

**Annexe au chapitre II : calcul des paramètres circuits sans utiliser explicitement des calculs de champ**

**A2.1. Position du problème**

Les modèles de type circuit ont l'avantage de pouvoir être analysés rapidement, mais ils sont insuffisants en matière de conception car ils ne font pas intervenir les paramètres géométriques du dispositif ni les caractéristiques des matériaux.

On est donc amené à utiliser conjointement un modèle « champ » qui ne sera analysé qu'un petit nombre de fois, juste ce qui est nécessaire pour déterminer les paramètres du modèle « circuit ».

Il est cependant possible, dans une certaine mesure, de passer outre de l'étape de calcul de champ en utilisant des résultats de calcul de champ décrits dans la littérature. Il existe en effet un grand nombre de solutions exactes relatives à des cas particuliers.

Les solutions décrites dans la littérature, pour être suffisamment générales, ne peuvent cependant contenir que des calculs relatifs à des structures très simples, souvent avec des hypothèses simplifiées. En particulier, elles sont souvent limitées à des matériaux dont les caractéristiques sont linéaires. Ces solutions, bien que généralement exactes par rapport au modèle pour lequel elles sont établies, sont donc souvent approchées par rapport à un dispositif « réel ». En outre, pour les appliquer à un dispositif réel, on doit souvent associer plusieurs de ces solutions, et cette association est souvent une autre source d'erreur.

Les calculs effectués de cette façon sont donc souvent peu précis. Ils sont cependant utiles pour obtenir rapidement des ordres de grandeur. En outre, comme nous le verrons, il est parfois possible d'améliorer leur précision en étant soigneux lors de l'assemblage du modèle.

**A2.2. Exemple simple : la loi de Pouillet**

Une des lois les plus connues quand il s'agit de déterminer la valeur d'un élément de circuit électrique est la loi de Pouillet, qui fournit l'expression de la résistance ohmique d'un conducteur allongé de longueur  $L$  et de section  $S$ . Cette loi est

$$R = \rho \frac{L}{S} \quad \text{ou} \quad R = \frac{1}{\sigma} \frac{L}{S} \quad (2.A1)$$

où  $\rho$  est la résistivité électrique du matériau et  $\sigma$  la conductivité du matériau (inverse de la résistivité).

Cette loi vient en fait d'un calcul de champ implicite, à savoir que l'on a,  $e$  étant la force électromotrice et  $i$  le courant

$$R = \frac{e}{i} \quad \text{avec} \quad i = \iint \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad e = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} \quad (2.A2)$$

Si l'élément a une structure prismatique (rectiligne et à section droite constante), si les champs  $\vec{J}$  et  $\vec{E}$  y sont uniformes et orientés dans la direction de la longueur, les formules ci-dessus deviennent

$$i = J S \quad (2.A3)$$

et

$$e = E L. \quad (2.A4)$$

Si, en outre, on a la relation linéaire

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.A5)$$

dans la direction de la longueur, on obtient la formule (2.A1).

La formule (2.A1) s'applique aussi aux circuits thermiques pourvu que les hypothèses correspondantes soient vérifiées. On a en effet les analogies

Grandeur électrique	Grandeur thermique
Courant $i$	Flux de chaleur $Q$
Tension $u$	Différence de température $\Delta T$
Conductivité électrique $\sigma$	Conductivité thermique $\lambda$ ou $k$

Notons que, physiquement, cette analogie est boiteuse car le produit  $Q \Delta T$  n'est pas une puissance, contrairement au produit  $i u$ . L'analogue de  $i$  serait plutôt le flux d'entropie, mais ce dernier n'obéit pas à une loi de conservation, de sorte que l'on ne peut obtenir en utilisant l'entropie comme grandeur la loi des nœuds de Kirchhoff.

Pour pouvoir s'appliquer aux phénomènes transitoires, les circuits thermiques doivent aussi comporter des capacités thermiques. La capacité thermique d'un domaine, supposé à température uniforme  $T$ , est toujours située entre un nœud représentant le domaine et un nœud commun (masse du circuit) à température de référence  $T_0$ . Elle s'obtient en multipliant le volume du domaine par la capacité thermique volumique du matériau dont il est constitué.

$$C_{th} = c_{vol} V \quad (2.A6)$$

### A2.3. Utilisation des circuits magnétiques

La tension d'un circuit électrique filiforme comporte, outre une force électromotrice (chute de tension ohmique), un terme correspondant à la dérivée temporelle de son flux.

En admettant que toutes les spires d'une bobine encerclent le même flux magnétique  $\Phi$ , le flux  $\psi$  de cette bobine vaut

$$\psi = n \Phi \quad (2.A7)$$

où  $n$  est le nombre de spires de la bobine et

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (2.A8)$$

De même, le courant qui passe dans la bobine donne lieu à une force magnétomotrice

$$\mathfrak{S} = n i \quad (2.A9)$$

où

$$\mathfrak{S} = \int \vec{H} \cdot d\vec{l} \quad (2.A10)$$

Les grandeurs  $\Phi$  et  $\mathfrak{S}$  peuvent parfois être calculées par une technique de circuit magnétique, ce qui évite le recours explicite au calcul des champs  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{H}$ .

La correspondance (2.A7) et (2.A9) n'est cependant qu'approchée, car elle suppose que la surface encerclée par une spire est bien définie (donc que l'on peut considérer que la spire est une ligne fermée sans dimension transversale !) et que toutes les spires de la bobine encerclent le même flux, ce qui revient à négliger le flux de fuite entre les spires. C'est une des raisons pour laquelle, lorsque le calcul magnétique est entièrement fait par circuit magnétique, le résultat est souvent une approximation assez grossière. Parfois, on utilise le calcul par circuit magnétique seulement sur la partie du dispositif où l'on peut rendre ce calcul suffisamment précis.

Les circuits magnétiques ont été introduits lors des cours élémentaires de physique. Un rappel a été fait lors des cours de base en convertisseurs électromécaniques (voir par exemple

<http://www.lei.ucl.ac.be/~matagne/ELEC2753/SEM00/2753A01.DOC> )

Dans le cas de tronçons rectilignes de circuit magnétique, on pourrait si le matériau était linéaire utiliser l'analogie de la formule (2.A1), soit

$$\mathfrak{R} = \nu \frac{L}{S} \quad \text{ou} \quad \mathfrak{R} = \frac{1}{\mu} \frac{L}{S} \quad (2.A11)$$

où  $\mathfrak{R}$  est la réluctance du tronçon,  $\mu$  la perméabilité magnétique et  $\nu$ , la réluctivité magnétique, son inverse.

Malheureusement, l'hypothèse de linéarité n'est guère vérifiée par les matériaux ferromagnétiques. Cependant, puisque le champ est uniforme dans un tronçon rectiligne, le niveau de saturation est partout le même, de sorte que l'on peut facilement traduire une courbe B-H en une courbe  $\Phi - \mathfrak{F}$ . On a simplement

$$\Phi(\mathfrak{F}) = S B\left(\frac{\mathfrak{F}}{L}\right) \quad (2.A12)$$

Un cas particulier d'application de cette formule est celui d'un tronçon de circuit magnétique formé d'un aimant permanent. Si nous admettons, au voisinage du point de fonction de l'aimant, la relation linéaire

$$B = \mu(H + H_{c\text{app}}) \quad \text{ou} \quad H = \frac{1}{\mu}(B - B_{r\text{app}}) \quad (2.A13)$$

où  $\mu$  est la perméabilité magnétique incrémentale,  $H_{c\text{app}}$  le champ coercitif apparent et  $B_{r\text{app}}$  le champ rémanent apparent, l'équation (2.A12) peut s'écrire

$$\Phi = S\mu\left(\frac{\mathfrak{F}}{L} + H_{c\text{app}}\right) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F} = \frac{L}{\mu}\left(\frac{\Phi}{S} - B_{r\text{app}}\right) \quad (2.A14)$$

soit, avec des définitions ad hoc

$$\Phi = \frac{1}{\mathfrak{R}}(\mathfrak{F} + \mathfrak{F}_0) \quad \text{ou} \quad \mathfrak{F} = \mathfrak{R}(\Phi - \Phi_0) \quad , \quad (2.A15)$$

ce qui peut se représenter par la mise en série d'une réluctance et d'une source de f.m.m., ou encore par la mise en parallèle d'une réluctance et d'une source de flux (similaire à l'équivalence entre circuit de Thévenin et circuit de Norton).

## A2.4 : Réluctances aux raccords de tronçons rectilignes

Il arrive qu'un circuit magnétique soit essentiellement constitué de tronçons rectilignes. On peut cependant dans ce cas être embarrassé par le problème de savoir comment raccorder ces tronçons rectilignes. On trouve en effet souvent des coins (circuits de transformateurs) ou des T (raccord d'une dent à une couronne au niveau d'un stator ou d'un rotor de machine). Nous allons dans cette section fournir des formules permettant d'augmenter sensiblement la précision de la modélisation. Ces formules sont aussi utiles pour évaluer correctement la résistance de conducteurs dont la largeur n'est pas négligeable par rapport à la longueur, cas fréquent en technique de circuit imprimé ou de circuit intégré.

### A2.4.1. Réluctance de coin

Lorsque deux tronçons rectilignes sont reliés à angle droit (voir figure 2.A1 ci-dessous), on peut calculer l'effet du coin de façon exacte en supposant, outre l'hypothèse de circuit magnétique (pas de champ de fuite), que le matériau linéaire et que les tronçons sont longs par rapport à leur largeur. On a montré récemment que cet effet peut être pris en compte en considérant un allongement de chaque tronçon comme indiqué à la figure 2.A2.

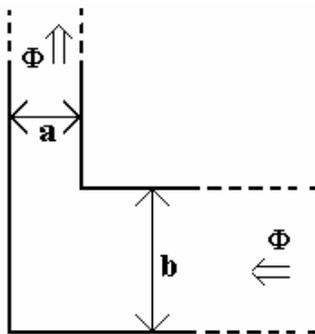


Figure 2.A1

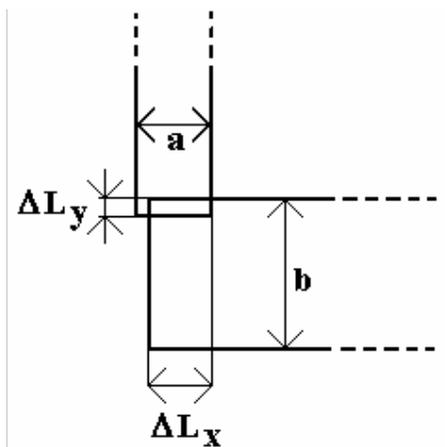


Figure 2.A2

L'expression ces allongements est

$$\Delta L_x = \frac{b}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{1+k}{4k}\right) + 2\sqrt{k} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \quad (2.A16)$$

$$\Delta L_y = \frac{a}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{k+1}{4}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arc\,tg} \sqrt{k} \right] \quad (2.A17)$$

où « ln » désigne le logarithme népérien et où « arc tg » est exprimé en radians, avec

$$k = \frac{a^2}{b^2} \quad (2.A18)$$

Bien que cette méthode ne soit rigoureuse que pour des tronçons longs et des matériaux linéaires, on a montré qu'elle fournit d'excellents résultats avec une caractéristique B-H réaliste et des tronçons plus courts (voir figure ci-dessous).

