

MQANT 1110 - Mathématique de gestion 1

partie algèbre

Année académique 2025-2026

Enrico M. Vitale

13 décembre 2025

Institut de recherche en mathématique et physique, Faculté des sciences, UCLouvain

Table des matières

1. systèmes d'équations linéaires
2. opérations sur les vecteurs et sur les matrices
3. la méthode de Gauss
4. matrices inversibles et déterminants
5. sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (approfondissement)
6. solutions approchées (approfondissement)

systemes d'équations linéaires

175. Equations algébriques linéaires

Une équation linéaire est une équation du type

polynôme de premier degré = terme indépendant

Exemples :

- (a) $3x + 8y - 6z = 4$ est une équation linéaire en trois variables x, y, z
- (b) $3xy + 8y - 6z = 4$ n'est pas linéaire à cause du terme $3xy$
- (c) $3x + 8y - 6\cos(z) = 4$ n'est pas linéaire à cause du terme $\cos(x)$

176. Systèmes d'équations linéaires : exemples

Nous allons étudier les systèmes d'équations linéaires avec autant d'équations et autant de variables qu'on veut.

Exemples :

$$(a) \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ -9x - y + z = -7 \end{cases}$$

est un système avec deux équations en trois variables. Le triplet $(x = 1, y = 2, z = 4)$ est solution du système et il y en a d'autres.

$$(b) \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

est un système avec trois équations en deux variables. Ce système n'admet aucune solution.

177. Systèmes d'équations linéaires : le cas général

La notation générale pour un système avec m équations en n variables est

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

Les a_{ij} , pour $i = 1, \dots, m$ et $j = 1, \dots, n$, sont les coefficients.

Les b_i , pour $i = 1, \dots, m$, sont les termes indépendants.

Les x_j , pour $j = 1, \dots, n$, sont les variables.

178. Combien de solutions peut avoir un système ?

Pour un système S d'équations linéaires, seulement trois cas peuvent se présenter :

- Le système S n'a pas de solutions. On dira que S est impossible.
- Le système S admet une solution unique. On dira que S est déterminé.
- Le système S admet une infinité de solutions. On dira que S est indéterminé.

Attention : solution d'un système S signifie solution de chaque équation qui apparaît dans S .

Attention : pour savoir dans quel cas on est, il ne suffit pas de compter le nombre d'équations et de variables.

179. Exemples avec interprétation géométrique

$$(a) S: \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

deux droites parallèles $\Rightarrow$ pas de points d'intersection $\Rightarrow$ le système n'a pas de solutions : $Sol(S) = \emptyset$

$$(b) S: \begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

deux droites sécantes $\Rightarrow$ un seul point d'intersection $\Rightarrow$ le système admet une solution unique : $Sol(S) = \{(1, 0)\}$

$$(c) S: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases}$$

deux droites confondues $\Rightarrow$ une infinité de points d'intersection $\Rightarrow$ le système admet une infinité de solutions :

$$Sol(S) = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

180. Éléments constitutifs d'un système

Un système S est déterminé par trois éléments constitutifs :

- La matrice des coefficients
- Le vecteur des termes indépendants.
- Le vecteur des variables.

181. Exemple 1

$$S: \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ -9x - y + z = -7 \end{cases}$$

La matrice des coefficients $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -9 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ a 2 lignes et 3 colonnes

Le vecteur des termes indépendants $\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$ a 2 composantes

Le vecteur des variables $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ a 3 composantes.

182. Exemple 2

$$S: \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

La matrice des coefficients $\begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ a 3 lignes et 2 colonnes

Le vecteur des termes indépendants $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ a 3 composantes

Le vecteur des variables $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ a 2 composantes.

183. Le cas général

Dans le cas général

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

La matrice des coefficients

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

est une matrice à m lignes (autant de lignes que d'équations dans S)
et n colonnes (autant de colonnes que de variables dans S).

184. Le cas général

Dans le cas général

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Le vecteur des termes indépendants $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ a m composantes

Le vecteur des variables $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a n composantes.

185. Le cas général

Dans le cas général

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

On aura besoin aussi de la matrice complète, qui est la matrice des coefficients à laquelle on ajoute, comme dernière colonne, la colonne des termes indépendants :

$$(A | \vec{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

186. Exemples

$$(a) \ S: \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ -9x - y + z = -7 \end{cases}$$

La matrice complète est la matrice a 2 lignes et 4 colonnes

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 & 8 \\ -9 & -1 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

$$(b) \ S: \begin{cases} 7x_1 - 5x_2 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 = 0 \\ 3x_2 = 6 \end{cases}$$

La matrice complète est la matrice a 3 lignes et 3 colonnes

$$\begin{pmatrix} 7 & -5 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

187. Notation pour les scalaires, les vecteurs et les matrices

Notations pour les scalaires, les vecteurs et les matrices :

$\mathbb{R}$ = ensemble des nombres réels (appelés aussi scalaires)

$\mathbb{R}^n$ = $\{\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_j \in \mathbb{R} \text{ pour tout } j = 1, \dots, n\}$
= ensemble des vecteurs à n composantes réelles

$\mathbb{R}^{m \times n}$ = $\{A = (a_{ij}) \mid a_{ij} \in \mathbb{R} \text{ pour tout } i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$
= ensemble des matrices à m lignes, n colonnes et entrées réelles

188. Exemples

$$(a) \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ mais aussi } (8, -7) \in \mathbb{R}^2$$

$$(b) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ mais aussi } (0, 0, 6) \in \mathbb{R}^3$$

$$(c) \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

opérations sur les vecteurs et sur les matrices

189. Égalité entre vecteurs

L'égalité entre deux vecteurs

- est possible uniquement si le nombre de composantes est le même
- et revient à l'égalité composante par composante

Exemples :

(a) $(1, 2) \neq (1, 2, 3)$

(b) $(5, 5) \neq (5, 5, 5)$

(c) $(1, 2, 3) \neq (3, 2, 1)$

(d) $(1, 3, 9) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}$

190. Le vecteur nul

Pour chaque $n \in \mathbb{N}, n \geq 1$, on définit le vecteur nul comme le vecteur dont toutes les composantes sont nulles :

$$\vec{0} = (0, 0, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$$

Exemples :

(a) Si $n = 1$, alors $\vec{0} = 0 \in \mathbb{R}$

(b) Si $n = 2$, alors $\vec{0} = (0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

191. Produit d'un scalaire par un vecteur

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ est un scalaire et $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur à n composantes, on définit un nouveau vecteur $\alpha \cdot \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ à n composantes par la formule

$$\alpha \cdot \vec{x} = \alpha \cdot (x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

Exemples :

(a) $3 \cdot (4, 5, 6) = (12, 15, 18)$

(b) $0 \cdot (6, -4, \frac{1}{2}, 0, 8) = (0, 0, 0, 0, 0)$

(c) $5 \cdot (0, 0) = (0, 0)$

(d) $-(6, -4, \frac{1}{2}, 0, 8) = (-6, 4, -\frac{1}{2}, 0, -8)$

(e) $\frac{2}{3} \cdot \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{8}{3} \end{pmatrix}$

192. Somme de deux vecteurs

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs à n composantes, on définit un nouveau vecteur $\vec{x} + \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ à n composantes par la formule

$$\vec{x} + \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

Exemples :

(a) $(1, 2, 3) + (4, 5, 6) = (5, 7, 9)$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

(c) $(7, 11) + (0, 0) = (7, 11)$

193. Combinaisons linéaires de scalaires et vecteurs

Une combinaison linéaire est une somme de multiples de vecteurs :
si $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R}$ et $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$, alors

$$\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \alpha_2 \cdot \vec{x}_2 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$$

Par exemple, voici une combinaison linéaires de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$:

$$4 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 12 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

194. Expression vectorielle d'un système : un exemple

Les combinaisons linéaires de vecteurs nous permettent d'interpréter un système comme une équation entre vecteurs.

Par exemple, le système $S: \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ -9x - y + z = -7 \end{cases}$ revient à

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x + 5y - z \\ -9x - y + z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x \\ -9x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5y \\ -y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

195. Expression vectorielle d'un système : le cas général

Voici, dans le cas général, un système et son expression vectorielle :

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$S: x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_n \cdot C_n = \vec{b}$$

- $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$ sont les colonnes de la matrice des coefficients
- $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ est le vecteur des termes indépendants

Trouver une solution du système S revient à montrer que la colonne des termes indépendants est combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients. Dans l'exemple précédent, $(1, 2, 4)$ est solution de S car

$$1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -9 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

196. Combinaisons linéaires de scalaires et matrices

Tout comme pour les vecteurs, on peut définir

- l'égalité entre deux matrices $m \times n$ comme égalité place par place,
- la matrice nulle Θ dont toutes les entrées sont égales à zéro,
- le produit d'un scalaire par une matrice comme produit du scalaire par chaque élément de la matrice,
- la somme de deux matrices comme somme place par place,
- les combinaisons linéaires de plusieurs matrices.

