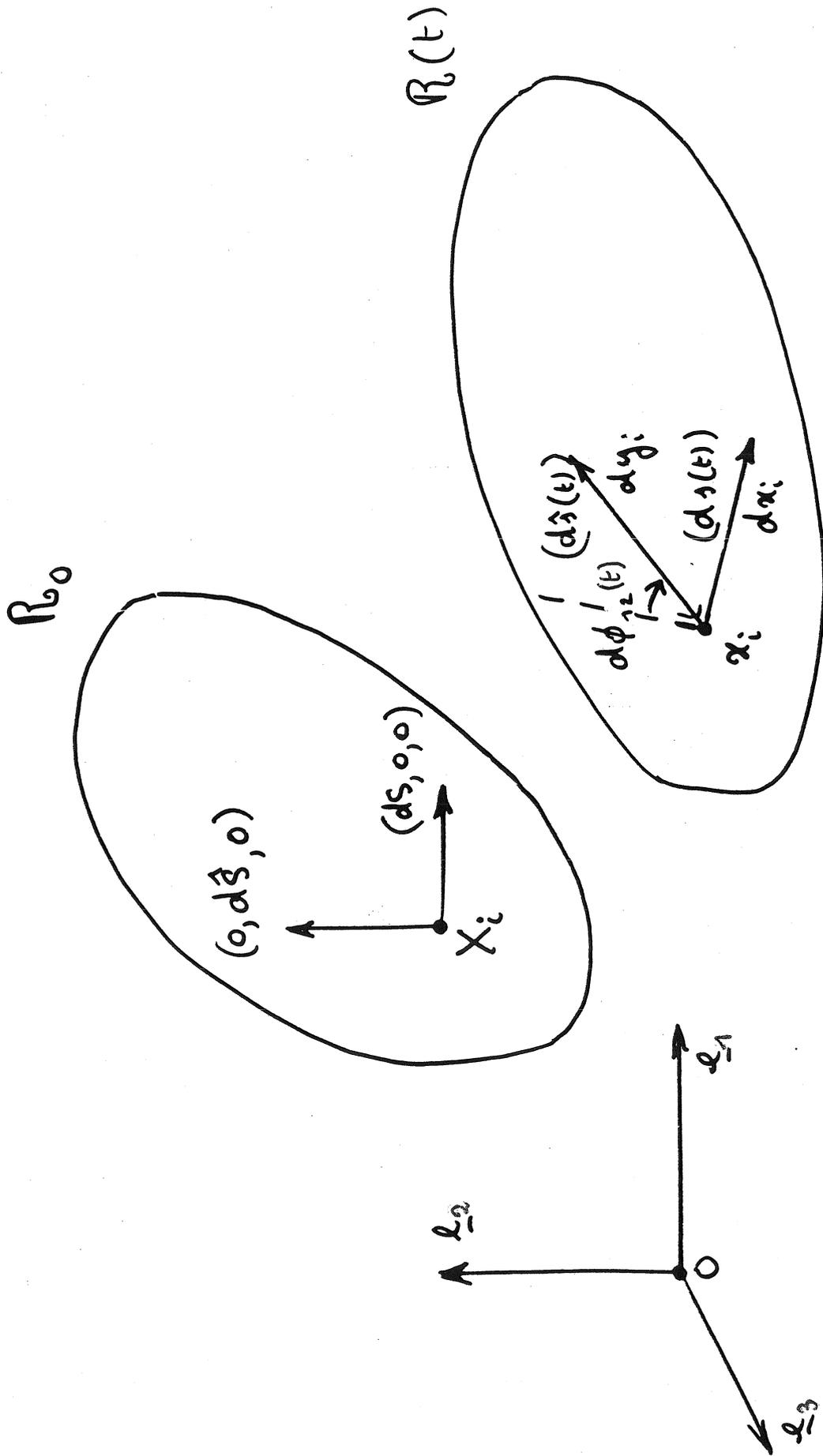
③② Vecteur déplacement

(33)