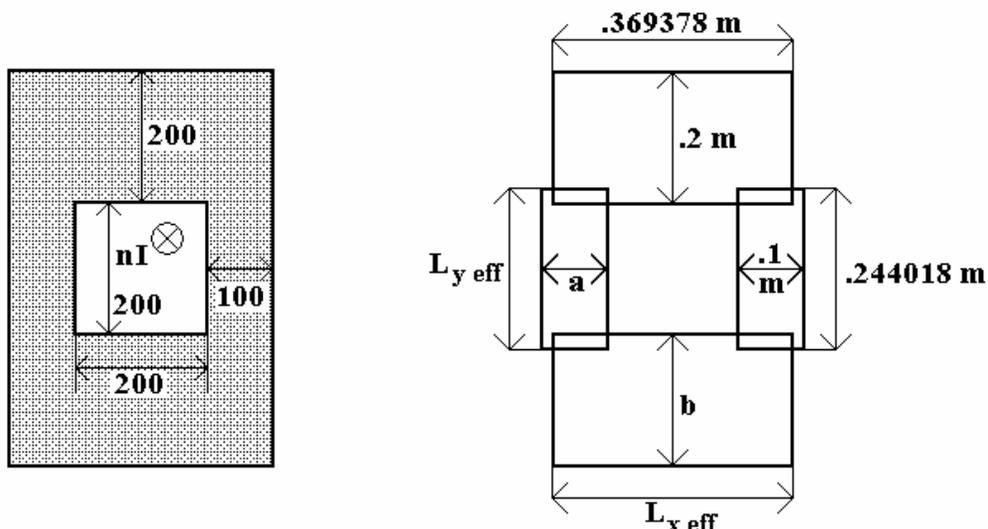


Figure 2A.03 : exemple de circuit traité en utilisant la méthode ci-dessus.

Référence : E. Matagne, G.A. Cividjian, V. Kluyskens, *Exact expression of corner reluctance in a magnetic circuit of rectangular section*, ISEF'2009, XIV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Arras, France, September 10-12, 2009

#### A2.4.2. Réluctances ou résistances des jonctions en T

Lorsqu'un tronçon rectiligne se raccorde à un autre en formant un T droit (voir figure 2.A4 ci-dessous), on peut calculer l'effet du T de façon exacte en supposant, outre l'hypothèse de circuit magnétique (pas de champ de fuite), que le matériau linéaire et que les tronçons sont longs par rapport à leur largeur. On a montré récemment que cet effet peut être pris en compte en considérant un allongement de chaque tronçon comme indiqué à la figure 2.A5.

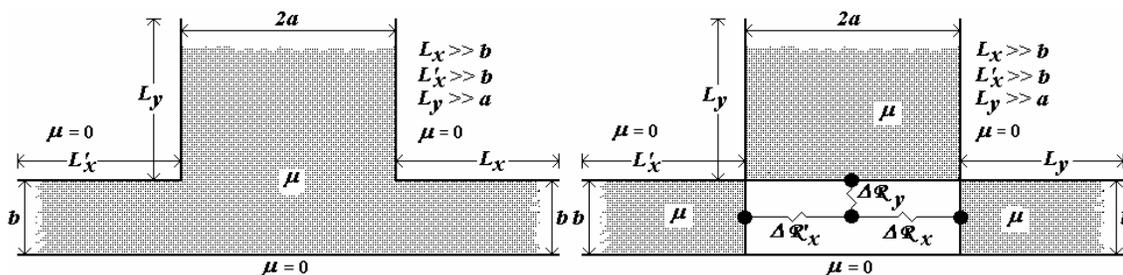


Figure 2.A.4. : problème des jonctions en T

L'expression ces allongements est

$$\Delta L_x = \frac{b}{\pi} \left[ \ln(1+k) + 2\sqrt{k} \operatorname{arctg} \frac{1}{\sqrt{k}} \right] \quad (2.A19)$$

$$\Delta L_y = \frac{a}{\pi} \left[ \ln\left(\frac{k+1}{16k}\right) + 2\frac{1}{\sqrt{k}} \operatorname{arctg} \sqrt{k} \right] \quad (2.A20)$$

où « ln » désigne le logarithme népérien et où « arc tg » est exprimé en radians, avec

$$k = \frac{a^2}{b^2} \quad (2.A21)$$

Bien que cette méthode ne soit rigoureuse que pour des tronçons longs et des matériaux linéaires, on a montré qu'elle fournit d'excellents résultats avec une caractéristique B-H réaliste et des tronçons plus courts (voir figure ci-dessous).

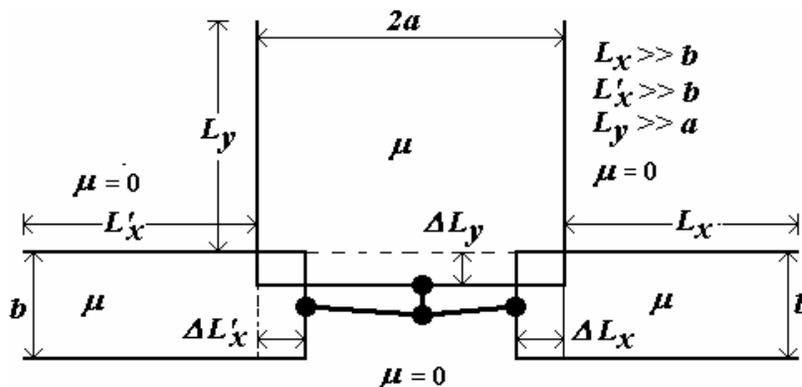
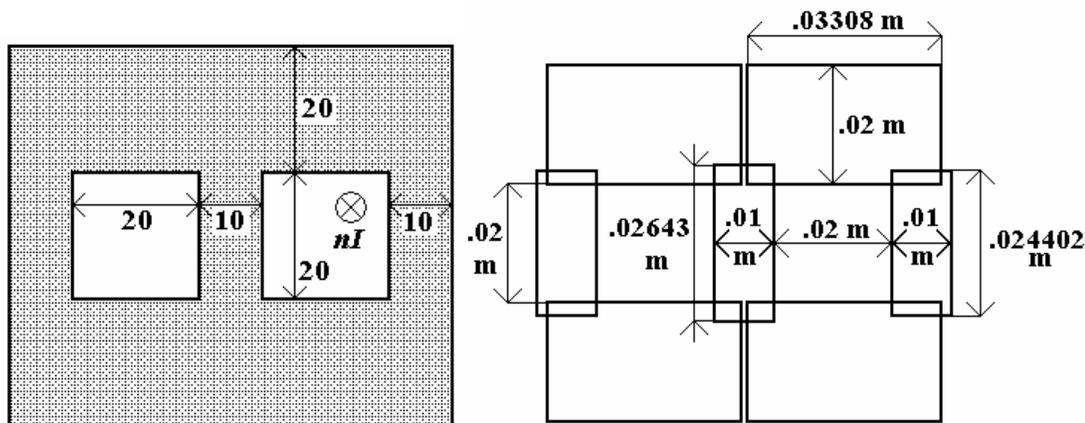


Figure 2.A.5 : géométrie équivalente à une jonction en T



Figures A.2.6. et A.2.7 : traitement d'un circuit magnétique à deux mailles.

E. Matagne, G.A. Cividjian, V. Kluyskens, *Exact expression of T- reluctances or resistances in a circuit of rectangular section*, ISEF'2011, XV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Funchal, Madeira, September 1-3, 2011

### A2.4.3. Autres réluctances de jonction entre tronçons rectilignes

D'autres jonctions entre tronçons rectilignes peuvent se rencontrer. Le calcul des réluctances correspondantes continue à faire l'objet d'études. On pourra s'inspirer notamment des travaux suivants :

G.A. Cividjian, A.G. Cividjian and N.G. Cividjian, *Some formulas for two-dimensional permeances*, IEEE Trans. Magn. Vol. 36, pp 3754-3758, Sept. 2000

G.A. Cividjian and A.G. Cividjian, *Constriction and Corner Permeances for Finite Domains*, IEEE Transactions on Magnetics, Vol. 42, N°12, December 2006

G.A. Cividjian and E. Matagne, *Resistance of arbitrary angle corner*, ISEF'2009, XIV International Symposium on Electromagnetic Fields in Mechatronics, Electrical and Electronic Engineering, Arras, France, September 10-12, 2009

#### A2.4.4. Tronçons à symétrie cylindrique

Les tronçons rectilignes ne sont pas les seuls à donner lieu à une solution exacte. C'est aussi le cas des tronçons à symétrie cylindrique et sphérique, qui sont étudiés de façon intensive dans les cours de physique élémentaire.

Le cas de tronçons cylindriques est fréquent en électrotechnique.

Pour un segment de manchon de rayon intérieur  $r_i$ , de rayon extérieur  $r_e$ , de longueur  $L$  et d'ouverture angulaire  $\alpha$ , on a les résistances

- dans la direction radiale

$$R = \frac{\rho}{\alpha L} \ln \frac{r_2}{r_1} \quad (2A.22)$$

- dans la direction azimutale

$$R = \frac{\alpha \rho}{L \ln \frac{r_2}{r_1}} \quad (2A.23)$$

- dans la direction longitudinale, on a conformément à (2A.1),

$$R = \frac{2L\rho}{\alpha(r_2^2 - r_1^2)} \quad (2A.24)$$

#### A2.4.5. Prise en compte de l'épanouissement de flux à la traversée d'un entrefer

Lorsqu'un circuit magnétique comporte un entrefer, la réluctance de celui-ci est plus faible que ce que l'on pourrait calculer en supposant que la section du circuit reste égale à celle du reste du « circuit » magnétique. Ce phénomène est dû à l'épanouissement de flux, qui fait que la section apparente de l'entrefer est supérieure à la section du ou des pôles.

Examinons d'abord le cas d'un entrefer compris entre un pôle de largeur finie et un plan infini (en pratique, une plaque qui dépasse le bord du pôle d'une longueur grande par rapport à l'épaisseur de l'entrefer  $g$ ). On suppose que la perméabilité du pôle et de la région située sous le plan infini est très grande par rapport à celle de l'entrefer. La figure 2A.7 ci-dessous représente le bord d'un tel entrefer

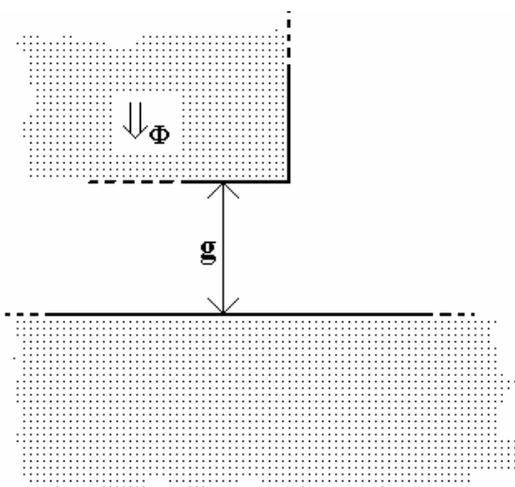


Figure 2A.8

Lorsque l'épaisseur  $g$  de l'entrefer est petite par rapport à ses dimensions transversales, on peut obtenir la réluctance de l'entrefer considérant que le champ est uniforme dans l'entrefer mais que sa section est augmentée suite au recul des bords d'une longueur

$$\Delta L = \frac{2}{\pi} [1 - \ln(2)] g \approx 0.195.. g \quad , \quad (A2.25)$$

où « ln » désigne le logarithme népérien, comme indiqué à la figure 2A.9 ci-dessus.

On notera que la réluctance ainsi calculée ne concerne que le flux magnétique qui traverse l'entrefer en traversant la surface des pôles en contact avec l'entrefer : elle ne tient pas compte du flux de fuite qui traverse l'entrefer en passant par la surface latérale des pôles : celle-ci doit donc être évaluée différemment.

Il faut aussi noter que la force exercée entre le pôle et le plan infini ne peut pas se calculer en considérant un champ uniforme et une section augmentée conformément à (A2.25). La raison en est que le flux correspond à l'intégrale de surface de  $B$ , alors que la force correspond à l'intégrale de surface de  $B^2$ . On peut néanmoins calculer la force en considérant un entrefer à champ uniforme, mais avec une augmentation de section correspondant à un déplacement des bords de

$$\Delta L' = \frac{2}{\pi} g \approx 0.637..g \quad (A2.26)$$

Si  $S'$  est la surface de l'entrefer corrigée en utilisant la formule (A2.26), la force d'attraction entre le pôle et le plan infini vaut

$$F = \frac{1}{2} \mu_0 S' \left( \frac{\mathfrak{F}}{g} \right)^2 \quad (A2.27)$$

Il est facile, toujours sous l'hypothèse d'une épaisseur  $g$  petite, de calculer la réluctance d'un entrefer situé entre deux pôles identiques, situation représentée à la figure A2.9 ci-dessous.