Voyons juste un exemple de combinaison linéaire :

$$\begin{aligned} 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 12 & 15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 4 & 8 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

197. Produit scalaire de deux vecteurs

Si $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ et $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ sont deux vecteurs à n composantes, on définit un scalaire $\vec{x} \cdot \vec{y} \in \mathbb{R}$ par la formule

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = (x_1, x_2, \dots, x_n) \cdot (y_1, y_2, \dots, y_n) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Exemples :

(a) $(1, 2, 3) \cdot (1, 2, 3) = 1^2 + 2^2 + 3^2 = 14 > 0$

(b) $(1, 2, 3) \cdot (1, 2, -3) = 1^2 + 2^2 - 3^2 = -4 < 0$

(c) $(1, 2, 3) \cdot (1, 1, -1) = 1 + 2 - 3 = 0$

A remarquer :

1. $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$ (symétrie)
2. $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = \vec{x} \cdot \vec{y} + \vec{x} \cdot \vec{z}$ (distributivité)
3. si $\vec{x} \neq \vec{0}$, alors $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0$ (caractère défini positif)
4. $\vec{0} \cdot \vec{y} = 0$ pour tout $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$

198. Produit matriciel

En utilisant le produit scalaire entre vecteurs, on peut définir le produit matriciel, appelé aussi produit lignes par colonnes :

si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et $B = (b_{jk}) \in \mathbb{R}^{n \times p}$, on pose $A \cdot B = (c_{ik}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ où

$$c_{ik} = (i\text{-ème ligne de } A) \cdot (k\text{-ème colonne de } B)$$

$$= (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{nk} \end{pmatrix}$$

$$= a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{in}b_{nk}$$

199. Condition de compatibilité

A remarquer :

- Condition de compatibilité : pour effectuer le produit $A \cdot B$, il faut que le nombre de colonnes de A soit égale au nombre de lignes de B . Si cette condition n'est pas satisfaite, on ne peut pas effectuer le produit matriciel $A \cdot B$.
En effet, c'est cette condition qui fait que chaque ligne de A a autant de composantes que chaque colonne de B , ce qui permet d'effectuer le produit scalaire des lignes de A avec les colonnes B .
- La matrice produit $A \cdot B$ a autant de lignes que la matrice A et autant de colonnes que la matrice B .

200. Exemple

Voyons un exemple en détail :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 4}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 3}$$

Les matrices A et B sont compatibles car A a 4 colonnes et B a 4 lignes.

La matrice $A \cdot B$ aura 2 lignes (comme A) et 3 colonnes (comme B).

Notons par $L_1, L_2 \in \mathbb{R}^4$ les deux lignes de A et par $C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}^4$ les trois colonnes de B .

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} L_1 \cdot C_1 & L_1 \cdot C_2 & L_1 \cdot C_3 \\ L_2 \cdot C_1 & L_2 \cdot C_2 & L_2 \cdot C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 30 & 37 \\ 59 & 86 & 113 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 3}$$

201. Propriétés du produit matriciel

Voici les propriétés qu'on peut utiliser pour développer les calculs qui font intervenir le produit matriciel :

1. associativité : $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$

2. distributivités :

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C, \quad (A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$$

3. élément neutre : si $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, alors $I_m \cdot A = A = A \cdot I_n$,
où, par exemple, pour $n = 3$ on a

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4. $A \cdot (\alpha \cdot B) = \alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B$, où $\alpha \in \mathbb{R}$

Deux points d'attention :

1. Le produit matriciel n'est pas commutatif : en général $A \cdot B \neq B \cdot A$ (même lorsque les deux produits sont définis).
2. Le produit matriciel n'est pas simplifiable :
 - (a) $A \cdot B = A \cdot C$ avec $A \neq \Theta$ n'implique pas $B = C$,
 - (b) $A \cdot B = \Theta$ n'implique pas que $A = \Theta$ ou $B = \Theta$.

Exemple :

si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, on a

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

203. Expression matricielle d'un système : un exemple

Le produit matriciel permet d'exprimer différemment un système.

Par exemple, le système $S: \begin{cases} 2x + 5y - z = 8 \\ -9x - y + z = -7 \end{cases}$ s'écrit comme

$$S: \begin{pmatrix} 2 & 5 & -1 \\ -9 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \end{pmatrix}$$

où il faut interpréter le vecteur des variables $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ comme une matrice

à 3 lignes et 1 colonne.

204. Expression matricielle d'un système : le cas général

Voici, dans le cas général, l'expression matricielle d'un système :

$$S: \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

s'écrit comme $S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ où

- $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est la matrice des coefficients
- $\vec{x} \in \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n \times 1}$ est le vecteur des variables
- $\vec{b} \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$ est le vecteur des termes indépendants

la méthode de Gauss

205. Position du problème

Etudier un système d'équations linéaires

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

revient à répondre aux problèmes suivants :

1. Déterminer si le système S admet une unique solution, aucune solution, ou une infinité de solutions.
2. Si la solution est unique, la calculer.
3. Si S n'a pas de solutions, calculer les solutions dites approchées. Ce problème sera traité en approfondissement.
4. Si S a une infinité de solutions, trouver le plus petit nombre possible de solutions qui permettent de décrire toutes les autres.

La méthode de Gauss nous aide à répondre aux problèmes 1, 2 et 4.

206. Terminologie : degré de liberté d'un système

Le nombre de variables indéterminées qui restent dans la solution générale d'un système est dit degré de liberté du système.

Exemples :

$$(a) \ S: \begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \end{cases} \quad \text{Sol}(S) = \{(2, 1)\}$$

$\Rightarrow$ aucune variable indéterminée $\Rightarrow$ degré de liberté 0

$$(b) \ S: \begin{cases} x + y = 1 \\ 2x + 2y = 2 \end{cases} \quad \text{Sol}(S) = \{(x, 1 - x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow$ une variable indéterminée $\Rightarrow$ degré de liberté 1

$$(c) \ S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol}(S) = \{(x_1, 1 - x_1, x_3, -x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

$\Rightarrow$ deux variables indéterminées $\Rightarrow$ degré de liberté 2

207. Terminologie : vecteurs linéairement indépendants

Des vecteurs $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ sont

- linéairement dépendants si au moins l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres,
- linéairement indépendants (ou libres) dans le cas contraire.

Exemples :

- (a) $\vec{x}_1 = (1, 2), \vec{x}_2 = (2, 3), \vec{x}_3 = (7, 12)$ sont linéairement dépendants car $\vec{x}_3 = 3 \cdot \vec{x}_1 + 2 \cdot \vec{x}_2$
- (b) $\vec{x}_1 = (1, 1, 1), \vec{x}_2 = (1, 1, 0), \vec{x}_3 = (1, 0, 0)$ sont linéairement indépendants (à vérifier comme exercice, on verra plus loin une méthode générale pour établir cela).

208. Méthode de Gauss : un exemple facile

Commençons par un exemple facile qui permet de préciser notre objectif.
(et notamment le point 4 du slide “Position du problème”)

Soit le système d'une équation en trois variables

$$S_0: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

Nous pouvons décrire l'ensemble de ses solutions :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S_0) &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = -3x_1 - 2x_2\} \\ &= \{(x_1, x_2, -3x_1 - 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x_1, 0, -3x_1) + (0, x_2, -2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 \cdot (1, 0, -3) + x_2 \cdot (0, 1, -2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

209. Méthode de Gauss : suite de l'exemple facile

On peut tirer trois conclusions de la description de la solution générale

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S_0) &= \{(x_1, x_2, -3x_1 - 2x_2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 \cdot (1, 0, -3) + x_2 \cdot (0, 1, -2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

1. Le degré de liberté de S_0 est 2 car dans la solution générale restent **deux** variables indéterminées : x_1 et x_2 .
2. Les **deux** vecteurs $(1, 0, -3)$ et $(0, 1, -2)$ sont des solutions de S_0 et elles sont linéairement indépendantes.
3. Les solutions de S_0 sont exactement les combinaisons linéaires des deux vecteurs $(1, 0, -3)$ et $(0, 1, -2)$.

La méthode de Gauss permettra d'arriver à une conclusion de ce type quel que soit le système de départ (m équations en n variables).

210. Retour au degré de liberté

L'exemple précédent suggère une remarque fondamentale qui s'applique aux systèmes homogènes (les systèmes dont les termes indépendants sont tous nuls) : pour tout système homogène S_0 on a

degré de liberté de S_0 (c'est-à-dire le nombre de variables indéterminées dans la solution générale de S_0)

=

plus petit nombre possible de solutions de S_0 qui permettent de décrire toutes les autres solutions de S_0 (voir objectif numéro 4)

L'objectif deviendrait donc : déterminer le degré de liberté d de S_0 et, si $d > 0$, déterminer d solutions linéairement indépendantes de S_0 .

Vérifions la remarque ci-dessus sur deux autres systèmes homogènes.

211. Retour au degré de liberté

Exemples :

$$(a) \ S: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \quad \text{Sol}(S) = \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

- une variable indéterminée $\Rightarrow$ degré de liberté 1
- $(x, -x) = x \cdot (1, -1) \Rightarrow$ les solutions sont les multiples de $(1, -1)$

$$(b) \ S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Sol}(S) = \{(x_1, -x_1, x_3, -x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}$$

- deux variables indéterminées $\Rightarrow$ degré de liberté 2
- $(x_1, -x_1, x_3, -x_3) = x_1 \cdot (1, -1, 0, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1, -1) \Rightarrow$ les solutions sont les combinaisons linéaires de $(1, -1, 0, 0)$ et $(0, 0, 1, -1)$, qui sont deux vecteurs linéairement indépendantes

212. La stratégie

L'idée de la méthode de Gauss est que, par une suite d'opérations élémentaires, on peut transformer un système S en un système S' équivalent à S mais échelonné et donc plus facile à analyser :

- Deux systèmes S et S' sont équivalents s'ils admettent exactement les mêmes solutions : $Sol(S) = Sol(S')$.
- Une opération élémentaire est une opération sur les équations d'un système S qui produit un nouveau système S' équivalent à S .
Il y a trois types d'opérations élémentaires :
 - (i) permuter l'ordre des équations,
 - (ii) multiplier les deux termes d'une équation par un nombre non nul,
 - (iii) ajouter à une équation un multiple d'une autre équation.

213. Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice

Pour appliquer la méthode de Gauss, on travaillera plutôt sur la matrice complète du système que sur le système lui-même

⇒ il faut appliquer les opérations élémentaires aux lignes de la matrice.

Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice :

- (i) permuter l'ordre des lignes,
- (ii) multiplier une ligne par un nombre non nul,
- (iii) ajouter à une ligne un multiple d'une autre ligne.

214. Terminologie : matrice échelonnée

On dit qu'une matrice est échelonnée si :

- le nombre de zéros au début d'une ligne non nulle augmente strictement quand on passe d'une ligne à la ligne suivante, et ceci jusqu'à la dernière ligne de la matrice ou jusqu'à obtenir une ligne nulle,
- les lignes qui suivent une ligne nulle sont toutes nulles.

A remarquer :

1. Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée par une suite finie d'opérations élémentaires.
2. A partir d'une matrice, on peut obtenir plusieurs matrices échelonnées différentes.

215. Exemple

Considérons les deux matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

- La matrice A n'est pas échelonnée car la condition sur le nombre de zéros au début d'une ligne n'est pas satisfaite quand on passe de la deuxième à la troisième ligne.
- Il suffit de permuter la deuxième et la troisième ligne de A pour obtenir la matrice A' qui est échelonnée.

216. Le rang d'une matrice

Définition : pour une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, on pose

$$\text{rang}(A) = \text{nombre de lignes linéairement indépendantes de } A$$

Les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ne changent pas le nombre de ligne linéairement indépendantes de la matrice :

Propriété : Si $A' \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est une matrice échelonnée obtenue à partir de $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ par une suite d'opérations élémentaires sur les lignes, alors

$$\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = \text{nombre de lignes non nulles dans } A'$$

217. Exemple

Considérons la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'est pas évident de déterminer son rang car elle n'est pas échelonnée.
On peut échelonner A par la suite d'opérations élémentaires sur les lignes

$$L_2 \mapsto L_2 - L_1, \quad L_2 \mapsto L_2 - 2 \cdot L_3, \quad L_2 \leftrightarrow L_3$$

On obtient la matrice échelonnée

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A') = 2$ car dans A' il y a deux lignes non nulles.

218. Le cas d'un système homogène

Le cas d'un système homogène (c'est-à-dire un système avec les termes indépendants nuls) est plus facile à traiter grâce à la propriété suivante :

Propriété : Soit un système homogène en m équations et n variables

$$S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1. On a toujours que $\vec{0} \in \text{Sol}(S_0)$.
2. Si $\vec{x} \in \text{Sol}(S_0)$, alors $\alpha \cdot \vec{x} \in \text{Sol}(S_0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. Si $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$.

La preuve de cette propriété est une bonne occasion pour montrer l'intérêt de l'expression matricielle d'un système.

Voyons par exemple la troisième condition :

Hypothèse : $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$. Explicitement : $A \cdot \vec{x} = \vec{0}$ et $A \cdot \vec{y} = \vec{0}$.

Thèse : $\vec{x} + \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$. Explicitement : $A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{0}$.

Il suffit d'utiliser la distributivité du produit matriciel :

$$A \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = A \cdot \vec{x} + A \cdot \vec{y} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$



220. Le cas d'un système homogène

A remarquer :

- Aucun point de la propriété précédente n'est valable pour un système non homogène.
- La propriété précédente aide à décrire la solution générale d'un système homogène.
- Le premier point implique que un système homogène admet toujours au moins la solution triviale ($x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_n = 0$).
- Si on combine le 2ème et le 3ème point, on a que toute combinaison linéaire de solutions de S_0 est encore une solution de S_0 :

si $\vec{x}, \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, alors $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} \in \text{Sol}(S_0)$

221. Exemple

Considérons à nouveau un système homogène dont nous connaissons déjà l'ensemble des solutions :

$$S_0: 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{Sol}(S_0) = \{x_1 \cdot (1, 0, -3) + x_2 \cdot (0, 1, -2) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$$

(a) $(x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0)$ est solution de S_0

(b) $(1, 0, -3)$ est solution de S_0 et

$$5 \cdot (1, 0, -3) = (5, 0, -15)$$

est également solution de S_0

(c) $(1, 0, -3)$ et $(0, 1, -2)$ sont solutions de S_0 et

$$5 \cdot (1, 0, -3) + 3 \cdot (0, 1, -2) = (5, 3, -21)$$

est également solution de S_0

222. Lien entre rang et degré de liberté

Rappel : pour un système homogène, le degré de liberté (le nombre de variables indéterminées dans la solution générale) coïncide avec le plus petit nombre de solutions qui permettent de décrire toutes les solutions. Il est donc fondamental de déterminer le degré de liberté du système.

Propriété : Soit un système homogène en m équations et n variables

$$S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Le degré de liberté d de S_0 est donné par la formule

$$d = n - \text{rang}(A)$$

223. Conséquences du lien entre rang et degré de liberté

De la formule $d = n - \text{rang}(A)$ on peut tirer que :

1. Le système S_0 admet une solution unique

$$\Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n.$$

Dans ce cas, l'unique solution de S_0 est la solution triviale $\vec{x} = \vec{0}$.

2. Le système S_0 admet une infinité de solutions

$$\Leftrightarrow d > 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) < n.$$

Dans ce cas :

- il faut trouver d solutions linéairement indépendantes $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$
- on peut ensuite décrire l'ensemble des solutions de S_0 comme l'ensemble des combinaisons linéaires de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$:

$$\text{Sol}(S_0) = \{ \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_d \vec{x}_d \mid \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R} \}$$

224. Exemple récapitulatif

Considérons le système homogène de 3 équations en 5 variables

$$S_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases}$$

Nous allons parcourir toutes les étapes de la méthode de Gauss (cas homogène) :

- échelonner la matrices des coefficients de S_0 pour calculer son rang
- en utilisant le rang, déterminer le degré de liberté d de S_0
- calculer d solutions linéairement indépendants de S_0
- décrire toutes les solutions de S_0 en utilisant les d solutions de l'étape précédente

225. Exemple, première étape

La matrice des coefficients n'est pas échelonnée :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut échelonner A par des opérations élémentaires sur les lignes :

$$L_2 \mapsto L_2 - L_1, \quad L_2 \mapsto \frac{1}{2} \cdot L_2, \quad L_3 \mapsto L_3 - L_2$$

On obtient la matrice échelonnée

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

226. Exemple, deuxième étape

On en déduit que

- $\text{rang}(A) = \text{rang}(A') = \text{nombre de lignes non nulles dans } A' = 2$
- degré de liberté $d = n - \text{rang}(A) = 5 - 2 = 3$

Il reste à trouver trois solutions linéairement indépendantes de S_0 .
Pour cela, il est plus facile d'utiliser le système S'_0 , équivalent mais échelonné, qui correspond à la matrice A' :

$$S'_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 & = & 0 \\ & x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \\ & & 0 & = & 0 \end{cases}$$

227. Exemple, troisième étape

Observons d'abord que les variables x_3, x_4, x_5 ne sont jamais en tête d'une équation.

Ensuite :

1. On fixe $x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 0$, on remplace ces valeurs dans S'_0 et on obtient $x_1 = 0, x_2 = -1$. Donc $\vec{x}_1 = (0, -1, 1, 0, 0) \in \text{Sol}(S_0)$.
2. On fixe $x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0$, on remplace ces valeurs dans S'_0 et on obtient $x_1 = -2, x_2 = 1$. Donc $\vec{x}_2 = (-2, 1, 0, 1, 0) \in \text{Sol}(S_0)$.
3. On fixe $x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 1$, on remplace ces valeurs dans S'_0 et on obtient $x_1 = -1, x_2 = 0$. Donc $\vec{x}_3 = (-1, 0, 0, 0, 1) \in \text{Sol}(S_0)$.

228. Exemple, quatrième étape

En conclusion, les solutions de S_0 sont exactement les combinaisons linéaires des trois solutions $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ linéairement indépendantes :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S_0) &= \{ \alpha \vec{x}_1 + \beta \vec{x}_2 + \gamma \vec{x}_3 \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \\ &= \{ (-2\beta - \gamma, -\alpha + \beta, \alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

229. La cas d'un système non homogène

Si le système que nous étudions n'est pas homogène

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{avec} \quad \vec{b} \neq \vec{0}$$

dans la méthode de Gauss il y a en plus une étape préliminaire :

- déterminer si le système admet au moins une solution

car un système non homogène peut ne pas avoir de solutions.

(Pour rappel, cette étape est superflue dans le cas d'un système homogène car un tel système a toujours au moins la solution triviale.)

230. Cas non homogène : étape préliminaire

L'étape préliminaire de la méthode de Gauss pour un système non homogène se base sur la propriété suivante, où la première égalité est la définition du rang d'une matrice :

Propriété : Soit une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. On a

$$\begin{aligned}\text{rang}(A) &= \text{nombre de lignes linéairement indépendantes de } A \\ &= \text{nombre de colonnes linéairement indépendantes de } A\end{aligned}$$

(Notons en passant une conséquence : $\text{rang}(A) \leq \min(m, n)$.)

231. Cas non homogène : étape préliminaire

Rappel : trouver une solution d'un système revient à montrer que la colonne des termes indépendants est combinaison linéaire des colonnes de la matrice des coefficients.

Ceci + propriété précédente $\Rightarrow$ étape préliminaire :

Un système $S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution

$\Leftrightarrow \vec{b}$ est combinaison linéaire des colonnes de A

$\Leftrightarrow \text{rang}(A | \vec{b}) = \text{rang}(A)$.

Si cette condition est satisfaite, alors le degré de liberté de S est

$$d = n - \text{rang}(A) \quad \text{où } n = \text{nombre de variables}$$

232. Cas non homogène : suite de la méthode

Soit un système S et le système homogène associé S_0 (même matrice A)

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \text{avec } A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

Si $\text{rang}(A \mid \vec{b}) = \text{rang}(A)$, alors S admet au moins une solution et :

1. S admet une solution unique $\Leftrightarrow d = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) = n$.
2. S admet une infinité de solutions $\Leftrightarrow d > 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) < n$.