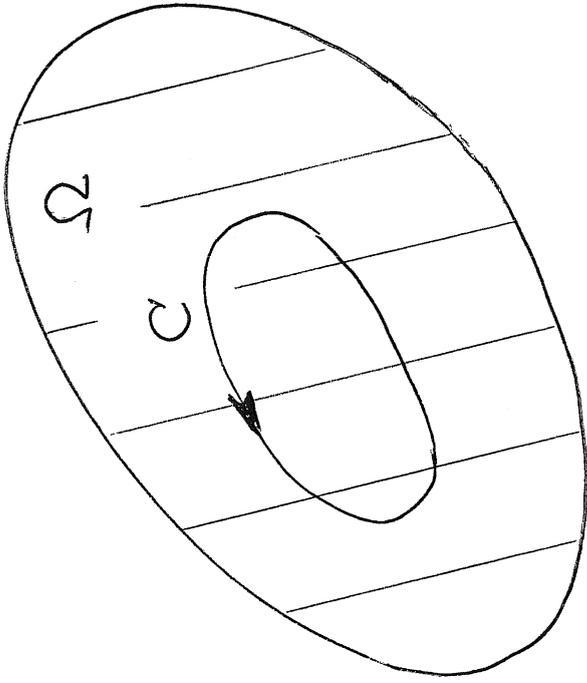
Petits déplacements

Position du problème
Famille de déplacements paramétrée par ε

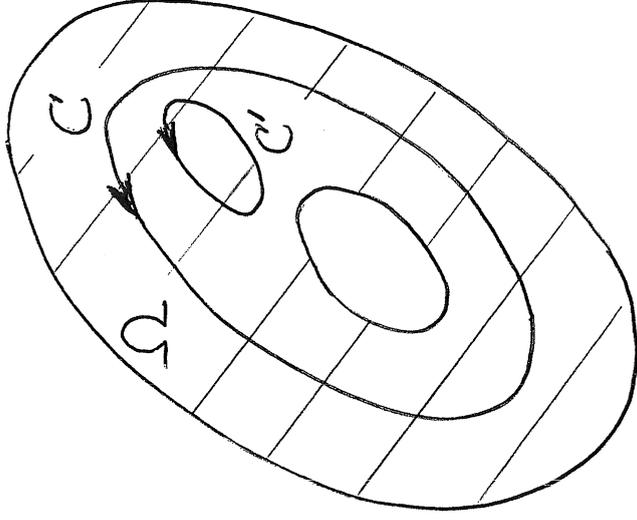




34 Petits déplacements
 Interprétation des Composantes du tenseur des
 déformations infinitésimales

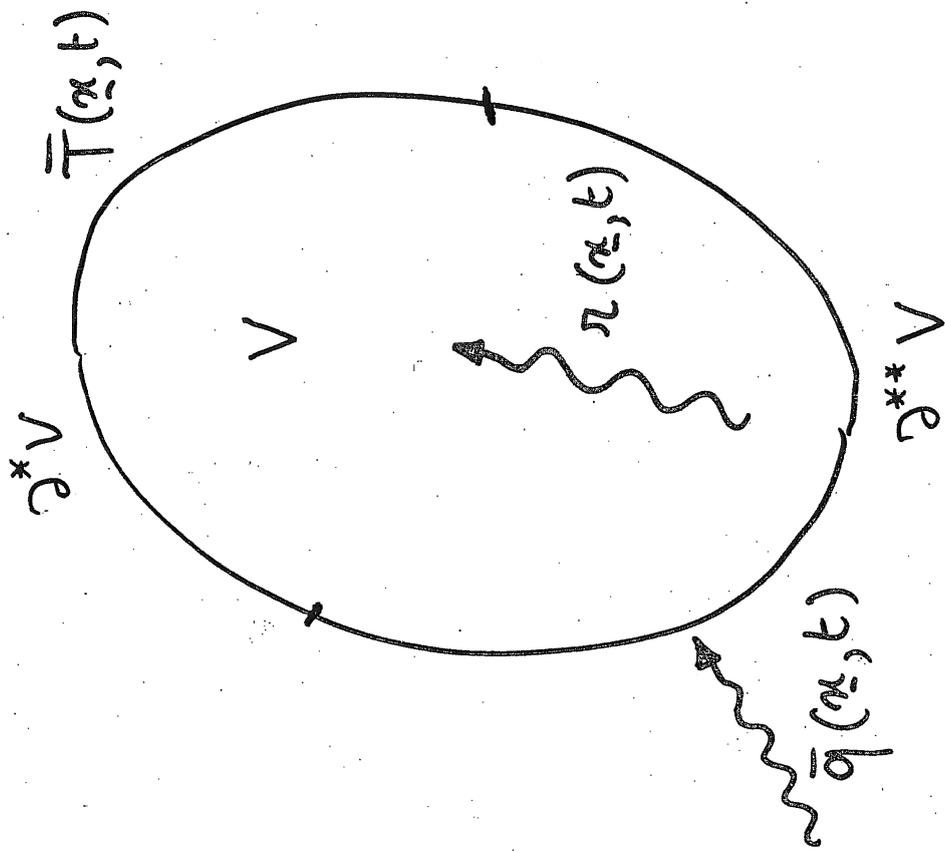


Ω est simplement connexe
 (C peut être déformée continuellement en un point)