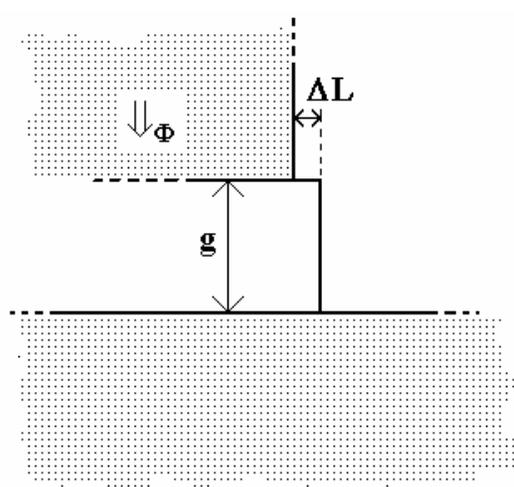


Fig. 2A.9

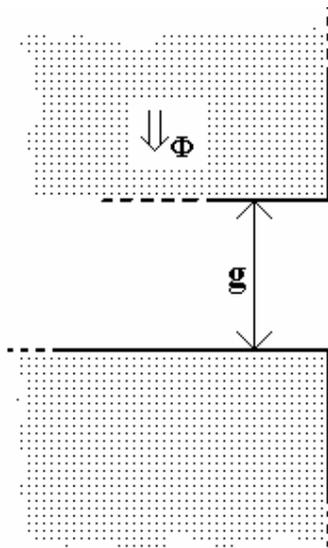


Fig. A2.10

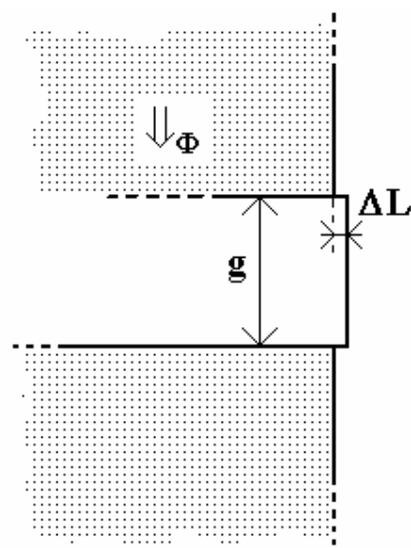


Fig. A2.11

Il suffit pour cela de noter que, par symétrie, on peut transformer la formule (A2.25) en y remplaçant  $g$  par  $g/2$ , ce qui fournit

$$\Delta L = \frac{1}{\pi} [1 - \ln(2)] g \approx 0.098.. g \quad (\text{A2.28})$$

comme montré à la figure A2.10.

De la même façon, pour calculer la force d'attraction entre les deux pôles de la figure A2.10, il suffit d'adapter la formule (A2.26) en y remplaçant  $g$  par  $g/2$ , ce qui fournit

$$\Delta L' = \frac{1}{\pi} g \approx 0.318.. g \quad (\text{A2.29})$$

puis et calculer la surface  $S'$  correspondante et d'appliquer la formule A2.27.

Références :

F.W. Carter, *The Magnetic Field of the Dynamo-Electric Machine*, Journal of the Institution of Electrical Engineer, Spon and Chamberlain, (London, England), 1926, pages 1115-38.

#### A2.4.6. Conclusion de cette annexe

Les calculs effectués en utilisant la notion de circuit magnétique et des calculs élémentaires de leurs éléments peuvent être rendus précis dans de nombreuses situations, car il est possible de tenir compte des phénomènes se produisant aux jonctions entre les éléments à l'aide de formules simples.

Les méthodes vues dans cette annexe ont cependant pour inconvénient de ne s'appliquer que si on peut faire correspondre aux éléments des régions de l'espace le long desquelles le flux magnétique reste constant, ce qui exclu à la fois la prise en compte des flux de fuite se produisant à travers la surface latérale de ces régions, ainsi que les cas où une production de flux se produit à l'intérieur de la région (cas fréquent en thermique).

Nous allons par la suite introduire une méthode plus générale de mise en correspondance du modèle « champ » avec un modèle « circuit », qui permettra d'estomper ces inconvénients et donc d'appliquer la méthode des circuits magnétiques à un plus grand nombre de cas.

## CHAPITRE III : les grandeurs locales

### et leur correspondance avec les grandeurs « circuit »

#### 3.1. Position du problème

Les modèles circuits étudiés au chapitre II sont insuffisants pour la conception de dispositif car il est impossible d'y introduire les paramètres constructifs d'un dispositif. Leurs paramètres sont déterminés à partir de résultats expérimentaux (par exemple essais à vide et en court-circuit pour un transformateur). Or, en optimisation, la plupart des jeux de paramètres constructifs considérés ne donnent pas lieu à la réalisation d'un prototype, mais seulement à une analyse par calcul.

L'utilisation de modèles locaux, ou modèles « champs », est donc inévitable.

En ce qui concerne les convertisseurs électromécaniques, les champs à considérer sont essentiellement des grandeurs électromagnétiques, comme le champ  $\mathbf{B}$  (pour rédiger ce syllabus plus rapidement, nous utiliserons souvent des caractères gras pour désigner les vecteurs au lieu d'un symbole surmonté par une flèche), ainsi que des grandeurs mécaniques, comme le champ de vitesse  $\mathbf{v}$ , et thermiques, comme le champ de température  $T$ .

Toutes les théories permettant d'étudier ce champ ont déjà été vues à l'occasion d'autres cours (cours de physique de bac 1 notamment). Nous allons cependant reprendre ces notions en insistant sur la façon de les mettre en correspondance avec les grandeurs globales (grandeurs « circuit »), dont nous avons vu l'importance au chapitre II.

Pour faciliter la correspondance, nous veillerons à utiliser le même formalisme aussi bien pour le modèle « champ » que pour le modèle « circuit ». Dans le premier cas, il s'agit du formalisme utilisé par Maxwell, le fondateur de l'électromagnétisme. Dans le second cas, il s'agira du formalisme introduit au chapitre 2.

Ces formalismes sont schématisés à la figure 3.1 ci-dessous.

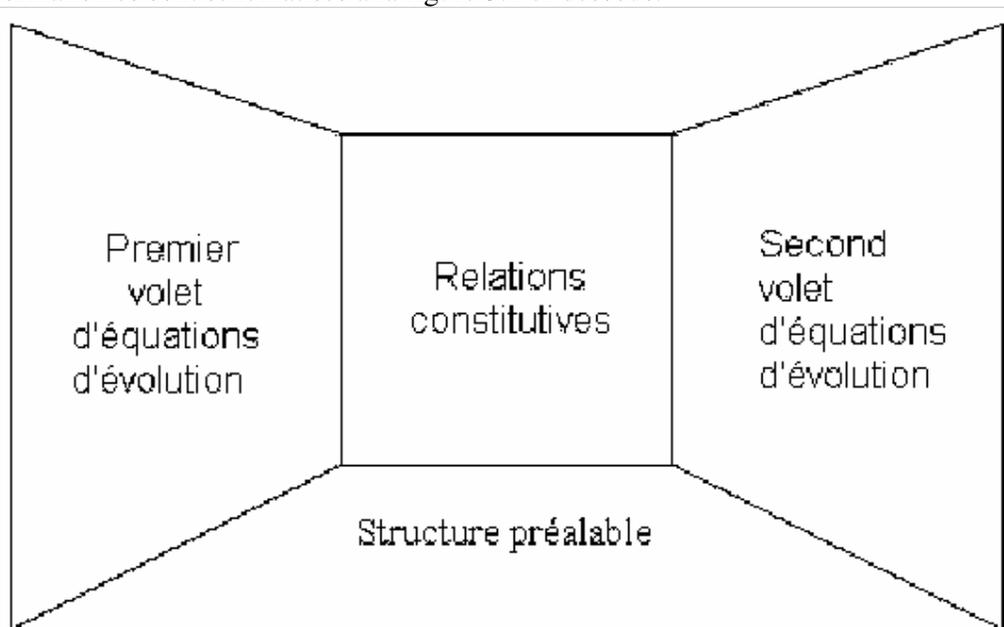


Figure 3.1 : formalisme commun adopté pour l'électromagnétisme et la théorie des circuits.

Ce formalisme n'est pas suivi par tous les auteurs. Notons cependant que, comme il est relativement général, il permet de comprendre assez facilement les différents points de vue

adoptés dans la littérature... alors que le passage direct d'un de ces points de vue à un autre serait beaucoup plus difficile.

Dans le formalisme décrit par la figure 3.1, on distingue une structure préalable dans laquelle les grandeurs propres au phénomène physique étudié n'interviennent pas. Il s'agit de la théorie des graphes orientés dans le cas de la théorie des circuits. Il s'agit de la géométrie (euclidienne ou autre) dans le cas de l'électromagnétisme.

Les grandeurs propres à la théorie sont réparties en deux volets distincts.

En électromagnétisme, le premier volet rassemblera les champs  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\rho$  et  $\mathbf{J}$ , qui auront comme analogues circuit les grandeurs  $i$ ,  $q$  et  $j$ .

Le second volet rassemblera les champs  $V$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{E}$ , qui auront comme analogues circuit les grandeurs  $u$ ,  $\psi$  et  $e$ .

Dans ce chapitre, nous ne nous intéresserons qu'à la structure préalable de ces théories et aux équations internes à chaque volet séparément, à savoir les équations d'évolution. Les relations constitutives, qui relient des grandeurs appartenant à des volets différents, seront étudiées au chapitre IV.

## 3.2. Structure préalable

### 3.2.1. Classification des grandeurs locales selon leurs propriétés mathématiques

La description locale des phénomènes électromagnétiques repose sur les notions d'espace et de temps.

La notion mathématique qui correspond le mieux à la notion physique d'espace est celle de variété différentiable.

On considère habituellement un espace à trois dimensions (l'espace ordinaire) et un espace à une dimension (le temps).

D'un point de vue conceptuel, pour l'étude des milieux en mouvement, la solution la plus simple consisterait à considérer un espace à quatre dimensions (l'espace-temps). En effet, l'espace-temps est unique, alors que la définition de l'espace ordinaire dépend de l'observateur considéré.

Les symétries du problème traité permettent souvent d'en effectuer l'analyse dans un espace de dimension moindre, certaines directions pouvant être ignorées.

Ainsi, la coordonnée  $z$  est ignorée dans les dispositifs qui présentent une symétrie de translation selon cet axe, ce qui est pratiquement le cas des machines rotatives suffisamment longues dans la direction de leur axe.

La coordonnée de position angulaire  $\varphi$  est ignorée dans les problèmes à symétrie cylindrique.

De façon tout à fait analogue, on ignore le temps lors de la description des problèmes statiques.

Les grandeurs physiques de l'électromagnétisme sont mathématisées comme étant des champs scalaires, des champs de vecteur et, plus généralement, des champs de tenseur. Une classification plus fine s'avèrera cependant utile.

Ainsi, parmi les vecteurs, nous distinguerons les vecteurs contravariants et les vecteurs covariants.

Nous distinguerons aussi les grandeurs d'après une autre propriété, appelée le poids. Les grandeurs de poids 1 sont les densités.

Ces notions sont présentées brièvement en annexe de ce chapitre.

### 3.2.2. Propriétés d'invariance

Les phénomènes physiques semblent se dérouler dans un espace-temps de dimension 4. La séparation entre le temps et l'espace n'est pas unique : elle correspond au choix d'un observateur. Le principe d'invariance nous amène à examiner la façon dont on peut passer d'un choix à un autre (changement d'observateur).

Supposant que l'on conserve le même temps, la transformation à considérer s'appelle transformation de Galilée. Celle-ci est définie par la donnée d'un champ de vitesse  $\mathbf{v}$  (qui peut ne pas être uniforme) de l'espace de départ.

Si un objet se déplace dans le nouvel espace à une vitesse  $\mathbf{v}_2$ , sa vitesse  $\mathbf{v}_1$  dans l'espace de départ est donnée par

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{v} + \mathbf{v}_2 \quad (3.1)$$

La formule (3.1) n'est simple qu'en apparence, car le vecteur  $\mathbf{v}_2$  ne fait pas partie du même espace que  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{v}_1$ . Le symbole  $\mathbf{v}_2$  de la formule ne représente donc pas la vitesse de l'objet vue par le second observateur, mais cette vitesse ramenée dans l'espace de départ en utilisant une bijection entre les deux espaces qui n'est valable qu'à l'instant considéré.