Dans ce cas il faut trouver :

- une solution $\vec{y}$ de S
- d solutions linéairement indépendantes $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_d$ de S_0

On peut ensuite décrire l'ensemble des solutions de S :

$$\text{Sol}(S) = \{ \vec{y} + \alpha_1 \vec{x}_1 + \dots + \alpha_d \vec{x}_d \mid \alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{R} \}$$

233. Exemple 1

Considérons le système non homogène

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

On peut échelonner la matrice complète

$$(A \mid \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mapsto (A' \mid \vec{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Le système S n'a pas de solutions car $\text{rang}(A) = 2 < 3 = \text{rang}(A \mid \vec{b})$.

(Pour le vérifier autrement, considérez le système $S': A' \cdot \vec{x} = \vec{b}'$.)

234. Exemple 2

Considérons le système

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases}$$

On peut échelonner la matrice complète

$$(A \mid \vec{b}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \mapsto (A' \mid \vec{b}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le système S a au moins une solution car $\text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A \mid \vec{b})$.

Le système S admet une infinité de solutions car $\text{rang}(A) = 2 < n = 3$ et donc le degré de liberté est 1.

235. Exemple 2, suite

Pour décrire toutes les solutions de S , considérons le système S' associé à la matrice échelonnée $(A' \mid \vec{b}')$ et le système homogène S'_0 associé à S' :

$$S': \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad S'_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

En utilisant S' et S'_0 , on voit que on peut choisir, par exemple,

- $\vec{y} = (1, 0, 0) \in \text{Sol}(S)$
- $\vec{x}_1 = (-1, 1, 0) \in \text{Sol}(S_0)$

On peut conclure que

$$\text{Sol}(S) = \{\vec{y} + \alpha \vec{x}_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(-1 + \alpha, \alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$$

matrices inversibles et déterminants

236. Matrices inversibles à droite ou à gauche

Commençons par fixer la terminologie.

1. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est inversible à droite s'il existe une matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ telle que $A \cdot B = I_m$
2. Une matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ est inversible à gauche s'il existe une matrice $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ telle que $C \cdot A = I_n$

A remarquer :

- La matrice B ci-dessus n'existe pas toujours et, si elle existe, elle n'est pas nécessairement unique.
- La matrice C ci-dessus n'existe pas toujours et, si elle existe, elle n'est pas nécessairement unique.

237. Exemples

- (a) La matrice nulle $\Theta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ n'est inversible ni à droite ni à gauche.
- (b) La matrice $A = (1, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ est inversible à droite mais pas à gauche :

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = I_1 \quad \text{mais} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \cdot (1, 0) = \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & 0 \end{pmatrix} \neq I_2$$

- (c) La matrice $A = (1, 0) \in \mathbb{R}^{1 \times 2}$ est inversible à droite par deux matrices différentes :

$$(1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 = I_1 \quad \text{et} \quad (1, 0) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 = I_1$$

238. Matrices inversibles et systèmes : cas général

L'intérêt des matrices inversibles pour étudier les systèmes d'équations linéaires est donné par le résultat suivant :

Propriété : Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

1. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1.1 A est inversible à droite

1.2 $\text{rang}(A) = m$

1.3 pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution

2. Les conditions suivantes sont équivalentes :

2.1 A est inversible à gauche

2.2 $\text{rang}(A) = n$

2.3 pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, le système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet au plus une solution

A titre d'exercice, voyons une preuve partielle de la propriété.

1.1 $\Rightarrow$ 1.3: Si $A \cdot B = I_m$ et si $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, alors le vecteur $B \cdot \vec{b} \in \mathbb{R}^n$ est solution du système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ car

$$A \cdot (B \cdot \vec{b}) = (A \cdot B) \cdot \vec{b} = I_m \cdot \vec{b} = \vec{b}$$

2.1 $\Rightarrow$ 2.3: Si $C \cdot A = I_n$ et si $\vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{R}^n$ sont deux solutions du système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$, (c'est-à-dire $A \cdot \vec{y} = \vec{b}$ et $A \cdot \vec{z} = \vec{b}$) alors $\vec{y} = \vec{z}$ car

$$\vec{y} = I_n \cdot \vec{y} = C \cdot A \cdot \vec{y} = C \cdot \vec{b} = C \cdot A \cdot \vec{z} = I_n \cdot \vec{z} = \vec{z}$$

240. Matrices inversibles et systèmes : cas $m = n$

Dans le cas d'une matrice carrée, la propriété précédente peut se préciser.

Propriété : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible : il existe une matrice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que
$$A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$$
2. $\text{rang}(A) = n$
3. pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet une solution unique

A remarquer : si la matrice A^{-1} ci-dessus existe, elle est unique et elle est appelée matrice inverse de la matrice A .

241. Déterminant d'une matrice carrée : position du problème

Prochain objectif : associer à chaque matrice carrée $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ un nombre

$$\det(A) \in \mathbb{R}$$

appelé déterminant de A , pour compléter la propriété précédente :

Propriété : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. A est inversible : il existe une matrice $A^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ telle que
 $A \cdot A^{-1} = I_n = A^{-1} \cdot A$
2. $\text{rang}(A) = n$
3. pour tout $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$, le système $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet une unique solution
4. $\det(A) \neq 0$

242. Déterminant d'une matrice carrée : cas $n = 2$

Développons, pour $n = 2$, le point 3 de la propriété précédente.

Considérons le système S :
$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2 \end{cases}$$

et les droites $d_1 : a_{11} x_1 + a_{12} x_2 = b_1$ et $d_2 : a_{21} x_1 + a_{22} x_2 = b_2$.

$$\begin{aligned} S \text{ admet une solution unique} &\Leftrightarrow d_1 \text{ et } d_2 \text{ sont sécantes} \\ &\Leftrightarrow \text{pente de } d_1 \neq \text{pente de } d_2 \\ &\Leftrightarrow -\frac{a_{11}}{a_{12}} \neq -\frac{a_{21}}{a_{22}} \\ &\Leftrightarrow a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : pour avoir que S admet une solution unique si et seulement si $\det(A) \neq 0$, nous devons définir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

243. Déterminant d'une matrice carrée : cas $n = 2$, bis

Développons, pour $n = 2$, le point 2 de la propriété précédente.

Pour calculer le rang de la matrice A , nous pouvons l'échelonner par l'opération élémentaire $L_2 \mapsto L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}} \cdot L_1$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \mapsto A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{rang}(A) = 2 &\Leftrightarrow \text{la deuxième ligne de } A' \text{ est non nulle} \\ &\Leftrightarrow a_{22} - \frac{a_{12} a_{21}}{a_{11}} \neq 0 \\ &\Leftrightarrow a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} \neq 0 \end{aligned}$$

Conclusion : pour avoir que $\text{rang}(A) = 2$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$, nous devons définir

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

244. Déterminant d'une matrice carrée : cas général

Définition inductive de $\det(A)$ pour $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ et $n \geq 3$: soit

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

On fixe un $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ et on développe le long de la j -ème colonne selon la formule

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij})$$

où $A_{ij} \in \mathbb{R}^{(n-1) \times (n-1)}$ est la matrice qu'on obtient en retirant de A la i -ème ligne et la j -ème colonne.

On peut montrer que $\det(A)$ ne dépend pas de la valeur j fixée.

245. Exemple

Comme exemple, calculons le déterminant d'une matrice $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ en développant le long de la deuxième colonne :

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \\ &= -2 \det \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} + 5 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{pmatrix} - 8 \det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} = \\ &= -2(36 - 42) + 5(9 - 21) - 8(6 - 12) = 12 - 60 + 48 = 0\end{aligned}$$

(ce qui implique que $\text{rang}(A) < 3$ et que A n'est pas inversible)

246. Propriétés du déterminant, 1

Nous allons lister les propriétés principales du déterminant. La première peut être utilisée comme définition axiomatique du déterminant.

Propriété : Le déterminant est l'unique fonction

$$\mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}$$

qui satisfait aux conditions

1. $\det(I_n) = 1$
2. Si on permute deux lignes, le déterminant change de signe.
3. Le déterminant est linéaire par rapport à chaque ligne.

Par exemple, la linéarité par rapport à la première ligne s'exprime par :

$$\det \begin{pmatrix} \alpha \cdot L_1 + \beta \cdot L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix} + \beta \det \begin{pmatrix} L'_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{pmatrix}$$

247. Exemple pour la propriété 1

Testons la propriété précédente dans le cas $n = 2$.

$$1. \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 = 1$$

$$2. \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} = a_{21} \cdot a_{12} - a_{22} \cdot a_{11} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21})$$

$$\begin{aligned} 3. \text{ (première ligne) puisque } (a_{11} \ a_{12}) &= a_{11} \cdot (1 \ 0) + a_{12} \cdot (0 \ 1), \text{ on a} \\ \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} &= a_{11} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + a_{12} \det \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ &= a_{11} \cdot (1 \cdot a_{22} - 0 \cdot a_{21}) + a_{12} \cdot (0 \cdot a_{22} - 1 \cdot a_{21}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} \end{aligned}$$

248. Propriétés du déterminant, 2

Le premier point de la prochaine propriété est le résultat qui nous avait motivé à introduire le déterminant d'une matrice carrée.

Propriété :

1. A est inversible si et seulement si $\det(A) \neq 0$
2. $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$
3. Si A est inversible, alors $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Attention : le déterminant ne préserve pas la somme :

$$\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$$

Pour voir cela, on peut prendre $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \det(A) = \det(B) = 0$ mais $\det(A + B) = \det(I_2) = 1$.

249. Propriétés du déterminant, 3

La prochaine propriété (qui se déduit facilement des points 2 et 3 de la première propriété) aide à simplifier le calcul du déterminant.

