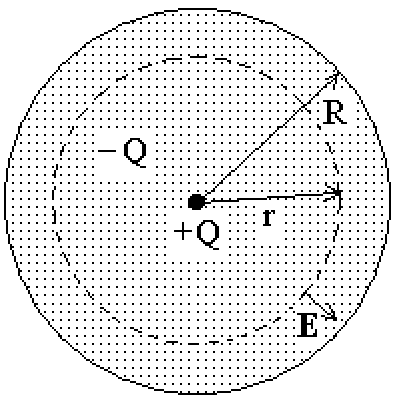
Physique/T4 2004-2005	Evaluation S5	le 18 octobre 2004
Nom	**Prénom**	**NOMA**

<u>Question 1 (20 minutes max.)</u>

On considère une charge <u>ponctuelle</u> de valeur +Q située au centre d'un <u>volume sphérique</u> de rayon R <u>uniformément</u> chargé d'une charge –Q (modèle simplifié de l'atome).

Calculez l'expression du champ électrique et du potentiel électrostatique à l'intérieur et à l'extérieur du volume sphérique.



<u>Réponse</u> : Compte tenu de la symétrie du problème, le champ **E** (et le champ **D**) sont purement radiaux. Puisque l'on parle uniquement de charges et pas de matériaux, on peut présumer que le problème est posé dans le vide.
Le volume de la sphère étant $4\pi R^3 / 3$, la densité de charge est de $\rho = - Q / (4\pi R^3 / 3)$.
Pour calculer le champ électrique, il suffit d'appliquer la loi de Gauss à une surface sphérique centrée sur la charge positive et de rayon r. La charge encerclée vaut

(S02-280) $Q_{encerclée} = 0$ si $r \geq R$ (car la charge négative compense alors la charge positive).
et
(S02-281) $Q_{encerclée} = + Q - Q\,(4\pi r^3 /3) / (4\pi R^3 / 3) = Q\,(1 - r^3/R^3)$ si $r < R$

En divisant cette charge par la surface de la sphère de Gauss, doit $4\pi r^2$, on trouve la composante radiale (la seule qui soit non nulle) de **D** . En divisant ce résultat par ε_o, on trouve la composante radiale de E , soit
(S02-282) $E_r = 0$ si $r \geq R$

(S02-283) $$E_r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(r^{-2} - \frac{r}{R^3}\right) \quad \text{si} \quad r < R$$

Pour trouver le potentiel, il suffit d'intégrer E_r selon r et de changer le signe du résultat.
Le champ étant nul en dehors de la sphère de rayon R , le potentiel y est constant. Si on impose au potentiel d'être nul à l'infini, on a donc

(S02-284) $V = 0$ si $r \geq R$

A l'intérieur de la sphère, on trouve en intégrant (S02-283) et en changeant le signe,

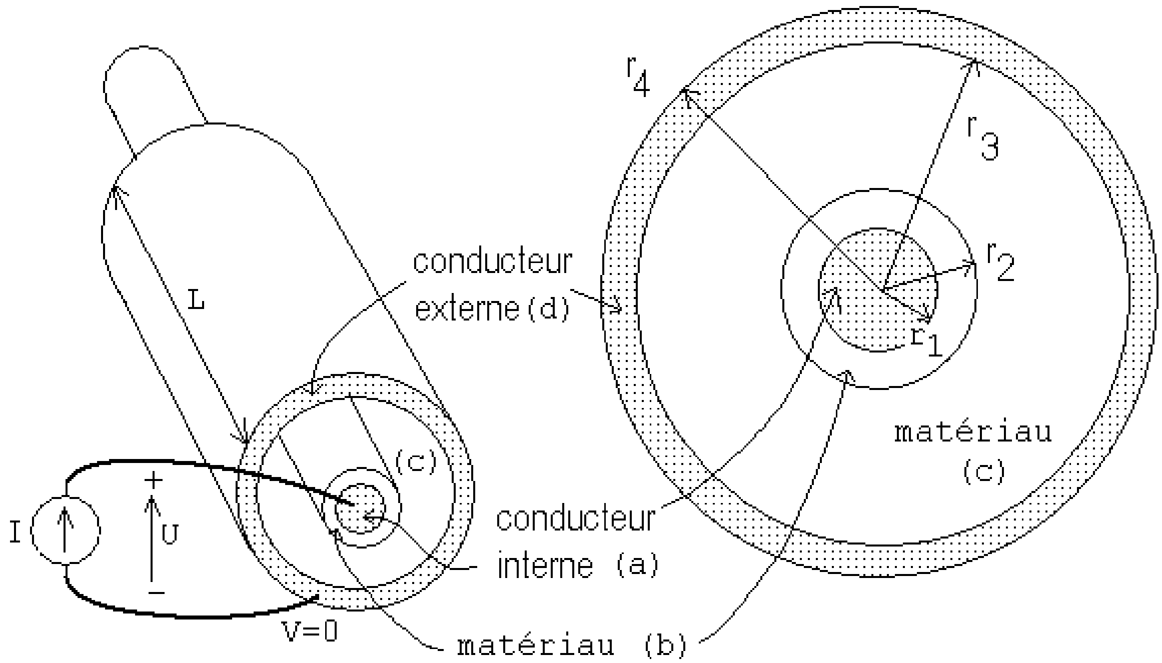
$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(r^{-1} + \frac{r^2}{2R^3}\right) + \text{constante} \quad \text{si} \quad r < R$$

La valeur de la constante s'obtient en imposant au potentiel d'être continu en r = R . On obtient ainsi

(S02-285) $$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_o}\left(r^{-1} + \frac{r^2}{2R^3} - \frac{3}{2R}\right) \quad \text{si} \quad r < R$$

Physique/T4 2004-2005	Evaluation S5	le 18 octobre 2004
Nom	**Prénom**	**NOMA**

Question 2 : énoncé (35 à 40 minutes max.)