Pour respecter le principe d'invariance, il faudra préciser pour toutes les grandeurs introduites la correspondance entre l'objet mathématique qui représente cette grandeur dans le nouvel espace et l'objet qui la représente dans l'ancien, lors d'une transformation quelconque. En pratique, on peut se contenter d'examiner cette correspondance lors d'une transformation de Galilée.

L'invariance serait beaucoup plus facile à examiner dans le cadre de l'espace-temps (quatre dimensions) car, cet espace-temps étant unique, il suffit de préciser le type de la grandeur introduite (variance, poids...) pour vérifier le principe d'invariance.

### 3.2.3. Lien avec la structure préalable des modèles « circuit »

Les théories globales (théorie de type circuit) considèrent un ensemble de grandeurs n'ayant qu'un nombre fini, ou en tout cas discret, de degrés de libertés. Or, les champs pouvant avoir une valeur différente en chaque point de l'espace, leur nombre de degrés de liberté est infini. Il faut donc pour déduire un modèle global d'un modèle local imposer aux champs des contraintes supplémentaires.

#### Définition d'un mouvement à un degré de liberté

Un déplacement quelconque, réel ou virtuel, qui présente un degré de liberté  $\theta$ , peut être représenté par un champ de vecteur  $\mathbf{u}$ . Un champ uniforme représente un mouvement de translation (figure 3.2). Pour représenter une rotation, il faut un champ de la forme suggérée à la figure (3.3).



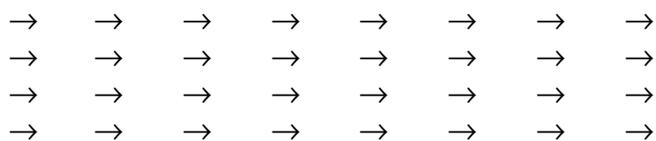


Fig. 3.2 : champ de vecteur associé aux translations horizontales

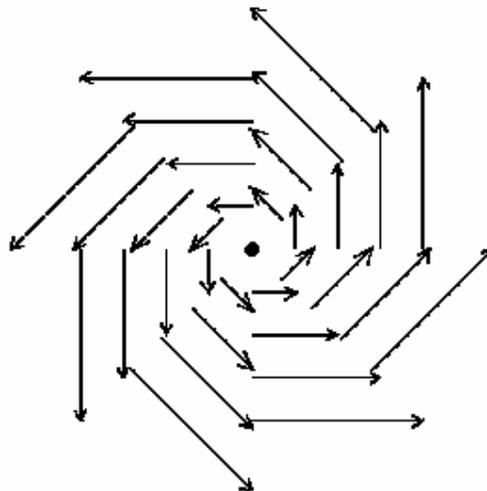


Fig. 3.3 : champ de vecteur associé aux rotations

A chaque instant, la vitesse du déplacement en un point donné est de la forme

$$\mathbf{v} = \mathbf{u} \dot{\theta} \quad (3.2)$$

Les champs de vecteur  $\mathbf{u}$  seront utilisés pour le calcul des forces généralisées (force dans le cas d'une translation, couple dans le cas d'une rotation...).

### Définition d'une branche de circuit

Alors qu'un champ bénéficie d'un nombre infini de degrés de liberté, les grandeurs associées à une branche de circuit n'ont que deux degrés de liberté. Pour passer d'un modèle champ à un modèle circuit, il faut réduire le nombre de degrés de liberté en imposant aux champs électromagnétiques des contraintes.

Le lien entre les grandeurs locales et globales ne peut pas se faire en considérant les circuits comme étant des lignes sans dimension transversale. On sait par exemple que, dans ce cas, l'inductance propre d'un circuit tend vers l'infini.

Il existe plusieurs façons d'imposer des contraintes aux champs de l'électromagnétisme afin de réduire le nombre de degrés de liberté à un nombre fini. Pour l'étude des dispositifs inductifs, ce qui est le cas le plus fréquent en électrotechnique, c'est sur la répartition spatiale du courant que l'on impose des contraintes. La répartition des filets de courant est caractérisée par un vecteur contravariant de poids 1 (la densité de filets de courants) que nous noterons

$$\mathbf{N} \text{ ou } \mathbf{N}^i$$

La densité de courant sera donc une combinaison linéaire

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \sum_a i^a \mathbf{N}_a \quad (3.3)$$

Autrement dit, on suppose connaître a priori la forme du champ  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  ! C'est bien le cas en électrotechnique lorsqu'un bobinage est formé d'un seul fil électrique (c'est-à-dire sans mise en parallèle de plusieurs sections), et que le modèle champ est macroscopique par rapport aux dimensions transversales du fil. Dans ce cas,  $\mathbf{N}$  mérite le nom de densité de conducteurs.

On remarque que la densité de conducteur est un vecteur, et non un scalaire. La composante de ce vecteur dans la direction d'un des vecteurs de base est le nombre de fois que le conducteur traverse une surface élémentaire construite sur les deux autres vecteurs de base (figure 3.4)

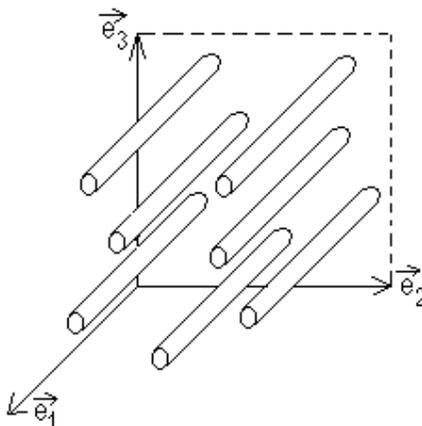


Fig. 3.4

Considérons une surface transversale au fil obtenue en divisant la section du bobinage par le nombre de spires, l'intégrale de  $\mathbf{N}$  sur cette surface est égale à 1.

$$\int \mathbf{N} \cdot d\mathbf{S} = 1 \quad (3.4)$$

(le produit scalaire est naturel car l'élément de surface  $d\mathbf{S}$  est un vecteur covariant).

Si le conducteur est subdivisé en plusieurs brins (fil de Litz) ou si le bobinage comporte plusieurs fils en parallèle, on peut encore considérer l'ensemble comme un seul filet de courant à condition de n'attribuer à chaque brin qu'une fraction de l'intégrale (3.4).

Si on doit abandonner le point de vue macroscopique et tenir compte de la forme exacte des conducteurs, la façon la plus simple de définir  $\mathbf{N}$  est de le poser égal à  $\mathbf{0}$  en dehors des conducteurs et uniforme sur la section de ceux-ci. La valeur de  $\mathbf{N}$  est alors choisie de façon à vérifier (3.3). Le choix d'une densité  $\mathbf{N}$  non uniforme sur la section des conducteurs permet de conserver la notion de circuit électrique même en présence de courants de Foucault.

Lorsque l'on a affaire à un conducteur massif, on peut encore utiliser la formule (3.3) pour obtenir une solution approchée de la densité de courant. Une bonne façon de faire consiste à choisir des répartitions  $\mathbf{N}_a$  qui correspondent de façon exacte à la répartition de courant dans des problèmes similaires à celui traité.

Notons que la même procédure peut être utilisée pour obtenir une représentation circuit de tous les systèmes physiques où un champ obéit à une divergence nulle (cas de l'induction magnétique  $\mathbf{B}$ , ce qui conduira à des circuits magnétiques) ou connue (cas de la densité de flux de chaleur, ce qui conduira à des circuits thermiques).

En utilisant la mesure de longueur, le module de  $\mathbf{N}$  et ses composantes dans un référentiel orthonormé s'expriment en « filets de courant /  $m^2$  ».

Si on considère plusieurs branches simultanément, on peut les distinguer par un indice inférieur :  $\mathbf{N}_a$  sera la branche numéro  $a$ .

Puisque les branches de circuit sont définies par un objet mathématique  $\mathbf{N}^i$ , on dispose d'une définition rigoureuse de leur multiplication par un nombre ou de leur somme, donc de leurs combinaisons linéaires.

Normalement, les filets de courant partent d'une région localisée de l'espace et aboutissent dans une autre région localisée : ces deux régions sont les bornes du circuit. En dehors des bornes, les "filets de courant" ne disparaissent pas : la divergence de la densité  $\mathbf{N}$  est donc nulle en dehors des bornes du circuit.

Exercice : on considère un disque, mobile autour de son axe, qui est le siège d'un circuit électrique réparti uniformément le long de tous les rayons (il doit pour cela être muni d'un contact glissant qui couvre l'entièreté de la circonférence du disque) comme indiqué à la figure 3.5 (un tel disque est une version améliorée de la roue de Barlow ou du disque de Faraday). Le disque a un rayon intérieur  $r_i$  et un rayon extérieur  $r_e$ . Son épaisseur est  $h$ .

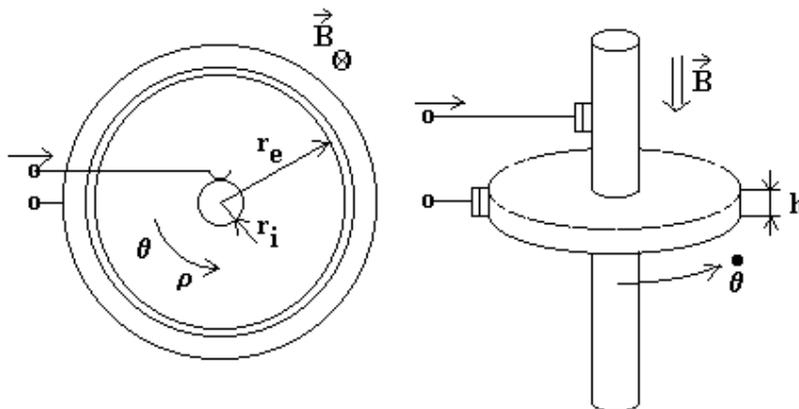


Figure 3.5.

Quelle est la densité de filets de courant  $\mathbf{N}$  correspondant à ce circuit ?

### Définition des nœuds de circuit

Si les  $\text{div } \mathbf{N}_a$  étaient linéairement indépendante, cette relation ne pourrait être satisfaite que pour  $i^a$  nuls. L'utilité d'un circuit où tous les courants sont identiquement nuls n'est pas évidente !

Pour éviter cela, on choisira, en même temps que les densités vectorielles  $\mathbf{N}_a$ , des densités scalaires  $M_i$  qui représenteront les nœuds du circuit. Ces densités seront telles que

$$\iiint M_i = 1 \quad (3.6a)$$

A chaque « branche » du circuit  $\mathbf{N}_a$ , on associera un nœud origine  $M_a$  et un nœud extrémité  $M_a'$ , tels que l'on ait

$$\text{div}(\mathbf{N}_a) = M_a' - M_a \quad (3.6b)$$

### vitesse d'une branche de circuit

Si une branche de circuit est mobile, la densité vectorielle  $\mathbf{N}_a$  qui la définit peut varier dans le temps. La variation peut être considérée comme un simple déplacement du circuit s'il existe une vitesse  $\mathbf{v}_a$  telle que

$$d\mathbf{N}_a / dt + \mathcal{L}_{\mathbf{v}_a} \mathbf{N}_a = \mathbf{0} \quad (3.7)$$

où le symbole  $\mathcal{L}_{\mathbf{v}_a}$  désigne la dérivée de Lie selon  $\mathbf{v}_a$  (ce qui correspond à l'idée d'une dérivée d'une grandeur suite à son entraînement par un champ de vecteur  $\mathbf{v}_a$ ).

Dans le langage des composantes, cette dérivée s'écrit, du moins en référentiel holonome

$$\mathcal{L}_{\mathbf{v}_a} = \sum_j v_a^j \partial_j N_a^i - \sum_j N_a^j \partial_j v_a^i + \sum_j N_a^i \partial_j v_a^j \quad (3.8)$$

La formule (3.8) découle immédiatement de l'expression générale de la dérivée de Lie d'un tenseur (donc en particulier d'un vecteur). On a en effet toujours un terme de la forme  $v_a^j \partial_j N_a^i$  quel que soit le type du tenseur que l'on dérive. Il existe un terme de la forme  $-N_a^j \partial_j v_a^i$  pour chaque indice contravariant ; enfin, le terme  $+N_a^i \partial_j v_a^j$  provient du fait que  $\mathbf{n}$  est de poids 1.