Propriété :

1. $\det(A) = 0 \Leftrightarrow$ les lignes de A sont linéairement dépendantes.
2. Si dans A il y a deux lignes égales, alors $\det(A) = 0$
3. Si dans A il y a une ligne nulle, alors $\det(A) = 0$
4. Si on multiplie une ligne par un coefficient λ , le déterminant résulte lui aussi multiplié par λ
5. Si on ajoute à une ligne un multiple d'une autre ligne, le déterminant ne change pas.

250. Propriétés du déterminant, 4

Si $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$, la matrice transposée $M^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice qui a comme lignes les colonnes de M , et comme colonnes les lignes de M .

Exemple : si $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$, alors $M^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

Propriété : Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. On a que $\det(A^t) = \det(A)$.

Par conséquent, dans les trois propriétés précédentes qui concernent le déterminant, on peut remplacer partout le mot “ligne” par le mot “colonne” et les propriétés restent valables.

251. Propriétés du déterminant, 5

Dans certains cas, le calcul du déterminant est très rapide.

Propriété : Si la matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est

- triangulaire supérieure (c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $i > j$)
- ou triangulaire inférieure (c'est-à-dire que $a_{ij} = 0$ si $i < j$),

alors le déterminant est le produit des éléments sur la diagonale principale :

$$\det(A) = \prod_{i=1}^n a_{ii} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn}$$

Exemple :

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 \quad \text{et} \quad \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot 6$$

252. Exemple

Un exemple pour illustrer l'utilité de combiner les propriétés 3 et 5.

Pour calculer le déterminant de la matrice A on peut l'échelonner :

$$\begin{aligned} A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{L_3 - 2L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_2 - 3L_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{5L_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & -5 & -25 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -7 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix} = B \end{aligned}$$

Puisque la première, la deuxième et la quatrième opération élémentaire ne changent pas le déterminant de la matrice et la troisième opération élémentaire le multiplie par 5, on aura :

$$\det(A) = \frac{1}{5} \cdot \det(B) = \frac{1}{5} \cdot 1 \cdot (-5) \cdot (-18) = 18$$

253. Application : la règle de Cramer

Si une matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est inversible, tout système de type $S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ admet une solution unique donnée par $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$.

Propriété : les composantes $x_1, \dots, x_n$ de la solution sont données par

$$x_j = \frac{\det \left(C_1 \mid \dots \mid C_{j-1} \mid \vec{b} \mid C_{j+1} \mid \dots \mid C_n \right)}{\det(A)}$$

où $C_1, \dots, C_n$ sont les colonnes de A , et ceci pour tout $j = 1, \dots, n$.

Exemple : soit $S: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ 4x_1 + 5x_2 = 6 \end{cases}$. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A) = -3 \neq 0$. L'unique solution de S est

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}}{\det(A)} = -1 \quad x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}}{\det(A)} = 2$$

254. Application : calcul de la matrice inverse

La propriété suivante peut être déduite de la règle de Cramer.

Propriété : Si $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice inversible, les éléments de la matrice inverse $A^{-1} = (x_{ij})$ sont donnés par

$$x_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \det(A_{ji})}{\det(A)}$$

où A_{ji} est la matrice obtenue de A en retirant la j -ème ligne et la i -ème colonne. (Attention à la permutation des indices : pour calculer x_{ij} on utilise la sous-matrice A_{ji} .)

Exemple : la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ est inversible car $\det(A) = -2 \neq 0$.

La matrice inverse $A^{-1} = (x_{ij})$ a comme éléments

$$x_{11} = \frac{4}{-2} = -2, \quad x_{21} = \frac{-3}{-2} = \frac{3}{2}, \quad x_{12} = \frac{-2}{-2} = 1, \quad x_{22} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

255. Calcul de la matrice inverse par la matrice compagnon

Autre méthode pour calculer la matrice inverse d'une matrice inversible :

- On applique une suite d'opérations élémentaires à la matrice inversible $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ jusqu'à arriver à la matrice identité I_n .
- Ensuite, si on applique exactement la même suite d'opérations élémentaires à la matrice identité I_n , la matrice qu'en résulte est la matrice inverse A^{-1} .

Exemple : si, sur la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, on effectue les opérations élémentaires

$$L_2 \mapsto L_2 - 3 \cdot L_1, \quad L_2 \mapsto -\frac{1}{2} \cdot L_2, \quad L_1 \mapsto L_1 - 2 \cdot L_2$$

on obtient la matrice identité I_2 . Si on applique les mêmes opérations élémentaires à I_2 , on obtient $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

256. Application : calcul du rang

Le déterminant peut aussi être utilisé pour faciliter le calcul du rang d'une matrice non nécessairement carrée.

Propriété : Soit une matrice $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$ quelconque. S'il existe une sous-matrice carrée inversible $A \in \mathbb{R}^{k \times k}$ de M , alors $\text{rang}(M) \geq k$.

Exemple : la matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b & 1 & 2 \\ c & d & e & f \\ g & h & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$$

contient la sous-matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$, obtenue en retirant de M la première et la deuxième colonne et la deuxième ligne.

La matrice A est inversible, car $\det(A) = 3 \neq 0$, et donc $\text{rang}(M) \geq 2$.

sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ (approfondissement)

Position du problème

Dans le cadre de la méthode de Gauss, l'analyse de quelques exemples nous a porté à conclure que, pour un système homogène S_0 , on a

degré de liberté de S_0 (c'est-à-dire le nombre de variables indéterminées dans la solution générale de S_0)

=

plus petit nombre possible de solutions de S_0 qui permettent de décrire toutes les solutions de S_0 en effectuant des combinaisons linéaires

Objectif : introduire un cadre théorique qui permet de préciser la notion de degré de liberté d'un système et de confirmer la relation ci-dessus.

Pour faire cela, nous devons nous familiariser avec cinq notions : sous-espace vectoriel, famille génératrice, famille libre, base, dimension.

A propos de $Sol(S)$

Si S est un système en deux variables, chaque solution de S est formée par un couple de nombre réels $\Rightarrow Sol(S)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Exemple : $S: x + 2y = 5$

$(1, 2) \in Sol(S)$ et $(1, 2) \in \mathbb{R}^2$, $(5, 0) \in Sol(S)$ et $(5, 0) \in \mathbb{R}^2$

et c'est valable pour toute solution :

$$Sol(S) = \{(5 - 2y, y) \mid y \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

Cas général :

Si S est un système en n variables, chaque solution de S est constituée par un n -uple de nombres réels, c'est-à-dire par un vecteur de $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow Sol(S)$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^n$:

$$Sol(S) \subseteq \mathbb{R}^n$$

En particulier, si S_0 est un système homogène en n variables, on a encore

$$Sol(S_0) \subseteq \mathbb{R}^n$$

De plus, on a déjà remarqué que, puisque S_0 est homogène, on a aussi :

1. $\vec{0} \in Sol(S_0)$.
2. si $\vec{x} \in Sol(S_0)$, alors $\alpha \cdot \vec{x} \in Sol(S_0)$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. si $\vec{x}, \vec{y} \in Sol(S_0)$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in Sol(S_0)$.

Cette situation nous mène à la première définition.

Définition de sous-espace vectoriel

Définition : Un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ est un sous-ensemble

$$V \subseteq \mathbb{R}^n$$

tel que

1. $\vec{0} \in V$.
2. si $\vec{x} \in V$, alors $\alpha \cdot \vec{x} \in V$ pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$.
3. si $\vec{x}, \vec{y} \in V$, alors $\vec{x} + \vec{y} \in V$.

(et donc $\alpha \cdot \vec{x} + \beta \cdot \vec{y} \in V$ pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et pour tout $\vec{x}, \vec{y} \in V$)

La discussion qui précède donne le premier exemple : pour tout système homogène en n variables

$$S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0}$$

l'ensemble des solutions $Sol(S_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemples et contre-exemples

- (a) $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ mais pas un sous-espace vectoriel. Pourquoi ?
- (b) $\{(x, y) \mid x \geq 0 \text{ et } y \geq 0\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ mais pas un sous-espace vectoriel. Pourquoi ?
- (c) $\{(x, y) \mid x - y = 1\}$ est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ mais pas un sous-espace vectoriel. Pourquoi ?
- (d) Si $\vec{0}$ est le vecteur nul de $\mathbb{R}^n$, l'ensemble $\{\vec{0}\}$ est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- (e) $\mathbb{R}^n$ est le plus grand sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
- (f) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^2$ et les droites qui passent par l'origine.
- (g) Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont $\{\vec{0}\}$, $\mathbb{R}^3$, les droites qui passent par l'origine et les plans qui passent par l'origine.

Un exercice de recherche d'un sous-espace vectoriel

Exercice : trouver un s.e.v. V de $\mathbb{R}^2$ qui contient le vecteur $\vec{x} = (1, 2)$.

Solution : puisque les s.e.v. de $\mathbb{R}^2$ sont $\{\vec{0}\}, \mathbb{R}^2$ et les droites par l'origine, il y a deux possibilités.

1. $V = \mathbb{R}^2$
2. $V =$ droite par l'origine et par $(1, 2)$.

Puisque l'équation d'une telle droite est $2x - y = 0$, on a :

$$\begin{aligned} V &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 2x - y = 0\} \\ &= \{(x, 2x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot (1, 2) \mid x \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

ou encore, avec la notation qui sera introduite à la page 90,

$$V = \langle (1, 2) \rangle$$

Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$. Le sous-espace engendré par $\vec{x}$, défini par

$$\langle \vec{x} \rangle = \{ \alpha \cdot \vec{x} \mid \alpha \in \mathbb{R} \} = \text{multiples de } \vec{x}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\vec{x}$.