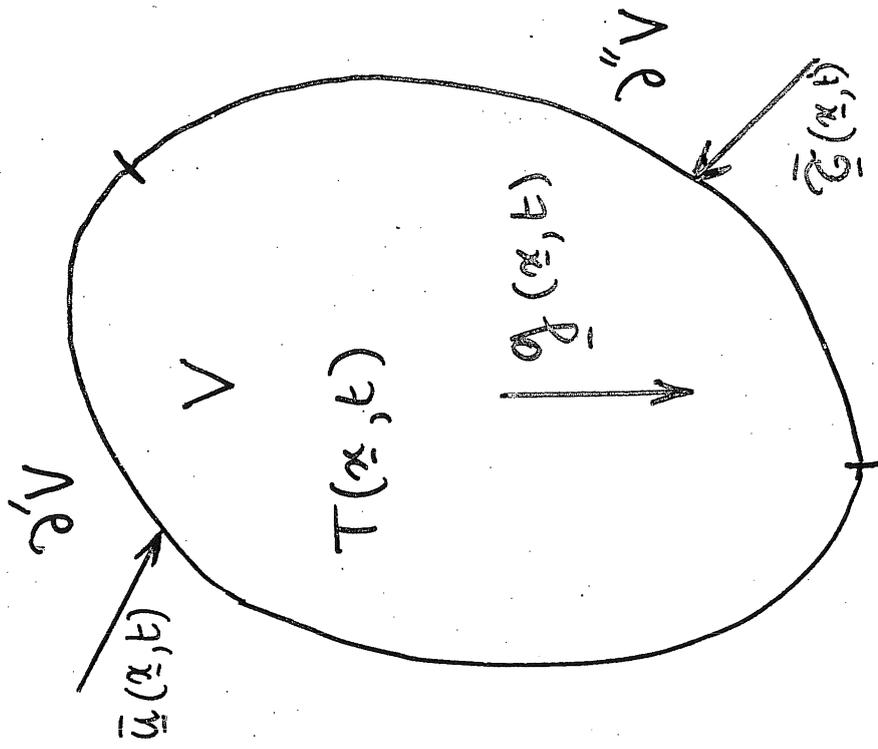
Ω n'est pas simplement connexe (C ne peut pas être déformée continuellement en un point — mais bien C')