Nous dirons qu'une branche de circuit  $\mathbf{N}_a$  est glissante s'il existe un champ de vitesse  $\mathbf{v}_a$  qui satisfait (3.7).

On remarquera que la vitesse  $\mathbf{v}_a$  n'est pas définie de façon unique par l'équation (3.7) car, en dehors des bornes, on peut ajouter à  $\mathbf{v}_a$  n'importe quelle contribution parallèle à  $\mathbf{N}_a$ .

Si la dépendance temporelle de  $\mathbf{N}_a$  peut être caractérisée par une variable de "position du circuit"  $\rho_a$ , la vitesse  $\mathbf{v}_a$  doit être proportionnelle à  $\dot{\rho}_a$  :

$$\mathbf{v}_a = \mathbf{u} \dot{\rho}_a \quad (3.9)$$

où le champ de vecteur  $\mathbf{u}$  indique la direction du mouvement. Cette équation est à rapprocher de l'équation (3.2). La différence entre les deux est que (3.2) correspond à un mouvement de la matière, alors que (3.9) correspond au mouvement du circuit.

## 3.3. Premier volet d'équations d'évolution :

### équations inhomogènes de Maxwell

#### 3.3.1. Équations

$$\text{div} \mathbf{D} = \rho \quad (3.10)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{J} \quad (3.11)$$

Pour que les opérateurs divergence et rotationnel puissent être définis sans référence à une structure additionnelle (métrique ou autre), il faut que  $\mathbf{D}$  une densité vectorielle et  $\mathbf{H}$  un covecteur. Alors,  $\mathbf{J}$  est aussi une densité vectorielle et  $\rho$  une densité scalaire.

On notera que  $\text{div } \mathbf{H}$  et  $\text{rot } \mathbf{D}$  ou  $\text{rot } \mathbf{J}$  n'ont pas de signification naturelle.

De (3.10) (3.11), on déduit la loi de conservation de la charge

$$\text{div } \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0 \quad (3.12)$$

Ceux qui s'intéressent au formalisme dans l'espace à quatre dimensions peuvent consulter le site Internet !

On utilisera souvent par la suite la grandeur

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{J} + \partial_t \mathbf{D} \quad (3.13)$$

qui présente l'avantage d'avoir une divergence nulle

$$\text{div } \mathbf{J}_{\text{tot}} = 0 \quad (3.14)$$

et d'être égale au rotationnel de  $\mathbf{H}$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{J}_{\text{tot}} \quad (3.15)$$

En appliquant le théorème de Stokes à (3.15), on obtient une forme générale de la loi d'Ampère :

$$\oint \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.16)$$

En électrotechnique, on se trouve souvent dans des situations où le terme  $\partial_t \mathbf{D}$  qui figure dans (3.11) et (3.13) est négligeable. Il en est alors de même du terme  $\partial \rho / \partial t$  dans (3.12). Cette situation est dite "quasistatique magnétique". Dans une situation quasistatique magnétique, il n'y a pas lieu de faire de distinction entre les densités de courant  $\mathbf{J}$  et  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ .

### 3.3.2. Présentation sous forme de suite exacte

Les équations (3.10) (3.11) (3.12) se schématisent dans la suite exacte de la figure 3.6.

$$\begin{array}{c}
 0 \\
 \uparrow \text{ div, } \partial_t \\
 \mathbf{J}, \rho \\
 \uparrow \text{ rot, } \partial_t \\
 \mathbf{H}, \mathbf{D}
 \end{array}$$

Figure 3.6.

La suite représentée à la figure 3.6 est une suite exacte : d'une part, si  $\mathbf{H}$  et  $\mathbf{D}$  vérifient les équations (3.10) (3.11),  $\mathbf{J}$  et  $\rho$  vérifient automatiquement (3.12). D'autre part, si une densité vectorielle  $\mathbf{J}$  et une densité scalaire  $\rho$  vérifient la loi de conservation (3.12), il existe une densité vectorielle  $\mathbf{D}$  et un covecteur  $\mathbf{H}$  tels que (3.10) et (3.11) soient vérifiés.

Ce formalisme peut être présenté de façon plus simple en utilisant les grandeurs de l'espace-temps de dimension 4. Le lecteur intéressé est invité à consulter la littérature ou le site Internet (non officiel cette année)

<http://www.lei.ucl.ac.be/~matagne/ELEC2311/INDEX.HTM>

### 3.3.3. Propriétés d'invariance lors d'un changement d'observateur

Le fait d'avoir défini la nature mathématique des grandeurs  $\mathbf{D}$ ,  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{J}$  et  $\rho$  détermine la façon dont leurs composantes se transforment lors d'un changement de référentiel. Comme il s'agit d'une formulation 3D, cela ne suffit cependant pas pour respecter le principe d'invariance : il faudrait encore préciser la façon dont ces grandeurs se transforment lors d'un changement de l'échelle des temps (nous ne le ferons pas) et, surtout, lors d'un changement d'observateur (cf. paragraphe 3.2.2.).

Pour que les équations (3.10) (3.11) gardent la même forme après transformation, il faut que les champs dans l'espace du premier observateur correspondent aux champs dans l'espace du second observateur par les relations ci-dessous.

Lors d'une transformation de Galilée :

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}' \quad (3.17)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}' + \mathbf{v} \times \mathbf{D}' \quad (3.18)$$

$$\rho = \rho' \quad (3.19)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}' + \mathbf{v} \rho' \quad (3.20)$$

La façon la plus simple d'obtenir les lois de transformation (3.17) (3.18) (3.19) (3.20) passe par un raisonnement dans l'espace à 4 dimensions.

La densité scalaire  $\mathbf{H} \cdot \mathbf{D}$  reste inchangée lors d'une transformation de Galilée. On peut donc dire que

$$\mathbf{H} \cdot \mathbf{D} \text{ est un invariant} \quad (3.21)$$

### 3.3.3' Invariance lors d'une transformation conforme

Considérons une répartition du champ électromagnétique qui vérifie les équations (3.10) (3.11). Si nous effectuons une dilation de toutes les coordonnées (aussi bien d'espace que de temps) par un même facteur de dilation  $\alpha$  en gardant les mêmes valeurs du champ aux points et instants qui se correspondent, on obtient une nouvelle répartition de champ qui satisfait

automatiquement les équations (3.10) (3.11), mais il faut pour cela diviser les densités de charge et de courant par le facteur  $\alpha$ .

### 3.3.4. Lien avec les grandeurs globales

On cherche à établir une correspondance entre la grandeur globale  $i$  (courant) et une grandeur locale. Or, les courants vérifient la loi des nœuds de Kirchhoff. Pour que cette loi puisse se déduire des propriétés locales, il faut faire correspondre à  $i$  non pas  $\mathbf{J}$ , mais  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$ . En effet, la divergence de  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  est nulle en toute généralité, ce qui n'est pas le cas de la divergence de  $\mathbf{J}$ .

Le lien entre la grandeur locale  $\mathbf{J}_{\text{tot}}$  et la grandeur globale  $i$  est effectué par la "densité de lignes de courant"  $\mathbf{N}$  définie au paragraphe 3.2.3 : lorsque la densité de lignes de courant  $\mathbf{N}$  est indépendante du temps, on peut écrire

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \mathbf{N} i \quad (3.22)$$

Si plusieurs branches de circuit coexistent dans la même portion de l'espace, on aura

$$\mathbf{J}_{\text{tot}} = \sum_a \mathbf{N}_a i^a \quad (3.23)$$

Exercice : écrire la densité de courant dans la roue de Barlow, en supposant une symétrie cylindrique du dispositif. Utiliser les résultats de l'exercice précédent.

Des correspondances analogues à (3.22) (3.23) peuvent être posées pour les champs  $\mathbf{D}$  et  $\mathbf{J}$  :

$$\mathbf{D} = \mathbf{N} q \quad (3.24)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{N} j \quad (3.25)$$

Trouver un correspondant à  $\mathbf{H}$  supposerait que l'on introduise une notion de circuit magnétique.

En utilisant les équations (3.22) (3.24) (3.25) et les équations inhomogènes de Maxwell, on démontre facilement l'équation globale

$$i = \frac{dq}{dt} + j \quad (3.26)$$

Faisant abstraction du dernier terme, l'équation (3.26) est celle qui relie le courant et la charge d'une capacité. L'équation (3.26) est donc une généralisation de cette équation. La grandeur  $j$  est la partie non capacitive du courant, c'est-à-dire dans beaucoup de cas le courant de conduction (par exemple le courant de fuite d'un condensateur).

Si on considère l'ensemble des branches de circuit  $\mathbf{N}_a$  d'un système, on déduit de (3.3) que

$$\text{div } \mathbf{J}_{\text{tot}} = 0 = \sum_a i^a \text{div } \mathbf{N}_a \quad (3.26b)$$

En utilisant la notion de nœud et en ayant imposé (3.6), cette contrainte (3.26b) peut être satisfaite. Il suffit pour cela que les courants satisfassent la loi des nœuds de Kirchhoff. Cette loi est en fait une équation d'évolution propre au premier volet.

### 3.4. Second volet d'équations d'évolution : équations homogènes de Maxwell

#### 3.4.1. Équations

Les équations homogènes de Maxwell s'écrivent

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (3.27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \partial \mathbf{B} / \partial t = 0 \quad (3.28)$$

Pour que les opérateurs divergence et rotationnel puissent être définis sans référence à une structure additionnelle (métrique ou autre), il faut que  $\mathbf{B}$  soit une densité vectorielle et  $\mathbf{E}$  un covecteur.

On notera que  $\operatorname{rot} \mathbf{B}$  et  $\operatorname{div} \mathbf{E}$  ne sont pas définis de façon naturelle.

Lorsque les équations (3.27) (3.28) sont vérifiées, il existe un scalaire  $V$  et un covecteur  $\mathbf{A}$  (appelés potentiels scalaire et vecteur) tels que

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A} \quad (3.29)$$

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} V - \partial_t \mathbf{A} \quad (3.30)$$

Dans un problème de calcul de champ, le fait d'utiliser le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  comme variable indépendante suffit à garantir la satisfaction de l'équation (3.27). Par contre, comme  $\mathbf{A}$  n'est pas défini de façon unique, il faut pour obtenir un problème à solution unique imposer à  $\mathbf{A}$  des conditions supplémentaires arbitraires.

Dans le cas des problèmes magnétostatiques 2D, la grandeur utilisée comme variable indépendante est souvent  $\mathbf{A}$ . La variable  $\mathbf{A}$  présente en effet dans ce cas un avantage supplémentaire : si le champ magnétique  $\mathbf{B}$  est parallèle aux surfaces correspondant aux deux coordonnées retenues, on peut définir le potentiel vecteur  $\mathbf{A}$  de telle sorte que sa seule composante non nulle soit celle qui correspond à la coordonnée ignorée.

Ainsi, en coordonnées cartésiennes, si la coordonnée ignorée est  $z$ , on utilise comme variable indépendante  $A_z$  (fonction de  $x$  et de  $y$ ).

En coordonnées cylindriques, si la coordonnée ignorée est  $z$  (problèmes polaires), on utilise aussi comme variable  $A_z$  (fonction de  $r$  et  $\varphi$ ).

Enfin, en coordonnées cylindriques, si la coordonnée ignorée est  $\varphi$  (problèmes axiaux), on utilise comme variable  $A_\varphi$  ou  $A_{\hat{\varphi}}$  (fonctions de  $r$  et  $z$ ). Très souvent, le programme de calcul utilise  $A_{\hat{\varphi}}$  lors de ses entrées-sorties (afin de complaire les utilisateurs habitués à l'utilisation de repères orthonormés), mais utilise comme variable interne la composante relative au repère naturel, c'est-à-dire

$$A_\varphi = r A_{\hat{\varphi}} \quad (3.31)$$

car cette variable obéit à des équations plus simples.

L'utilisation de la variable  $\mathbf{A}$  présente aussi un avantage pour la présentation des résultats d'un calcul 2D. En effet, les équipotentielles de  $A_z$  ou  $A_\varphi$  (mais pas de  $A_\phi$ ) ne sont autres que les lignes de flux du champ magnétique  $\mathbf{B}$ .