Plus en général, soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Le sous-espace engendré par $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$, défini par

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \rangle &= \{ \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \} \\ &= \text{toutes les combinaisons linéaires de } \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \end{aligned}$$

est le plus petit sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ qui contient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.

Exemples

$$(a) S_0: \begin{cases} x + y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S_0) &= \{(x, -x) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x \cdot (1, -1) \mid x \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1) \rangle \end{aligned}$$

$$(b) S_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S_0) &= \{(x_1, -x_1, x_3, -x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x_1 \cdot (1, -1, 0, 0) + x_3 \cdot (0, 0, 1, -1) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \rangle \end{aligned}$$

Famille génératrice d'un sous-espace vectoriel

Les sous-espaces engendrés nous mènent à la deuxième définition.

Définition : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ des vecteurs distincts de $\mathbb{R}^n$.

Les vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille génératrice de V si

$$V = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \rangle$$

Autrement dit : $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille génératrice de V si

- $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in V$
- tout vecteur de V est combinaison linéaire de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$:

$$\forall \vec{v} \in V \quad \exists \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \text{ tels que } \vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k$$

Nous avons déjà rencontré la troisième définition.

Définition : soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ des vecteurs.

1. Les vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sont linéairement dépendants si au moins l'un d'entre eux est combinaison linéaire des autres.
2. Dans le cas contraire, on dit que $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sont linéairement indépendants ou qu'ils forment une famille libre.

Critère pratique pour déterminer si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ sont libres ou pas :

1. Si $k > n$, alors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sont linéairement dépendants.
2. Si $k \leq n$, on forme la matrice $A \in \mathbb{R}^{k \times n}$ dont les lignes sont les vecteurs $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$.
 - 2.1 Si $\text{rang}(A) = k$, alors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sont linéairement indépendants.
 - 2.2 Si $\text{rang}(A) < k$, alors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ sont linéairement dépendants.

En particulier, une famille libre ne peut jamais contenir

- ni le vecteur nul,
- ni deux vecteurs égaux,
- ni deux vecteurs dont un est multiple de l'autre.

En particulier : un vecteur tout seul est libre sauf s'il est le vecteur nul.

Exemples

- (a) Les trois vecteurs $\vec{x}_1 = (1, 2)$, $\vec{x}_2 = (2, 3)$, $\vec{x}_3 = (7, 12) \in \mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants car $3 > 2$. En effet : $\vec{x}_3 = 3 \cdot \vec{x}_1 + 2 \cdot \vec{x}_2$.
- (b) Les vecteurs $\vec{x}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\vec{x}_2 = (1, 1, -1, 1)$, $\vec{x}_3 = (3, 3, 1, 3) \in \mathbb{R}^4$ sont linéairement dépendants car $2 \cdot \vec{x}_1 + \vec{x}_2 = \vec{x}_3$, ou car

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

et $\text{rang}(A) = 2$ (pour voir cela, il faut échelonner la matrice).

- (c) Les vecteurs $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (3, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (2, 3, 1) \in \mathbb{R}^3$ sont linéairement indépendants car

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

et $\text{rang}(A) = 3$ (pour voir cela, on peut calculer le déterminant : puisque $\det(A) = 18 \neq 0$, alors $\text{rang}(A) = 3$).

Définitions équivalentes de famille libre

Deux reformulations de la notion de famille libre qui peuvent aider lorsque il faut vérifier si une certaine famille de vecteurs est libre ou pas.

Soient $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$. Les trois conditions ci-dessous sont équivalentes :

1. $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \in \mathbb{R}^n$ forment une famille libre.
2. Si $\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k = \vec{0}$, alors $\alpha_1 = 0, \dots, \alpha_k = 0$.
3. Si $\alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k = \beta_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \beta_k \cdot \vec{x}_k$ alors $\alpha_1 = \beta_1, \dots, \alpha_k = \beta_k$.

Exemple : les trois vecteurs $\vec{x}_1 = (1, 2), \vec{x}_2 = (2, 3), \vec{x}_3 = (7, 12) \in \mathbb{R}^2$ sont linéairement dépendants car $3 \cdot \vec{x}_1 + 2 \cdot \vec{x}_2 - \vec{x}_3 = \vec{0}$.

Il y a trois versions équivalentes de la quatrième définition.

Définition : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Une base de V est une famille génératrice minimale de V : si on retire un vecteur de la famille, ceux qui restent ne sont plus une famille génératrice de V .
2. Une base de V est une famille libre maximale de vecteurs de V : si on ajoute un vecteur de V à la famille, la nouvelle famille n'est plus libre.
3. Une base de V est une famille libre et génératrice de V .

Base canonique et base non canonique

Pour préparer la dernière définition, examinons une situation qui montre qu'un sous-espace vectoriel admet en général plusieurs bases.

Lemme : Si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in \mathbb{R}^n$ sont linéairement indépendants, alors ils forment une base de $\mathbb{R}^n$.

Preuve : si on ajoute un vecteur à $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$, la nouvelle famille n'est pas libre car $n + 1$ vecteurs de $\mathbb{R}^n$ ne peuvent pas être indépendants (voir critère pratique). Il s'agit donc d'une famille libre maximale. □

Exemples pour $n = 3$:

- (a) $\vec{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$, dite base canonique.
- (b) $\vec{x}_1 = (1, 2, 3)$, $\vec{x}_2 = (3, 1, 2)$, $\vec{x}_3 = (2, 3, 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^3$ car ils sont linéairement indépendants.

Dimension d'un sous-espace vectoriel

La dernière définition résulte d'un théorème suggéré par l'exemple précédent.

Théorème :

1. Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ admet une base.
2. Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ et si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ et $\vec{y}_1, \dots, \vec{y}_h$ sont deux bases de V , alors $h = k$.

Définition : Soit V un s.e.v. de $\mathbb{R}^n$. Le nombre de vecteurs qui forment une base quelconque de V est appelé dimension de V et noté $\dim(V)$.

Exemples particuliers :

- (a) La base canonique montre que $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
- (b) Par convention, $\{\vec{0}\}$ est le seul sous-espace vectoriel de dimension 0.

Exemples : degré de liberté de $S_0 = \dim(\text{Sol}(S_0))$

Reprenons deux exemples liés aux systèmes.

$$(a) S_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V = \text{Sol}(S_0) &= \{(x_1, -x_1, x_3, -x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{x_1(1, -1, 0, 0) + x_3(0, 0, 1, -1) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

$$(1, -1, 0, 0), (0, 0, 1, -1) \text{ base de } \text{Sol}(S_0) \text{ et donc } \dim(\text{Sol}(S_0)) = 2$$

$$(b) S_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} V = \text{Sol}(S_0) &= \{(-2\beta - \gamma, -\alpha + \beta, \alpha, \beta, \gamma) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} = \\ &= \{\alpha(0, -1, 1, 0, 0) + \beta(-2, 1, 0, 1, 0) + \gamma(-1, 0, 0, 0, 1) \mid \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}\} \\ &(0, -1, 1, 0, 0), (-2, 1, 0, 1, 0), (-1, 0, 0, 0, 1) \text{ base de } \text{Sol}(S_0) \text{ et donc} \\ &\dim(\text{Sol}(S_0)) = 3 \end{aligned}$$

La dimension et une base sont la carte d'identité d'un sous-espace vectoriel. Voici quelques propriétés qui aident à les déterminer.

Propriété : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille génératrice de V , alors $k \geq \dim(V)$ et on peut extraire de $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ une base de V .
2. En particulier, si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille génératrice de V et $k = \dim(V)$, alors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ est une base de V .
3. Si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille libre de V , alors $k \leq \dim(V)$ et on peut compléter la famille $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ pour obtenir une base de V .
4. En particulier, si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ forment une famille libre de V et $k = \dim(V)$, alors $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ est une base de V .

Voici encore quelques propriétés toujours dans l'optique de déterminer la dimension et une base d'un sous-espace vectoriel.

Propriété : Soient V et W deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$.

1. Si $V \subset W$ (inclusion stricte), alors $\dim(V) < \dim(W)$.
2. En particulier, si $V \subset \mathbb{R}^n$, alors $\dim(V) < n$.
3. Si $V \subseteq W$ et $\dim(V) = \dim(W)$, alors $V = W$.
4. En particulier, si $\dim(V) = n$, alors $V = \mathbb{R}^n$.

Exercice : trouver des exemples dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ qui montrent que

- $\dim(V) = \dim(W) \not\Rightarrow V = W$
- $\dim(V) < \dim(W) \not\Rightarrow V \subset W$

Retour aux systèmes, le cas homogène

Interprétons la méthode de Gauss en termes de base et dimension.