③5 Notion de domaine simplement connexe



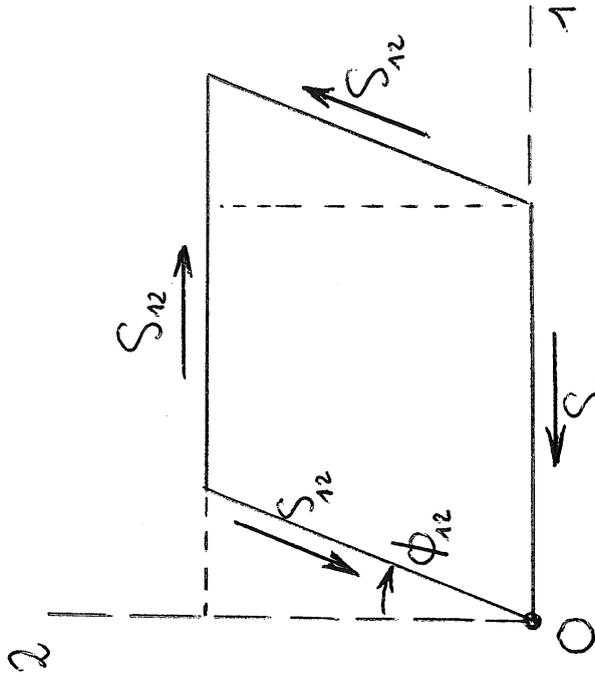
Problème thermique

découplé

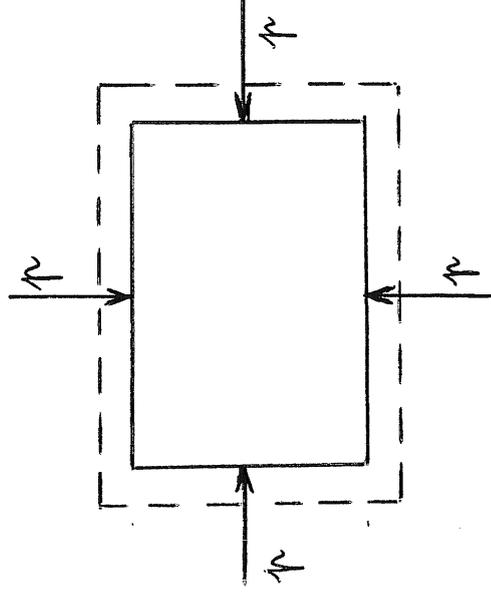


Problème élastique

avec thermique précalculée

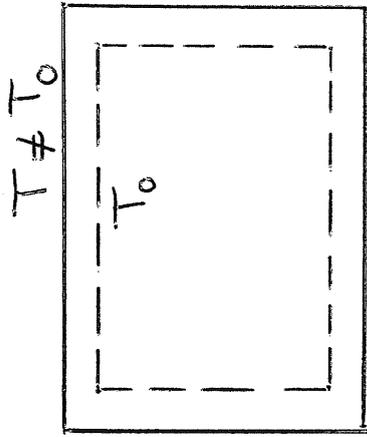


Cisaillement simple