Les potentiels n'étant définis qu'à une constante près, il faut pour obtenir un problème numérique bien défini imposer une contrainte qui élimine l'arbitraire, par exemple imposer la valeur du potentiel en un point, ou imposer au potentiel de respecter la symétrie du dispositif. Si on néglige cette précaution, la plupart des programmes signaleront une erreur numérique. Comme la résolution des grands systèmes se fait par des techniques itératives, d'autres programmes arrivent à fournir une solution convenable sans signaler que le problème est indéterminé (mais la convergence risque alors d'être perturbée) !

En électrotechnique, on se trouve parfois dans des situations où le terme  $\partial_t \mathbf{B}$  qui figure dans (3.28) est négligeable. Cette situation est dite "quasistatique électrique". Dans une situation quasistatique électrique, il n'y a pas lieu de considérer le terme  $\partial_t \mathbf{A}$  dans l'équation (3.3à) du potentiel scalaire.

On désigne sous le nom de quasistatique galvanique une situation qui est à la fois quasistatique magnétique et électrique.

### 3.4.2. Écriture sous la forme d'une suite exacte

Les premières équations des paragraphes 3.2.1. et 3.3.1. peuvent être schématisées par les deux suites exactes représentées à la figure 3.7.

$$\begin{array}{ccc}
 0 & & \\
 \uparrow & \partial_t, \text{div} & \\
 \rho, \mathbf{J} & & \mathbf{V}, \mathbf{A} \\
 \uparrow & \text{rot}, \partial_t & \downarrow \text{grad}, \partial_t \\
 \mathbf{D}, \mathbf{H} & & \mathbf{E}, \mathbf{B} \\
 & & \downarrow \text{rot}, \partial_t \\
 & & \mathbf{0}
 \end{array}$$

Figure 3.7.

On remarquera que les équations d'évolution constituent deux volets complètement séparés (variables différentes, aucune équation pour effectuer la jonction entre les deux groupes). On remarque cependant une analogie (dualité) entre les deux volets.

Note méthodologique : les équations d'évolution étant valables en toute généralité, si on peut résoudre un problème en utilisant uniquement ces équations, il est préférable de le résoudre de cette façon. C'est là une conséquence pratique du principe de parcimonie.

Exercice : examinez les simplifications que l'on peut apporter au formalisme dans chacun des trois cas quasistatiques.

Le formalisme ci-dessus peut être présenté de façon plus simple en utilisant les grandeurs de l'espace-temps de dimension 4. Le lecteur intéressé est invité à consulter la littérature ou le site Internet (non officiel cette année)

<http://www.lei.ucl.ac.be/~matagne/ELEC2311/INDEX.HTM>

### 3.4.3. Propriétés d'invariance lors d'un changement d'observateur

Le fait d'avoir défini la nature mathématique des grandeurs  $\mathbf{B}$ ,  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{V}$  et  $\mathbf{A}$  détermine la façon dont leurs composantes se transforment lors d'un changement de référentiel. Comme il s'agit d'une formulation 3D, cela ne suffit cependant pas pour respecter le principe d'invariance : il faudrait encore préciser la façon dont ces grandeurs se transforment lors d'un changement de l'échelle des temps (nous ne le ferons pas) et, surtout, lors d'un changement d'espace (transformation de Galilée).

Pour que les équations (3.27) (3.28) (3.29) (3.30) gardent la même forme après transformation, il faut que les champs dans l'espace du premier observateur correspondent aux champs dans l'espace du second observateur par les relations ci-dessous.

Lors d'une transformation de Galilée :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}' \quad (3.32)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}' - \mathbf{v} \times \mathbf{B}' \quad (3.33)$$

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{A}' \quad (3.34)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}' \quad (3.35)$$

La façon la plus simple d'obtenir les lois de transformation (3.32) (3.33) (3.34) (3.35) passe par un raisonnement dans l'espace à 4 dimensions.

On remarque (formule 1.33) que le champ électrique n'est pas le même dans tous les référentiels. En particulier, dans le cas d'un milieu parfaitement conducteur, le champ électrique est nul dans le référentiel propre du milieu, mais, si le milieu est en mouvement, le champ ne sera pas nécessairement nul dans le référentiel "du laboratoire", c'est-à-dire un référentiel que l'on considère comme fixe. L'application aveugle du principe selon lequel le champ électrique est nul dans un conducteur parfait conduit donc à des raisonnements faux dans le cas de conducteurs mobiles.

La densité scalaire  $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$  reste inchangée lors d'une transformation de Galilée. On peut donc dire que

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} \text{ est un invariant.} \quad (3.36)$$

### 3.4.3' Invariance lors d'une transformation conforme

Considérons une répartition du champ électromagnétique qui vérifie les équations (3.27) (3.28). Si nous effectuons une dilation de toutes les coordonnées (aussi bien d'espace que de temps) par un même facteur de dilation  $\alpha$  en gardant les mêmes valeurs du champ aux points et instants qui se correspondent, on obtient une nouvelle répartition de champ qui satisfait automatiquement les équations (3.17) (3.18). Dans l'opération, les potentiels vecteurs et scalaires doivent cependant être multipliés par le facteur  $\alpha$ .

### 3.4.4. Lien avec les grandeurs globales

En contractant la densité de lignes de courant  $\mathbf{N}$  avec le covecteur  $\mathbf{A}$ , on obtient une densité scalaire. Intégrée sur tout l'espace, celle-ci fournit une grandeur que nous désignerons par la lettre  $\psi$

$$\psi = \iiint \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} \, dV = \iiint \sum N^i A_i \, dV \quad (3.37)$$

La formule (3.37) se réduit à

$$\psi = \int \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} \quad (3.38)$$

si le circuit tend vers une ligne (sans dimension transversale).

Si la courbe sur laquelle s'effectue l'intégration (3.38) est fermée, on obtient par le théorème de Stokes

$$\psi = \oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = \iint \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \quad (3.39)$$

La définition (3.37) généralise donc la définition élémentaire du flux (3.39).

Cette généralisation est indispensable pour pouvoir déterminer par calcul de champ l'inductance propre d'un circuit car, si on suppose ce circuit sans dimension transversale, le flux calculé est systématiquement infini.

Certains logiciels de calcul de champ soit n'utilisent pas la densité de conducteur  $\mathbf{N}$ , soit l'utilisent pendant la phase d'introduction des données mais ne laissent pas cette densité à la disposition de l'utilisateur lors du « post-traitement », phase pendant laquelle on exploite les résultats du calcul de champ.

Pour pouvoir calculer le flux par formule (3.37), une possibilité est alors de remplacer  $\mathbf{N}$  par sa valeur tirée de (3.22), c'est-à-dire d'effectuer le calcul

$$\psi = \frac{1}{i} \iiint \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (3.40)$$

Cette façon de faire conduit à cependant ses limites. D'une part, il n'est pas possible de calculer ainsi le flux dans un circuit qui n'est parcouru par aucun courant. On doit donc faire le calcul de champ en remplaçant les courants nuls par des courants petits mais non nul ! D'autre part, lorsqu'il y a plusieurs circuits dans un dispositif, il faut avant de faire l'intégrale (3.40) pouvoir isoler la densité de courant correspondant à celui de ces circuits dont on veut calculer le flux, ce qui n'est pas toujours facile.

Ficelle symptomatique de "l'état de l'art" : certains logiciels comportent une routine incorporée qui calcule la quantité (notons que  $\mathbf{J} = \mathbf{J}_{\text{tot}}$  dans la cas quasistatique magnétique)

$$\frac{1}{2} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \, dV \quad (3.41)$$

sous le nom d'énergie (bien que l'expression (3.41) ne soit égale à l'énergie que dans des cas très particuliers : linéarité des matériaux, absence d'aimantation permanente...). Cette routine, même dans les situations où elle ne fournit pas une valeur admissible de l'énergie, est utilisable pour calculer le flux lorsque la zone où (3.41) est évaluée ne

comporte qu'une branche de circuit : il faut multiplier le résultat fourni par la routine par 2 et le diviser par le courant  $i$  dans le circuit considéré. A nouveau, on notera que la méthode ne fonctionne que si le courant  $i$  est non nul.

$$\Psi = \frac{2}{i} \left\{ \frac{1}{2} \iiint \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} dV \right\} \quad (3.42)$$

Certains logiciels ont même prévu une routine pour calculer le flux selon la formule (3.42) .... mais cette routine ne fournit la valeur correcte du flux que si le dispositif ne comporte qu'un seul circuit et si le courant n'est pas nul. Il faut aussi se méfier du signe du flux calculé par cette routine, certains programmeurs, sans doute convaincu que le flux est toujours une grandeur positive, ont remplacé dans la formule (3.42) le courant  $i$  par sa valeur absolue du courant.

Ces exemples montrent qu'il faut se méfier des valeurs fournies par les logiciels, même si ce sont des logiciels commerciaux, la signification réelle de ces valeurs n'étant pas toujours ce que l'on pourrait croire.

Pour compléter la correspondance avec les modèles circuits, nous adopterons aussi les relations

$$u_a = \iiint (\mathbf{M}_a - \mathbf{M}_a') \cdot (\mathbf{V} - \mathbf{v}_a) \cdot \mathbf{A} dV \quad (3.43)$$

et

$$e_a = \iiint \mathbf{N}_a \cdot (\mathbf{E} - \mathbf{v}_a \times \mathbf{B}) dV \quad (3.44)$$

Dans ces équations, on voit que la grandeur qui est intégrée correspond non pas au potentiel et au champ électriques vus par un observateur fixe, mais par un observateur se déplaçant à la même vitesse que le circuit.

On peut démontrer que les grandeurs ainsi définies vérifient la loi de Faraday

$$u = \frac{d\Psi}{dt} + e \quad (3.45)$$

### 3.5. Grandeur énergétiques

La question de l'énergie ne pourra être traitée complètement que lorsque nous aurons introduit les relations constitutives. On peut cependant déjà définir certaines grandeurs énergétiques et obtenir quelques équations utiles en utilisant uniquement les équations d'évolution introduites dans ce chapitre. On définit ainsi le vecteur de Poynting

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (3.46)$$

et

$$\mathbf{S}_p = \mathbf{J}_{\text{tot}} \cdot \mathbf{V} \quad (3.47)$$

qui est une variante du vecteur de Slépián.

Ces vecteurs peuvent tous deux s'interpréter comme le flux d'énergie du champ électromagnétique. Nous n'examinerons ci-dessous que le cas du vecteur de Poynting.

Pour cela, nous définissons une densité d'énergie apparente

$$W_{\text{app}} = \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} \quad (3.48)$$

Cette densité d'énergie apparente n'est pas égale à la densité d'énergie que nous définirons au chapitre 4 en utilisant les relations constitutives. En fait, elle ne sera égale à la densité d'énergie que dans le cas des milieux linéaires. On peut cependant s'en servir pour établir un semblant de loi de conservation

$$\partial_t W_{\text{app}} + \text{div} \mathbf{S} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{J} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \partial_t \mathbf{H} + \frac{1}{2} \mathbf{D} \partial_t \mathbf{E} - \frac{1}{2} (\partial_t \mathbf{B}) \mathbf{H} - \frac{1}{2} (\partial_t \mathbf{D}) \mathbf{E} \quad (3.49)$$

Dans l'équation (3.49), le terme  $-\mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$  s'interprète comme la densité de puissance transmise par le champ électromagnétique au milieu par l'intermédiaire de la densité de courant. Les termes suivants sont plus gênants : nous verrons au chapitre 4 que l'on peut les simplifier en utilisant les relations constitutives.