Commençons par un système homogène de m équations en n variables :

$$S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

1. $Sol(S_0)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.
2. Le degré de liberté de S_0 est exactement la dimension de $Sol(S_0)$.
3. $\text{rang}(A) = \dim\langle L_1, \dots, L_m \rangle = \dim\langle C_1, \dots, C_n \rangle$ où
 - $\langle L_1, \dots, L_m \rangle$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^n$ engendré par les lignes de A
 - $\langle C_1, \dots, C_n \rangle$ est le sous-espace de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A
4. $\dim(Sol(S_0)) = n - \dim\langle C_1, \dots, C_n \rangle = n - \text{rang}(A)$.
5. Si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ est une base de $Sol(S_0)$, alors

$$Sol(S_0) = \{ \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \} = \langle \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k \rangle$$

Retour aux systèmes, le cas général

Considérons un système non homogène et le système homogène associé :

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}, \quad S_0: A \cdot \vec{x} = \vec{0}, \quad A \in \mathbb{R}^{m \times n}, \quad \vec{b} \in \mathbb{R}^m, \quad \vec{b} \neq \vec{0}$$

1. S admet au moins une solution ssi $\vec{b}$ est combili des colonnes de A :

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S) \neq \emptyset &\Leftrightarrow \vec{b} \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle \\ &\Leftrightarrow \langle C_1, \dots, C_n \rangle = \langle C_1, \dots, C_n, \vec{b} \rangle \\ &\Leftrightarrow \dim \langle C_1, \dots, C_n \rangle = \dim \langle C_1, \dots, C_n, \vec{b} \rangle \end{aligned}$$

2. Si $\text{Sol}(S) \neq \emptyset$, alors le degré de liberté de S est exactement la dimension de $\text{Sol}(S_0)$.
3. Si $\vec{y} \in \text{Sol}(S)$ et si $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ est une base de $\text{Sol}(S_0)$, alors

$$\begin{aligned} \text{Sol}(S) &= \{ \vec{y} + \vec{x} \mid \vec{x} \in \text{Sol}(S_0) \} \\ &= \{ \vec{y} + \alpha_1 \cdot \vec{x}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x}_k \mid \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

Exemple

Reprenons un système que nous avons déjà analysé :

$$S: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \quad S_0: \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

- Le système S admet au moins une solution car
 $\dim\langle C_1, C_2, C_3 \rangle = \text{rang}(A) = 2 = \text{rang}(A \mid \vec{b}) = \dim\langle C_1, C_2, C_3, \vec{b} \rangle$
- $\dim(\text{Sol}(S_0)) = 3 - \dim\langle C_1, C_2, C_3 \rangle = 3 - 2 = 1$
- $\vec{x}_1 = (1, -1, 0)$ est une base de $\text{Sol}(S_0)$ et
 $\text{Sol}(S_0) = \langle \vec{x}_1 \rangle = \{(\alpha, -\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- $\vec{y} = (1, 0, 0) \in \text{Sol}(S)$ et
 $\text{Sol}(S) = \{\vec{y} + \alpha \vec{x}_1 \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \{(1 + \alpha, -\alpha, 0) \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

solutions approchées (approfondissement)

Si un système

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

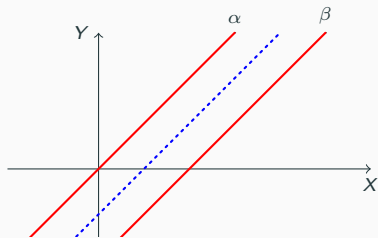
n'a pas de solutions, on peut chercher les solutions approchées.

1. C'est quoi une solution approchée ?
2. Pourquoi chercher les solutions approchées d'un système qui n'a pas de vraies solutions ?
3. Comment on peut déterminer les solutions approchées ?

Un exemple intuitif

Considérons le système sans solutions S et son interprétation géométrique

$$S: \begin{cases} x - y = 0 & \Rightarrow \text{droite } \alpha \\ x - y = 2 & \Rightarrow \text{droite } \beta \end{cases}$$



Les solutions approchées de S sont les points équidistants de α et β , c'est-à-dire les points de la droite

$$x - y = 1$$

Un exemple intuitif, suite

Quelques remarques qui vont nous guider pour le problème général.

Considérons les deux systèmes

$$S: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \quad S': \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

et leur expression matricielle $S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ et $S': A \cdot \vec{x} = \vec{b}'$, avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (C_1 \mid C_2) \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \vec{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1. Les solutions approchées de S sont les solutions de S' .
2. $\vec{b}'$ est combinaison linéaires de C_1 et C_2 , alors que $\vec{b}$ ne l'est pas (ce qui explique pourquoi S' admet des solutions et S pas).
3. Le produit scalaire de $\vec{b} - \vec{b}'$ avec chaque colonne de A est nul : $(\vec{b} - \vec{b}') \cdot C_1 = 0$ et $(\vec{b} - \vec{b}') \cdot C_2 = 0$.

Rappel : un système peut s'écrire en notation vectorielle

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow S: x_1 \cdot C_1 + x_2 \cdot C_2 + \dots + x_n \cdot C_n = \vec{b}$$

où $C_1, C_2, \dots, C_n \in \mathbb{R}^m$ sont les colonnes de la matrice des coefficients.

Par conséquent : $Sol(S) \neq \emptyset \Leftrightarrow \vec{b} \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$

Pseudo-définition : Les solutions approchées de S sont les solutions de

$$S': A \cdot \vec{x} = \vec{b}'$$

où $\vec{b}' \in \mathbb{R}^m$ est un vecteur tel que

- $\vec{b}' \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$, ce qui implique que $Sol(S') \neq \emptyset$,
- $\vec{b}'$ est, parmi les vecteurs de $\langle C_1, \dots, C_n \rangle$, le plus proche de $\vec{b}$.

Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ et soit $\vec{b} \notin V$.

On cherche un vecteur $\vec{b}'$ qui soit dans V et qui, parmi tous les vecteurs de V , est le plus proche de $\vec{b}$.

Première étape : pour préciser ce que “proche” signifie, il faut définir la notion de distance entre vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

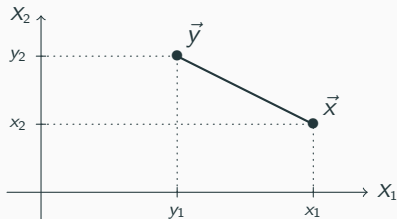
Deuxième étape : une fois qu'on dispose d'une notion de distance entre vecteurs, on cherchera le vecteur $\vec{b}'$ de V le plus proche de $\vec{b}$.

Remarque : si on démarre par un $\vec{b}$ qui est dans V , alors on aura $\vec{b}' = \vec{b}$.

Distance entre vecteurs : cas $m = 2$

Soient $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ deux vecteurs (= points) de $\mathbb{R}^2$.

La distance entre $\vec{x}$ et $\vec{y}$ se calcule en utilisant le théorème de Pythagore :



La formule qui en résulte est la suivante

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$$

Distance entre vecteurs : cas général

Le cas $m = 2$ suggère clairement quelle définition adopter pour calculer la distance entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

On pose :

$$\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_m - x_m)^2}$$

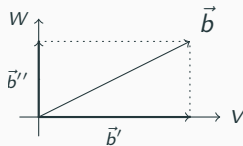
A remarquer :

1. Si $\vec{x} \neq \vec{y}$, alors $\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) > 0$
2. Si $\vec{x} = \vec{y}$, alors $\text{dist}(\vec{x}, \vec{y}) = 0$

Projection orthogonale : cas $m = 2$

Pour comprendre comment déterminer le vecteur le plus proche, considérons une situation facile à visualiser :

- les sous-espaces vectoriels V et W de $\mathbb{R}^2$ donnés par l'axe horizontale et par l'axe verticale
- un vecteur $\vec{b}$ qui n'appartient pas à V



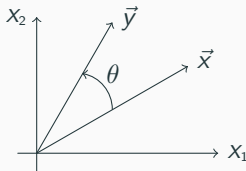
Le dessin montre que

- le vecteur $\vec{b}'$ de V le plus proche de $\vec{b}$ est la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur V
- $\vec{b} = \vec{b}' + \vec{b}''$, où $\vec{b}''$ est la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur W et il est donc orthogonal à tout vecteur de V

Projection orthogonale : cas $m = 2$, suite

Le dessin précédent fait apparaître des vecteurs orthogonaux.

Pour préparer le cas général, rappelons comment on peut exprimer l'orthogonalité entre deux vecteurs $\vec{x} = (x_1, x_2)$ et $\vec{y} = (y_1, y_2)$ de $\mathbb{R}^2$.



$$\|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\| \cdot \cos(\theta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \quad \text{où} \quad \|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\begin{aligned} \vec{x} \perp \vec{y} &\Leftrightarrow \theta = 90^\circ \\ &\Leftrightarrow \cos(\theta) = 0 \\ &\Leftrightarrow x_1 y_1 + x_2 y_2 = 0 \end{aligned}$$

Projection orthogonale : cas général

Le cas $m = 2$ suggère clairement quelle définition adopter pour exprimer l'orthogonalité entre deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

Soient $\vec{x} = (x_1, \dots, x_m)$ et $\vec{y} = (y_1, \dots, y_m)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^m$.

On pose :

$$\vec{x} \perp \vec{y} \Leftrightarrow \vec{x} \cdot \vec{y} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_1 + \dots + x_m y_m = 0$$

A remarquer : si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ et si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ est une famille génératrice de V , alors

$$\vec{x} \perp \vec{v} \text{ pour tout } \vec{v} \in V \Leftrightarrow \vec{x} \perp \vec{v}_i \text{ pour tout } i = 1, \dots, k$$

Preuve : tout $\vec{v} \in V$ peut s'écrire comme $\vec{v} = \alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v}_k$
 $\Rightarrow \vec{x} \cdot \vec{v} = \vec{x} \cdot (\alpha_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{v}_k) = \alpha_1 \cdot \vec{x} \cdot \vec{v}_1 + \dots + \alpha_k \cdot \vec{x} \cdot \vec{v}_k$

Projection orthogonale : cas général, suite

Propriété : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Il existe un unique vecteur $\vec{b}' \in \mathbb{R}^m$ tel que

1. $\vec{b}' \in V$
2. $(\vec{b} - \vec{b}') \perp \vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$

Cet unique vecteur $\vec{b}'$ est appelé projection orthogonale de $\vec{b}$ sur V et il est noté $P_V(\vec{b})$.

Propriété : Soit V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ et soit $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Por tout $\vec{v} \in V$, $\vec{v} \neq P_V(\vec{b})$, on a

$$\text{dist}(\vec{b}, P_V(\vec{b})) < \text{dist}(\vec{b}, \vec{v})$$

Soit un système

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

avec $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$.

Soit $\vec{b}' \in \mathbb{R}^m$ la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur le sous-espace vectoriel $\langle C_1, \dots, C_n \rangle$ de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A .