isotherme

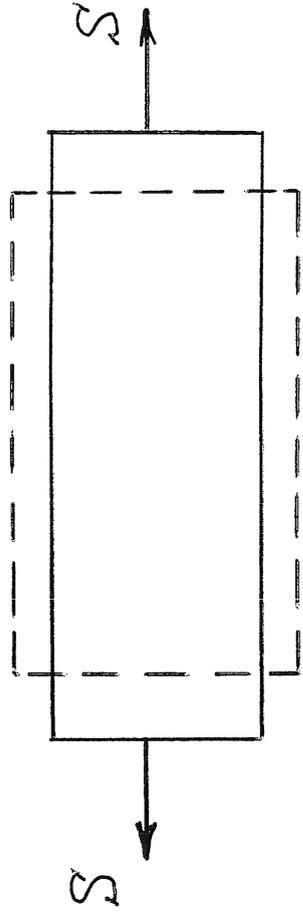


Compression simple
isotherme

(37) Expériences élastiques homogènes

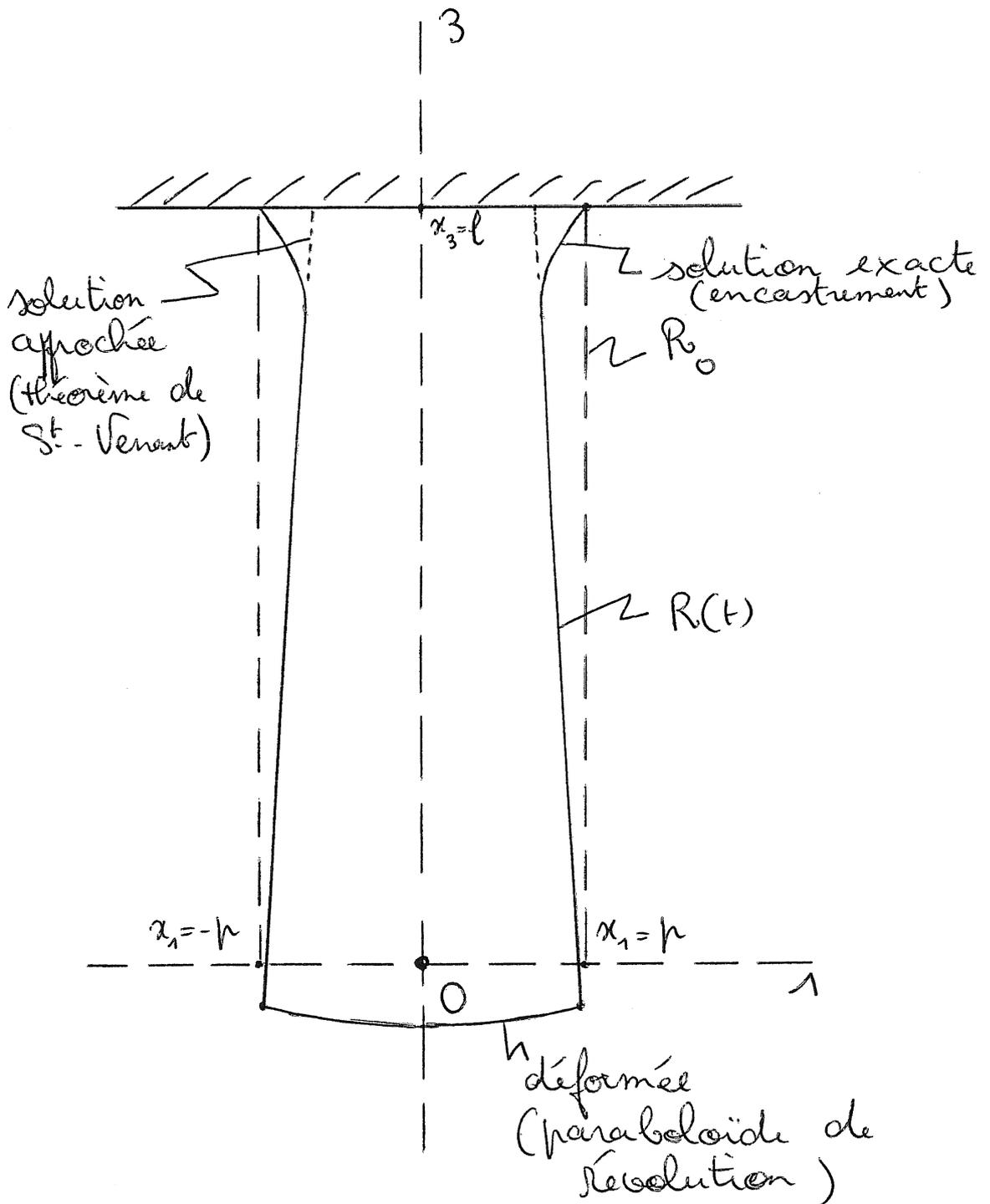


Dilatation
simple

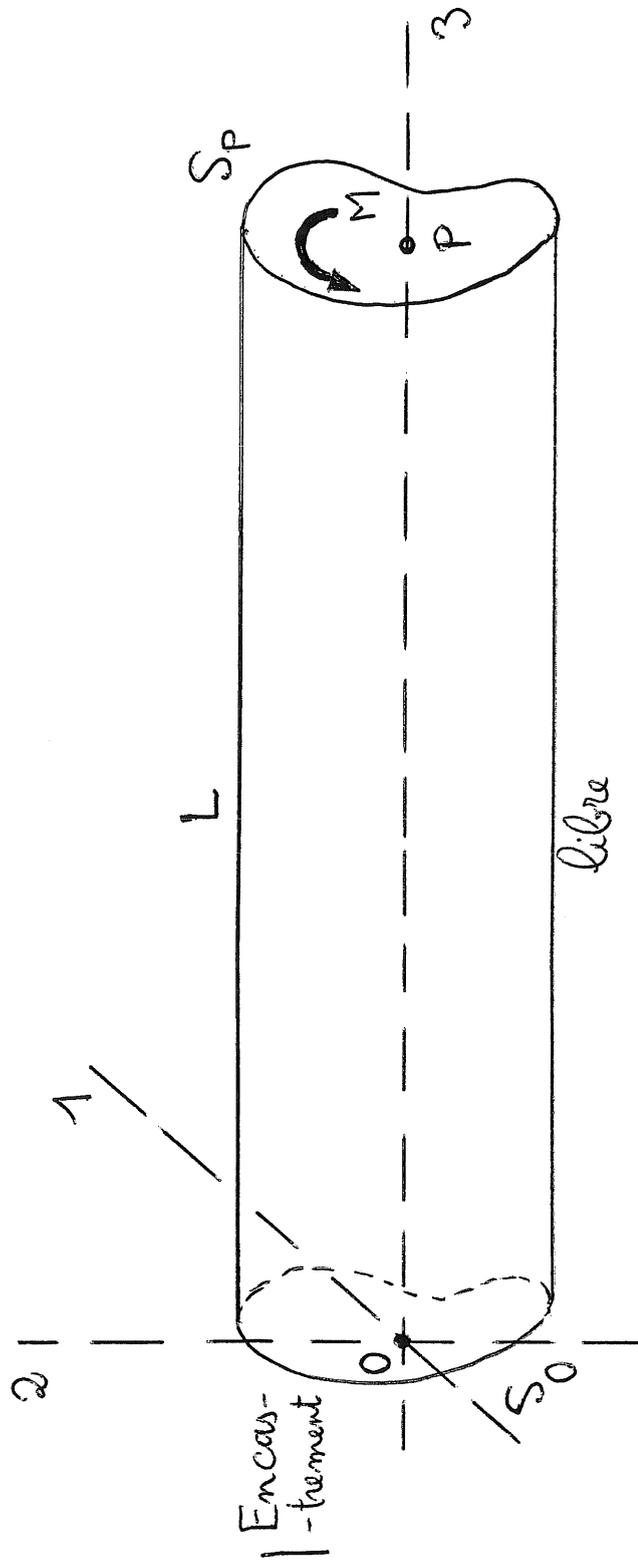


Traction simple
isotherme