On peut écrire une équation semblable à (3.49) pour exprimer une conservation de l'impulsion. On définit pour cela

$$\mathbf{G} = \mathbf{D} \times \mathbf{B} \quad (3.50)$$

qui s'interprète comme le flux d'impulsion, ainsi qu'un tenseur

$$T^{ji} = B^j H_i + D^j E_i - W_{\text{app}} \delta^j_i \quad (3.51)$$

où le symbole  $\delta^j_i$  vaut 1 lorsque  $j = i$  et 0 sinon. La grandeur (3.51) joue un rôle comparable à celui du tenseur des contraintes en mécanique des milieux continus. En effet, on obtient en utilisant à nouveau les équations de Maxwell

$$\begin{aligned} -\partial_t \mathbf{G} + \sum_j \partial_j T^{ji} = & \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E} + \frac{1}{2} \sum_j B^j \partial_i H_j + \frac{1}{2} \sum_j D^j \partial_i E_j \\ & - \frac{1}{2} \sum_j (\partial_i B^j) H_j - \frac{1}{2} \sum_j (\partial_i D^j) E_j \end{aligned} \quad (3.51)$$

où les termes  $\mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho \mathbf{E}$  s'interprètent comme la force exercée par le champ électromagnétique sur le milieu par l'intermédiaire des courants d'une part et des charges électriques d'autre part. Les termes suivants de (3.51) seront remodelés au chapitre suivant en utilisant les relations constitutives.

Nous verrons aussi que le tenseur (3.51) est, à la trace près, égal à un tenseur nommé « tenseur de Maxwell » et qui sera tout à fait analogue au tenseur de contrainte de la mécanique des milieux continus.

Notons que les équations (3.49) et (3.51) peuvent s'écrire de façon plus simple en utilisant un formalisme à 4 dimensions. Dans ce cas, on peut former un tenseur

$$\begin{bmatrix} W_{\text{app}} & -G_i \\ S^i & T^{ji} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

qui est la partie sans trace d'un tenseur connu sous le nom de tenseur énergie-moment électromagnétique.

## ANNEXE 3.1 : Rudiments de géométrie différentielle

Nous ne faisons ici qu'un survol des notions utilisées en géométrie différentielle. Le lecteur désireux d'en avoir une compréhension plus détaillée est renvoyé aux ouvrages traitant de ce sujet.

Les notions de vecteurs introduites en mathématique élémentaire correspondent assez mal à l'utilisation que l'on en fait en physique. Ainsi, on définit souvent des vecteurs liés comme étant un couple de points, ce qui n'est pas très naturel car, si on peut donner un sens au point origine en disant que le vecteur représente une grandeur (champ de vitesse par exemple) prise en ce point, le point extrémité n'a pas de signification physique et dépend d'ailleurs du choix des unités.

La même critique s'applique aux vecteurs libres, qui sont définis comme une classe de vecteurs liés.

Il vaut mieux (ce que font d'ailleurs les mathématiciens) considérer les vecteurs « ordinaires » comme des opérateurs de dérivation des champs scalaires.

Par exemple, si nous considérons une répartition de température constante (selon le temps  $t$  mais pas selon l'espace) à la surface de la terre et un voyageur se déplaçant à une vitesse  $v$ , la variation de température ressentie par ce voyageur sera

$$\frac{dT}{dt} = \mathcal{L}_v T \quad (3.53)$$

où le symbole  $\mathcal{L}$  désigne la dérivée de Lie. Nous ne définirons pas ici cette notion mais, pour fixer les idées, disons que dans un système de coordonnées cartésien, on a

$$\mathcal{L}_v T = v^x \partial_x T + v^y \partial_y T + v^z \partial_z T \quad (3.54)$$

où  $v^x$ ,  $v^y$  et  $v^z$  sont les composantes de la vitesse, tandis que  $\partial_x$ ,  $\partial_y$  et  $\partial_z$  sont les dérivées partielles par rapport à chaque coordonnée.

$$\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i} \quad \text{où } i \in \{x, y, z\} \quad (3.55)$$

L'ensemble des vecteurs **en un point** a une structure algébrique nommée « espace vectoriel ».

Sur un espace de dimension  $n$ , nous appellerons "repère en un point  $P$ " un ensemble de  $n$  vecteurs formant une base des vecteurs définis en ce point  $P$ . Nous appellerons référentiel un champ de repère. A tout système de coordonnées on associe son référentiel **naturel** (formé par les dérivées partielles selon chaque coordonnées, lesquelles sont des vecteurs avec la définition proposée pour ces derniers).

$$\mathbf{e}_i \equiv \partial_i \quad (3.56)$$

La réciproque n'est pas vraie : seuls les référentiels **holonomes** peuvent être associés à un système de coordonnées.

Les référentiels utilisés ne sont pas toujours supposés cartésiens ( $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$ ,  $\mathbf{e}_z$ ) car d'autres repères conviennent mieux pour l'étude de dispositif présentant des symétries. En particulier, de nombreux dispositifs présentent une symétrie cylindrique. On utilise alors le référentiel naturel ( $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\varphi$ ,  $\mathbf{e}_z$ ) ou le référentiel orthonormé ( $\mathbf{e}_{\hat{x}}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{y}}$ ,  $\mathbf{e}_{\hat{z}}$ ).

Ayant fait choix d'un référentiel, les champs de vecteurs sont caractérisés par  $n$  composantes, ce qui permet le calcul numérique. On peut noter ces composantes à l'aide d'un indice  $i$  pouvant prendre  $n$  valeurs. Pour les vrais vecteurs, nous placerons cet indice en haut (attention à ne pas le confondre avec un exposant). Les composantes d'un vecteur  $\mathbf{u}$  peuvent donc être notées

$$\{u^i \mid i = 1, 2, 3\} \quad (3.57)$$

et on a

$$\mathbf{u} = \sum_i u^i \mathbf{e}_i \quad (3.58)$$

Pour la facilité, on omet habituellement de mentionner les valeurs prises par  $i$ , ainsi que les crochets. Les trois composantes d'un vecteur sont donc désignées par  $u^i$ . Par extension,  $u^i$  désignera le vecteur  $\mathbf{u}$  lui-même, c'est ce que l'on appelle le langage des composantes.

Par convention, sauf indication contraire, les indices latins tels que  $i$  seront censés prendre les valeurs  $i = 1, 2$  et  $3$ , tandis que les indices grecs comme  $\mu$  prendront les valeurs  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Certains auteurs prennent la convention opposée ! Nous utiliserons un indice latin tel que  $a$  lorsque le nombre de valeurs possibles pour l'indice n'est pas fixé à 3 ou 4.

Il existe en fait plusieurs sortes de vecteurs. On distingue les vecteurs contravariants (vecteurs ordinaires définis ci-dessus) et les vecteurs covariants (ou covecteurs). La notation indiciaire permet d'indiquer la "variance" du vecteur,  $u^i$  désignant un vecteur contravariant et  $u_i$  un vecteur covariant.

La distinction entre vecteurs co- et contra-variants est nécessaire pour pouvoir écrire de façon systématique (et non au cas par cas) la façon dont les composantes d'un vecteur se transforment lors d'un changement de référentiel si l'un des deux référentiels n'est pas orthonormé. Elle apparaît aussi dans l'usage des opérateurs différentiels qui peuvent être appliqués à un vecteur. En dimension 3, le rotationnel ne s'applique de façon naturelle qu'aux vecteurs covariants. Ce sont aussi les seuls pour lesquels on peut calculer une circulation en effectuant une intégrale de ligne. Pour fixer les idées, signalons que les champs électrique  $\mathbf{E}$  et magnétique  $\mathbf{H}$  sont des vecteurs covariants.

Nous n'essayerons pas ici de définir mathématiquement les vecteurs covariants. Nous nous contenterons de dire comment leurs composantes se transforment lors d'un changement de repère. Considérons pour cela deux repères liés par la transformation

$$\mathbf{e}_i = \sum_j \mathbf{e}_j A^j_i \quad (3.59)$$

où le symbole « ' » a été placé par abus d'écriture sur le symbole de l'indice plutôt que sur le symbole du vecteur.

Si on désigne par  $A^{i'}_i$  l'inverse de la matrice  $A^j_i$ , on montre facilement que les composantes du vecteur  $\mathbf{u}$  dans le nouveau repère sont

$$u^{i'} = \sum_i A^{i'}_i u^i \quad (3.60)$$

Le fait que la transformation des composantes du vecteur se fasse selon la matrice inverse de la matrice de changement de repère justifie la dénomination de vecteur contravariant.

Au contraire, les composantes d'un vecteur covariant se font en utilisant la même matrice que le changement de repère. On a ainsi

$$H_{i'} = \sum_i H_i A^i_{i'} \quad (3.61)$$

La distinction entre vecteurs contravariants et covariants n'apparaît pas si on se limite à l'utilisation de repères cartésiens. En effet, la matrice  $A^i_{i'}$  est alors orthonormée, de sorte que son inverse n'est autre que sa transposée, et que les lois de transformation des vecteurs contravariants et covariants coïncident.

Moyennant le choix d'un référentiel, les tenseurs sont définis par  $n^m$  composantes, numérotées à l'aide de  $m$  indices. L'ordre des indices est important. Chaque indice peut être contravariant ou covariant. On dit qu'un tenseur est symétrique (antisymétrique) en une paire d'indices de même variance si, en permutant les valeurs des deux indices de la paire, on obtient une composante égale (opposée) à celle de départ.

Les composantes d'un tenseur à deux indices peuvent être présentées sous forme de matrice. Habituellement, le premier indice numérote les lignes et le second les colonnes.

La variance n'est pas la seule propriété permettant de distinguer plusieurs types de scalaires, vecteurs et plus généralement tenseurs. Ces grandeurs se distinguent aussi par leur « poids ». Les vecteurs contravariants et covariants introduits ci-dessus sont de poids zéro. Dans le cas d'une grandeur de poids  $p$ , la loi de changement de repère comporte le déterminant de la matrice de changement avec un exposant. On a par exemple pour un vecteur contravariant de poids  $p$

$$B^{i'} = |A^j_{j'}|^{-p} \sum_i A^i_{i'} B^i = |A^j_{j'}|^p \sum_i A^i_{i'} B^i \quad (3.62)$$

Les grandeurs de poids 1 sont appelées densités (scalaires, vectorielles ou tensorielles). Cette notion nous est plus familière que sa définition pourrait le laisser penser : chacun pressent la différence de nature entre la température  $T$  (vrai scalaire, c'est-à-dire scalaire de poids 0) et la densité de charge  $\rho$  (densité scalaire, c'est-à-dire scalaire de poids 1).

La distinction entre grandeurs de poids différents est nécessaire si l'on considère des mouvements accompagnés d'une déformation, ou encore si on utilise des référentiels non orthonormés.

Les différences de poids apparaissent aussi dans l'usage des opérateurs différentiels et des intégrales. En dimension 3, le gradient ne s'applique de façon naturelle qu'à un scalaire de poids nul. Par contre, la divergence ne s'applique de façon naturelle qu'aux vecteurs contravariants de poids 1, et le résultat de l'opération est un scalaire de poids 1, c'est-à-dire une densité scalaire. De même, on ne peut faire une intégrale de volume que sur une densité scalaire : on le fera sur la densité de charge mais pas sur la température !

Ce n'est que pour les vecteurs contravariants de poids 1 (densités vectorielles) que l'on peut obtenir un flux en procédant à une intégrale de surface. Pour fixer les idées disons que les champs de déplacement électrique  $\mathbf{D}$  et d'induction  $\mathbf{B}$  sont des vecteurs contravariants de poids 1.

Enfin, une dernière distinction concerne la parité, qui peut valoir 0 ou 1. Cette caractéristique n'apparaît que si l'on fait un changement de repère dont le déterminant est négatif (passage d'un repère droitier à un repère gaucher). Les grandeurs de parité 1 sont appelées pseudoscalaires, pseudovecteurs ou pseudotenseurs. La distinction

entre grandeurs de parité différente peut être utile pour l'écriture des conditions de symétrie.

Les ouvrages d'électromagnétisme qui datent de quelques années distinguent les vecteurs polaires (parité 0) et les vecteurs axiaux (parité 1), ces derniers étant notés par une lettre surmontée d'une flèche courbe, comme les champs magnétiques  $\vec{H}$  et  $\vec{B}$ . Beaucoup d'auteurs ne mentionnent plus cette distinction, mais négligent de signaler que leurs formules ne sont valables qu'en référentiel droitier. Nous supposerons par la suite que tous les référentiels utilisés sont droitiers, ce qui nous dispensera d'examiner la parité des grandeurs.