1. Le nouveau système

$$S': A \cdot \vec{x} = \vec{b}'$$

admet toujours au moins une solution car $\vec{b}' \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$.

2. Si S admet au moins une solution, alors S et S' sont égaux (car dans ce cas $\vec{b} \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$ et donc $\vec{b}' = \vec{b}$).
3. Si S n'a pas de solutions, les solutions de S' sont les solutions approchées de S : $Sol_{app}(S) = Sol(S')$.
4. Pour calculer $\vec{b}'$ (et ensuite déterminer $Sol_{app}(S)$) il faut imposer que $\vec{b}' \in \langle C_1, \dots, C_n \rangle$ et que $(\vec{b} - \vec{b}') \perp C_i$ pour tout $i = 1, \dots, n$.

Retour à l'exemple de départ

Soit $S: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$ avec $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Cherchons la projection orthogonale $\vec{b}' = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ de $\vec{b}$ sur $\langle C_1, C_2 \rangle$.

Il faut que $(\vec{b} - \vec{b}') \perp C_1$ et $(\vec{b} - \vec{b}') \perp C_2$, c'est-à-dire que

$$(\vec{b} - \vec{b}') \cdot C_1 = 0 \quad \text{et} \quad (\vec{b} - \vec{b}') \cdot C_2 = 0$$

ce qui donne $b = 2 - a$.

Il faut aussi que $\vec{b}'$ soit combinaison linéaire de C_1 et C_2 , c'est-à-dire $\vec{b}' = \lambda \cdot C_1$, ce qui donne $a = 1$.

Conclusion : $\vec{b}' = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et donc $S': \begin{cases} x - y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases}$ et finalement

$$Sol(S') = \{(y + 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = Sol_{app}(S)$$

Puisque cet exemple est dans $\mathbb{R}^2$, on peut résoudre géométriquement le problème et confirmer la réponse que nous avons trouvé.

- Le s.e.v. V de $\mathbb{R}^2$ engendré par les colonnes C_1 et C_2 de la matrice A est la droite d'équation $x = y$.
- La droite orthogonale à V et qui passe par $\vec{b}$ a équation $y = -x + 2$.
- La projection orthogonale de $\vec{b}$ sur V est donc l'intersection entre la droite $y = x$ et la droite $y = -x + 2$, c'est-à-dire le point $\vec{b}'$.

On retrouve, comme système qui donne les solutions approchées du système $S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$ de départ, le nouveau système $S': A \cdot \vec{x} = \vec{b}'$.

Méthode de Gram-Schmidt pour la projection orthogonale

Méthode général pour calculer la projection orthogonale $P_V(\vec{b})$:

1. Une base orthonormée de V est une base $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ de V telle que
 - (a) $\vec{v}_i \perp \vec{v}_j$ pour tout $i \neq j$
 - (b) $\|\vec{v}_i\| = 1$ pour tout $i = 1, \dots, k$, où $\|\vec{x}\| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$
2. A partir d'une base quelconque $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_k$ de V , on peut construire une base orthonormée $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ de V :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|}$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1}{\|\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1\|}$$

$$\vec{v}_3 = \frac{\vec{x}_3 - (\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1 - (\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2}{\|\vec{x}_3 - (\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_1) \vec{v}_1 - (\vec{x}_3 \cdot \vec{v}_2) \vec{v}_2\|}$$

etcétera.

3. Si $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$ est une base orthonormée de V , alors

$$P_V(\vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + \dots + (\vec{b} \cdot \vec{v}_k)\vec{v}_k$$

Preuve que $\vec{b} - P_V(\vec{b})$ est orthogonal à $\vec{v}$ pour tout $\vec{v} \in V$ (cas $k = 2$) :

$$\begin{aligned}(\vec{b} - P_V(\vec{b})) \cdot \vec{v}_1 &= (\vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 - (\vec{b} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2) \cdot \vec{v}_1 \\&= \vec{b} \cdot \vec{v}_1 - (\vec{b} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 - (\vec{b} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 \cdot \vec{v}_1 \\&= \vec{b} \cdot \vec{v}_1 - (\vec{b} \cdot \vec{v}_1)1 - (\vec{b} \cdot \vec{v}_2)0 \\&= \vec{b} \cdot \vec{v}_1 - \vec{b} \cdot \vec{v}_1 \\&= 0\end{aligned}$$

et de même $(\vec{b} - P_V(\vec{b})) \cdot \vec{v}_2 = 0$.

Exemple

Soit V le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ qui admet comme base $\vec{x}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{x}_2 = (0, 1, 1)$. Cherchons $P_V(\vec{b})$, où $\vec{b} = (0, 1, 0) \notin V$.

La méthode de Gram-Schmidt donne une base orthonormée $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ de V :

$$\vec{v}_1 = \frac{\vec{x}_1}{\|\vec{x}_1\|} = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$$

$$\vec{v}_2 = \frac{\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1}{\|\vec{x}_2 - (\vec{x}_2 \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1\|} = (-1/\sqrt{6}, 1/\sqrt{6}, 2/\sqrt{6})$$

Par conséquent :

$$P_V(\vec{b}) = (\vec{b} \cdot \vec{v}_1)\vec{v}_1 + (\vec{b} \cdot \vec{v}_2)\vec{v}_2 = (1/3, 2/3, 1/3)$$

Une autre méthode pour calculer les solutions approchées

Pour déterminer les solutions approchées d'un système

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

il y a une autre méthode (plus rapide mais plus difficile à justifier) qui ne demande pas de calculer explicitement la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur l'espace engendré par les colonnes de A .

Propriété : Les solutions approchées de S sont les solutions de

$$S^*: A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b}$$

où A^t est la matrice transposée de la matrice A .

Retour à l'exemple de départ

$$\text{Soit } S: \begin{cases} x - y = 0 \\ x - y = 2 \end{cases} \text{ avec } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

$$A^t \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^t \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{Conclusion : } S^*: \begin{cases} 2x - 2y = 2 \\ -2x + 2y = -2 \end{cases} \text{ et finalement}$$

$$\text{Sol}(S^*) = \{(y + 1, y) \mid y \in \mathbb{R}\} = \text{Sol}_{app}(S)$$

Soit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ une matrice et $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$ un vecteur. Considérons le système

$$S: A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Considérons aussi les systèmes

$$S': A \cdot \vec{x} = \vec{b}' \quad \text{et} \quad S^*: A^t \cdot A \cdot \vec{x} = A^t \cdot \vec{b}$$

où $\vec{b}'$ est la projection orthogonale de $\vec{b}$ sur le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^m$ engendré par les colonnes de A et $A^t \in \mathbb{R}^{n \times m}$ est la matrice transposée.

1. Si $Sol(S) \neq \emptyset$, alors $Sol_{app}(S) = Sol(S)$.
2. Si $Sol(S) = \emptyset$, alors $Sol_{app}(S) = Sol(S') = Sol(S^*)$.

Mais pourquoi chercher les solutions approchées ?

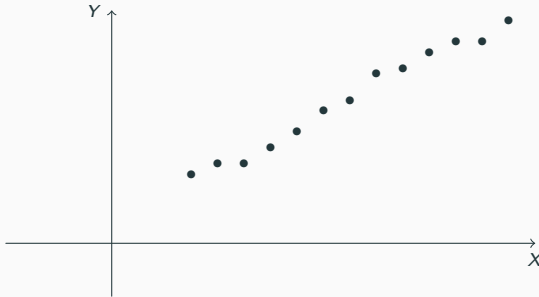
Beaucoup de phénomènes observables en

- sciences (physique, chimique, biologique),
- sciences humaines (économétrie, sociologie),
- sciences de l'ingénieur,
- informatique (intelligence artificielle, apprentissage automatique),
- et spécialement en statistique (sciences des données),

peuvent être exprimés par des modèles linéaires, c'est à dire par des droites, ou de plans, etcétera.

Les observations expérimentales

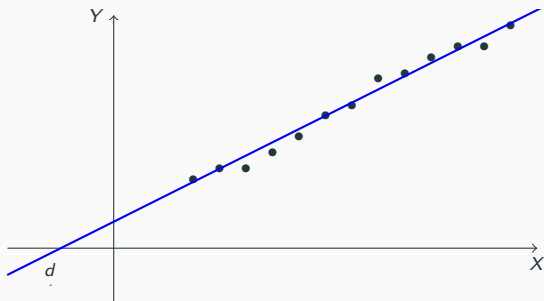
Puisque on cherche à établir le modèle sur base expérimentale, et que les mesures des phénomènes observables ne sont jamais parfaites, ce qu'on voit paraître est souvent une situation type “nuage de points” : (dans le cas d'une droite)



Régression linéaire

On devine que, si les mesures étaient parfaites, les points seraient alignés. Puisque cela n'est pas le cas, il n'existe pas une droite qui passe par tous les points.

On cherche alors la droite de régression linéaire : la droite d qui passe au mieux par les points trouvés.



Supposons d'effectuer 100 observations qui donnent lieu à 100 points presque (mais pas parfaitement) alignés

$$P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_{100} = (x_{100}, y_{100})$$

La droite d qu'on cherche admet une équation du type

$$y = mx + p$$

et il faut déterminer les coefficients m (pente) et p (ordonnée à l'origine). Imposer le passage de d par 100 points revient à imposer 100 équations :

$$S: \begin{cases} mx_1 + p = y_1 \\ mx_2 + p = y_2 \\ \dots\dots\dots \\ mx_{100} + p = y_{100} \end{cases}$$

Le système S n'a pas de solutions (car les 100 points ne sont pas alignés), mais il admet une solution approchée (m, p) unique (car la matrice des coefficients a rang 2) qui donne la droite de régression linéaire.

Merci d'avoir tenu jusqu'au bout !