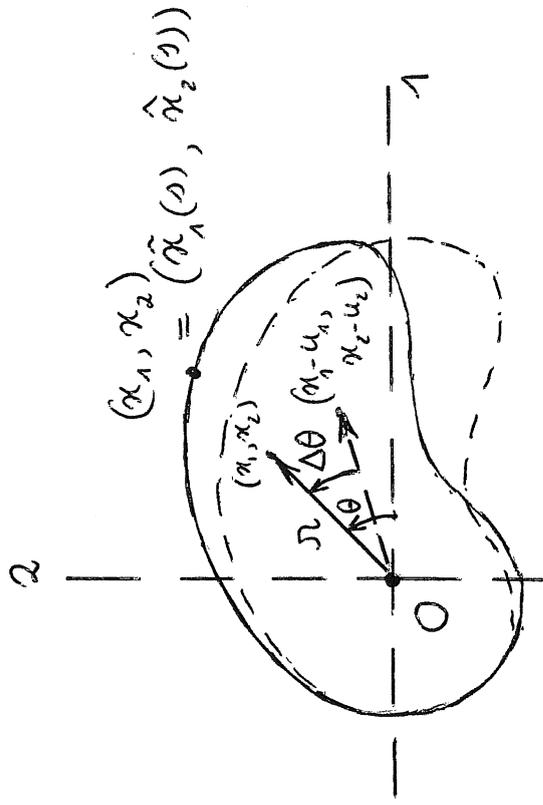
③⑧ Expériences élastiques homogènes



39 Allongement d'une poutre
sous son poids propre



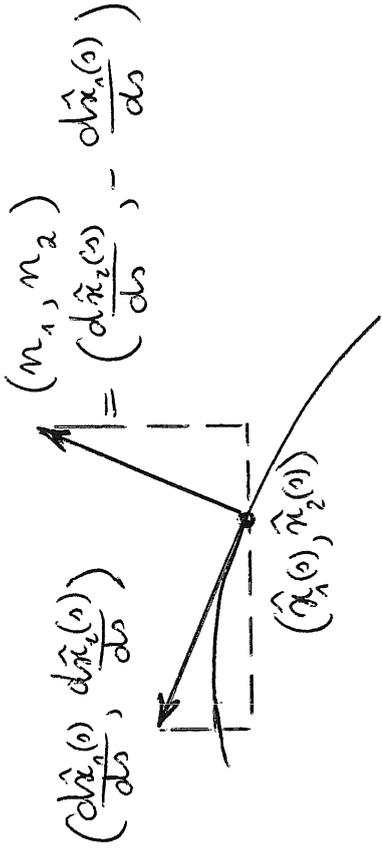
(40) Torsion d'une barre cylindrique



Rotation d'une section
 | d'un angle $\Delta\Theta = \delta x_3$

(41)