Le langage des composantes permet de définir facilement le produit tensoriel. Ainsi, le produit tensoriel d'un vecteur  $E_i$  et d'un vecteur  $B^j$  est le tenseur d'ordre 2

$$E_i B^j \quad (3.63)$$

Le poids du résultat s'obtient en sommant les poids des facteurs. Il en est de même de la parité, mais modulo 2.

La contraction d'un indice covariant et d'un indice contravariant conduit à un nouveau tenseur dont l'ordre est réduit de deux. On définit ainsi un "produit scalaire"

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = \sum_{i=1,2,3} E_i B^i \quad (3.64)$$

La contraction ne modifie ni le poids ni la parité.

Pour alléger les notations, on convient souvent (convention d'Einstein) que, lorsque la même lettre est utilisée pour noter un indice bas et un indice haut, il faut faire la sommation sur toutes les valeurs de ces indices. On note donc

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = E_i B^i \quad (3.65)$$

Nous ne nous permettrons pas cette facilité, qui s'est avérée perturbante pour certains lecteurs.

Notons que le produit scalaire est "naturel" lorsqu'il est effectué entre une grandeur covariante et une grandeur contravariante. Le produit scalaire de deux vecteurs quelconque demande l'intervention d'une structure supplémentaire de l'espace (structure métrique). Le principe de parcimonie nous amène donc à éviter de faire des produits scalaires entre des grandeurs de même variance.

## Annexe 3.2 : méthode systématique de calcul de paramètres circuits sans utiliser explicitement des calculs de champ

Nous avons vu en annexe 2 qu'il était parfois possible de calculer des paramètres circuits à partir des dimensions géométriques du dispositif et des caractéristiques des matériaux sans effectuer explicitement de calcul de champ. Maintenant que nous avons introduit au chapitre III une méthode systématique de définition des circuits, en utilisant la « densité de branche de circuit »  $\mathbf{N}_a$ , nous pouvons nous demander si la même possibilité n'existe pas pour des circuits plus généraux.

Logiquement, nous devrions examiner ce point dans le cadre du chapitre suivant, qui est consacré aux matériaux. Cette annexe a pour but d'anticiper certaines parties de cette étude afin de permettre leur application plus hâtive dans le cadre du projet associé à ce cours.

### A3.2.1. Lien entre résistivité et résistance

Considérons pour l'instant le cas d'un circuit immobile ( $\mathbf{v}_a = 0$ ) dans lequel le champ électrique  $\mathbf{E}$  est proportionnel à la densité de courant  $\mathbf{J}$ , soit

$$\mathbf{E} = \rho \mathbf{J} \quad (3.A1)$$

où  $\rho$  est la résistivité du matériau (nous verrons au chapitre suivant que l'on peut généraliser cette relation pour l'appliquer au calcul de la résistance d'un circuit glissant !)

Alors, en utilisant (3.A1), (3.23) et (3.44), on montre immédiatement que

$$e = R i \quad (3.A2)$$

avec

$$R = \iiint \rho \mathbf{N}^2 dV \quad (3.A3)$$

On peut écrire la formule (3.A1) sous la forme plus générale

$$E_i = \sum_j \rho_{ij} J^j \quad (3.A4)$$

qui englobe le cas d'un matériau anisotrope si la matrice des  $\rho_{ij}$  n'est pas un multiple de la matrice unité. Une expression plus générale de la résistance est donc

$$R = \iiint \sum_{ij} \rho_{ij} N^i N^j dV \quad (3.A5)$$

S'il existe plusieurs circuits repérés par des indices  $a, b, \dots$ , on peut calculer les résistances propres et mutuelles de ces circuits par

$$R_{ab} = \iiint \sum_{ij} \rho_{ij} N_a^i N_b^j dV \quad (3.A6)$$

et obtenir ainsi, au lieu de (3.A2),

$$e_a = \sum_b R_{ab} i^b \quad (3.A7)$$

Dans cette optique, la résistance propre d'un circuit « a » devrait être notée  $R_{aa}$  mais on la notera souvent  $R_a$ .

### A3.2.2. Résistances thermiques

Puisque la notion de « densité de branche de circuit » s'applique aussi bien aux circuits magnétiques et thermiques qu'aux circuits électriques, on peut utiliser les formules (3.A3), (3.A5) ou (3.A6) pour calculer des réductances ou des résistances thermiques. Dans le cas des circuits thermiques, nous noterons

$$R_{th\ ab} = \iiint N_{th\ a} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot N_{th\ b} \, dV = \iiint \sum_{ij} N_{th\ a}^i v_{ij} N_{th\ b\ j} \, dV \quad (3.A8)$$

où  $\lambda$  est la conductivité thermique du milieu et  $v = 1 / \lambda$  sa résistivité thermique.

La formule (3.A20) peut être très utile pour déterminer un modèle thermique. Un exemple sera détaillé dans les transparents du cours magistral n°4.

### A3.2.3 Valeurs de la résistivité de quelques matériaux

Voici quelques valeurs de  $\rho$ , mesurées à 20°C, relatives à des conducteurs utilisés en électrotechnique.

Argent :	15.5 10 <sup>-9</sup> Ωm
Cuivre :	17.0 10 <sup>-9</sup> Ωm
Aluminium :	27.0 10 <sup>-9</sup> Ωm
Fer :	89.0 10 <sup>-9</sup> Ωm

### A3.2.4. Effet de la température

La résistivité, et donc la résistance, dépendent de la température. Pour les métaux, la résistivité est à peu près proportionnelle à la température absolue T. Donc, si  $\theta$  est la température centigrade et  $R_{ref}$  la résistance à une température de référence  $\theta_{ref}$  exprimée en degrés centigrades, on a approximativement

$$R(\theta) \approx R_{ref} \frac{\theta + 273.15}{\theta_{ref} + 273.15} \quad (3.A9)$$

La plupart des métaux usuels vérifient approximativement cette loi, avec cependant quelques exceptions comme le constantan.

Ainsi, on a trouvé expérimentalement que, pour le cuivre dans la gamme des températures usuelles (0° à 200°C), la variation de résistance est donnée avec une bonne précision par l'expression

$$R_{cu}(\theta) \approx R_{cu\ ref} \frac{\theta + 235}{\theta_{ref} + 235} \quad (3.A10)$$

On voit qu'un échauffement de 100° a déjà une influence sensible sur la résistance d'un enroulement. Le phénomène est souvent gênant mais on l'utilise parfois pour déterminer par mesure de la résistance d'un enroulement sa température moyenne.

Souvent, on écrit la variation de résistance sous la forme

$$R(\theta) \approx R_{ref} [1 + \alpha_{ref} (\theta - \theta_{ref})] \quad (3.A11)$$

**Avertissement 1 :** le coefficient de résistance  $\alpha_{\text{ref}}$  est souvent écrit simplement  $\alpha$ . Or, sa valeur dépend du choix de la température de référence. On ne s'étonnera donc pas de trouver des valeurs de  $\alpha$  légèrement différentes selon les auteurs. Lors de l'utilisation de la formule (3.A18), il faudra donc être attentif à utiliser une valeur de  $\alpha$  correspondant à la température de référence utilisée pour définir  $R_{\text{ref}}$ .

A titre d'exemple, on déduit immédiatement de (3.A10)

$$\alpha_{\text{cu.ref}} = \frac{1}{\theta_{\text{ref}} + 235} \quad (3.A12)$$

ce qui montre bien que  $\alpha$  dépend de la température de référence.

**Avertissement 2 :** les coefficients de température de  $\rho$  et de  $R$  sont voisins, mais non identiques. La raison en est la dilatation du matériau avec la température. Si nous admettons la même dilatation dans toutes les directions, la section du matériau augmente plus vite que la longueur, de sorte que l'augmentation de la résistance avec la température est plus faible que l'augmentation de la résistivité.

### A3.2.5. Valeurs de propriétés thermiques

Voici (selon Handbook Siemens) quelques valeurs de  $\lambda$  relatives à des matériaux à température ambiante

Argent :	400 W/m/K
Cuivre :	380 W/m/K
Aluminium :	210 W/m/K
Acier :	40 à 60 W/m/K
Tôles magnétiques :	20 à 40 W/m/K (dans le sens parallèle aux tôles)
Porcelaines :	$\approx 0.90$ W/m/K
Araldite :	$\approx 0.20$ W/m/K
Vernis :	$\approx 0.16$ W/m/K

et à des fluides à 40°C

Eau (à 40°C) :	$0.63 \approx 0.90$ W/m/K
Huile (à 40°C) :	$\approx 0.12$ W/m/K
Air (à 40°C) :	0.03 W/m/K

Voici les capacités spécifiques de quelques matériaux à 25°C (converti du American Institute of Physics Handbook)

Aluminium :	903 J/kg/K
Cuivre :	385 J/kg/K

Pour convertir des données trouvées en unités non SI, vous pouvez consulter la page <http://perso.uclouvain.be/ernest.matagne/ELECMAGN/S00P08.HTM>

### A3.2.6. Cas des « densités de branches » $N_a$ macroscopiques

Lors de l'application des formules (3.A3) (3.A5) ou (3.A6), il faut être très attentifs à utiliser des définitions cohérentes de la résistivité  $r$  et de la densité de branche  $N_a$  : il ne faut pas mélanger les valeurs relatives à un modèle détaillé à celles relatives à un modèle macroscopique.

Considérons à titre d'exemple le cas d'un faisceau de conducteurs de longueur  $L$  et de section  $S$ , avec un coefficient de remplissage  $\alpha$  et un nombre  $n$  de conducteurs. Nous calculons la résistance selon deux points de vue différents et montrons que l'on obtient le même résultat,

qui aurait d'ailleurs pu être obtenu directement par la loi de Pouillet. Selon cette loi, on obtient en effet directement

$$R = \rho_{\text{cu}} \frac{nL}{\alpha S/n} = \rho_{\text{cu}} \frac{n^2 L}{\alpha S} \quad (3.A13)$$

### Utilisation du modèle détaillé

La section du fil vaut  $S_{\text{fil}} = \alpha \frac{S}{n}$ . On en déduit que la densité de branche vaut

$$N = \frac{1}{S_{\text{fil}}} = \frac{n}{\alpha S} \text{ dans le fil et est nulle dans l'isolant} \quad (3.A14)$$

L'intégration de (3.A3) porte donc sur un volume

$$V_{\text{fil}} = \alpha L S \quad (3.A15)$$

de sorte que la formule (3.A3) vaut

$$R = \rho_{\text{cu}} \left(\frac{n}{\alpha S}\right)^2 \alpha L S = \rho_{\text{cu}} \frac{n^2 L}{\alpha S} \quad (3.A16)$$

qui est bien égal à (3.A8) comme on pouvait s'y attendre.

### Utilisation d'un modèle macroscopique

Dans un modèle macroscopique, on considère le faisceau de conducteurs comme un milieu homogène. Sa résistivité est une moyenne entre la résistivité du conducteur  $\rho_{\text{cu}}$  et celle de l'isolant qui est infinie (pas une moyenne arithmétique, nous verrons au chapitre suivant comment l'effectuer). On a

$$\rho_{\text{macr}} = \rho_{\text{cu}} / \alpha \quad (3.A17)$$

Par ailleurs, dans ce modèle, la densité de branche vaut

$$N = n / S \quad (3.A18)$$

et le volume est

$$V = L S \quad (3.A19)$$

La formule (3.A3) fournit donc cette fois

$$R = \rho_{\text{macr}} \left(\frac{n}{S}\right)^2 L S = \frac{\rho_{\text{cu}}}{\alpha} \frac{n^2}{S^2} L S = \rho_{\text{cu}} \frac{n^2 L}{\alpha S} \quad (3.A20)$$

qui est à nouveau égale à la valeur (3.A8) comme cela devait être le cas.

Cet exemple pourrait faire croire que le calcul de la résistance en utilisant le modèle macroscopique est un détour inutile, puisqu'il existe des méthodes plus usuelles pour ce faire. C'est effectivement le cas en basse fréquence (quand le courant se répartit uniformément à l'intérieur du conducteur). A fréquence plus élevée, nous verrons au chapitre suivant que l'approche par le modèle macroscopique peut être étendue de façon à permettre le calcul de la résistance en tenant compte de la non uniformité du courant (effets de peau et de proximité).