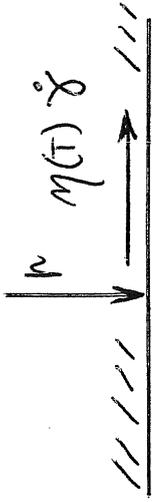
Torsion d'une barre cylindrique



Normale et tangente
 | à la surface latérale

Impossible en statique

| Absence d'effets tranchants



Contraintes exercées par la paroi supérieure sur le fluide

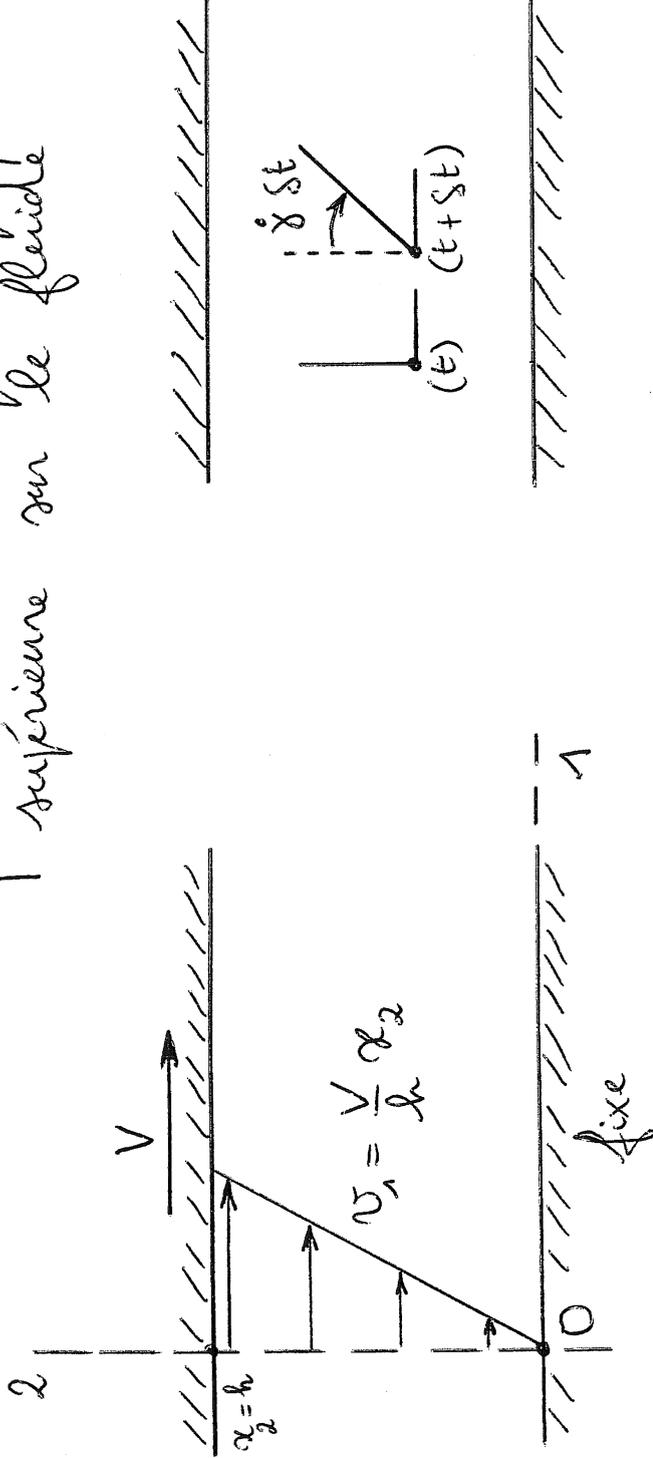
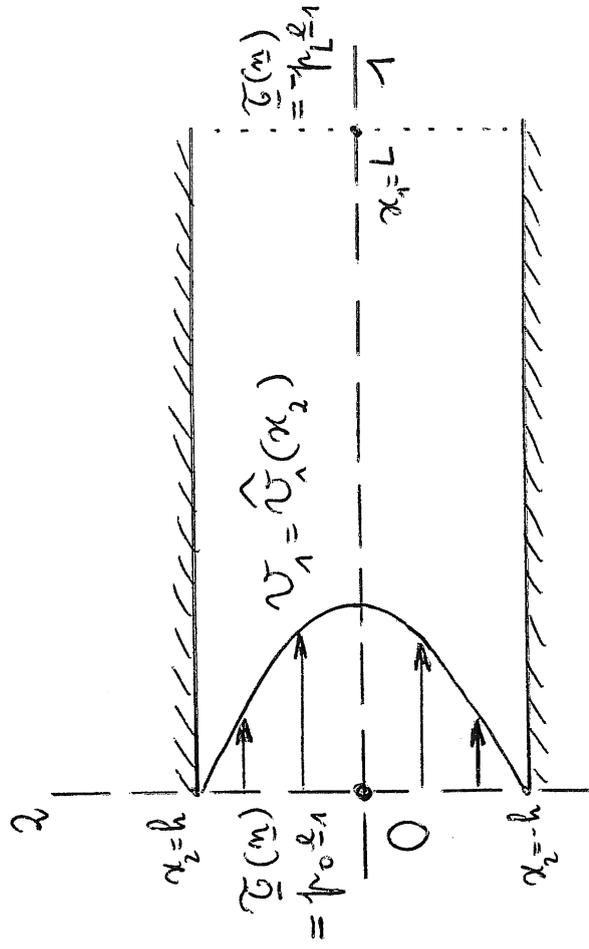


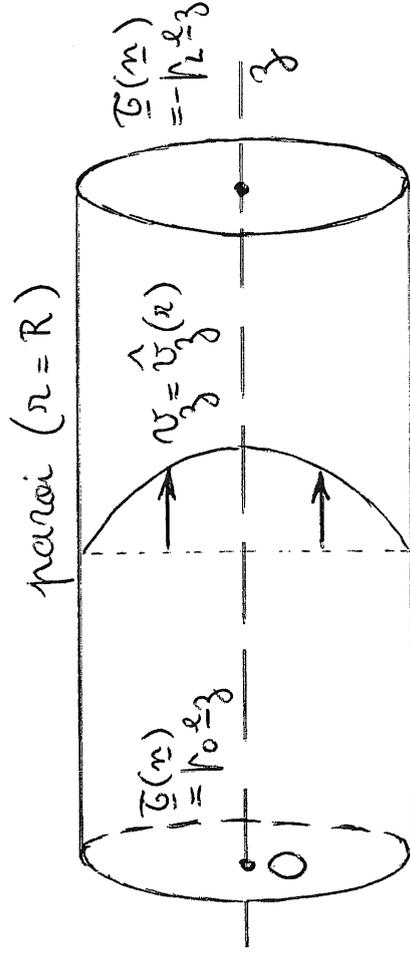
Schéma général

Effet de cisaillement

(42) Expérience de cisaillement simple

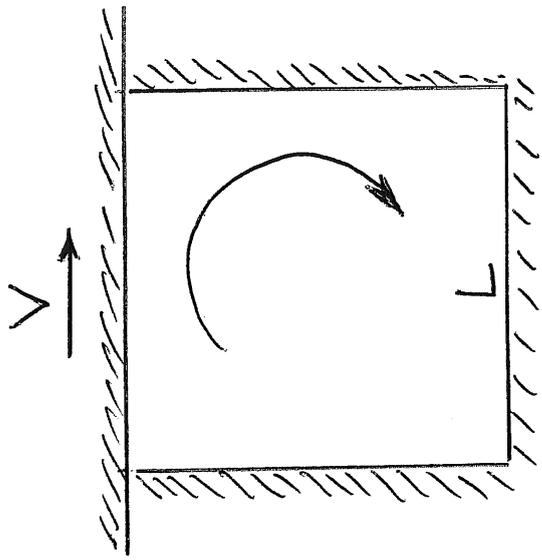


| Entre deux plaques

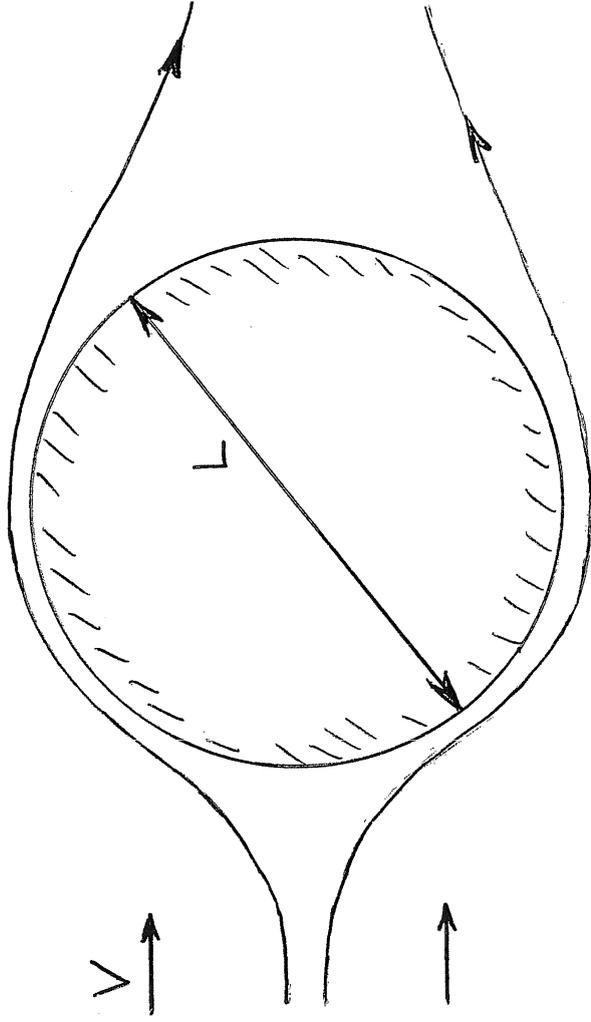


| Dans un tube

(43) Écoulements de Poiseuille



Ecoulement dans
une cavité carrée



Ecoulement autour
d'un cylindre

(44) Longueur et vitesses caractéristiques d'un écoulement