Un câble coaxial de longueur L est constitué de :

- (a) un conducteur central plein idéal de rayon r_1 ;
- (b) un matériau diélectrique légèrement conducteur de permittivité diélectrique ε_b et de résistivité ρ_b , compris entre les rayons r_1 et r_2 ;
- (c) un second matériau de même type, mais de permittivité diélectrique ε_c et de résistivité ρ_c , compris entre les rayons r_2 et r_3 ;
- (d) un conducteur extérieur idéal compris entre les rayons r_3 et r_4 avec $L \gg r_4$. Le potentiel électrique V de ce conducteur est nul.

Un générateur de tension inconnue impose un courant constant I entre les deux conducteurs comme indiqué à la figure. On considère qu'un fonctionnement en régime permanent s'est établi (donc que l'on a attendu un temps suffisant pour que toutes les grandeurs soient stationnaires).
Calculez l'expression des grandeurs suivantes, en fonction du courant I et de la position s'il s'agit de champs, en précisant leur orientation quand il y a lieu :

1) la densité de courant $\vec{J}$ (dans les matériaux (b) et (c) uniquement) ;
2) le champ électrique $\vec{E}$ en tout point ;
3) les différences de potentiel $U_b = V_{r1} - V_{r2}$ et $U_c = V_{r2} - V_{r3}$;
4) la tension U de la source ;
5) la puissance dissipée sous forme de chaleur dans chacun des matériaux (b) et (c) ;
6) l'énergie électrique accumulée dans chacun des matériaux (b) et (c) .

Physique/T4 2004-2005	Evaluation S5	le 18 octobre 2004
Nom	**Prénom**	**NOMA**

<u>Question 2 : réponse</u>

1) Compte tenu de la symétrie du dispositif, la densité de courant **J** est purement radiale (on suppose la longueur L grande par rapport à r_4). Comme le régime est stationnaire, il n'y a pas de variation des charges dans le temps et on peut associer **J** au courant qui traverse les milieux (b) et (c) , courant qui est identique au courant I imposé par la source de par la conservation du courant. En égalant I à l'intégrale de J sur une surface cylindrique de rayon r , donc de valeur 2 π r L , on obtient

(S03-340) $$J_r = \frac{I}{2\pi L r}$$

2) Le champ électrique est nul dans les conducteurs, ainsi qu'à l'extérieur du câble puisque le potentiel du conducteur extérieur est nul. Dans les milieux (b) et (c), on obtient le champ électrique en multipliant la densité de courant par la résistivité ρ (différente dans les deux milieux). On obtient ainsi

(S03-241a) $E_r = 0$ si $r < r_1$

(S03-241b) $E_r = \rho_b \dfrac{I}{2\pi L r}$ si $r_1 < r < r_2$ (matériau b)

(S03-241c) $E_r = \rho_c \dfrac{I}{2\pi L r}$ si $r_2 < r < r_3$ (matériau c)

(S03-241d) $E_r = 0$ si $r > r_3$

On constate qu'il y a des discontinuités dans la valeur de E_r , ce qui est tout à fait normal.

3) Dans le cadre de l'électrostatique, les tensions U_b et U_c s'obtiennent en intégrant le champ électrique (S03-241b) et (S03-241c). On a ainsi

(S03-242a) $$U_b = V_{r1} - V_{r2} = \int_{r1}^{r2} \rho_b \frac{I}{2\pi L}\frac{1}{r} = \rho_b \frac{I}{2\pi L}\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)$$

De même, on a

(S03-242b) $$U_c = V_{r2} - V_{r3} = \int_{r2}^{r3} \rho_c \frac{I}{2\pi L}\frac{1}{r} = \rho_c \frac{I}{2\pi L}\ln\left(\frac{r_3}{r_2}\right)$$

Une autre façon d'obtenir ces résultats est de calculer le potentiel en tout point et de prendre les valeurs du potentiel en $r = r_1$, $r = r_2$ et $r = r_3$, puis d'utiliser la définition de U_b et U_c . Une troisième façon est de calculer la résistance de chaque matériau (cylindre creux parcouru par un courant radial) et d'obtenir les tensions en multipliant ces résistances par I. Réciproquement, on peut d'ailleurs extraire de (S03-242) la valeur des résistances, en divisant les tensions par I, ce qui fournit

(S03-243a) $$R_b = \rho_b \frac{1}{2\pi L} \ln(\frac{r_2}{r_1})$$

(S03-243b) $$R_c = \rho_c \frac{1}{2\pi L} \ln(\frac{r_3}{r_2})$$

4) La tension U de la source n'est autre que la somme des tensions U_b et U_c calculées ci-dessus, soit

(S03-244) $$U = U_b + U_c = \frac{I}{2\pi L}[\rho_b \ \ln(\frac{r_2}{r_1}) + \rho_c \ \ln(\frac{r_3}{r_2})]$$

5) La puissance dissipée dans les matériaux (b) et (c) s'obtient en multipliant le courant I par la tension de chacun des matériaux, soit

(S03-245a) $$P_b = U_b\, I = \rho_b \frac{I^2}{2\pi L} \ln(\frac{r_2}{r_1})$$

(S03-245b) $$P_c = U_c\, I = \rho_c \frac{I^2}{2\pi L} \ln(\frac{r_3}{r_2})$$

On peut aussi obtenir ces puissances en calculant la densité de puissance $\rho\, J^2$ et en l'intégrant sur le volume de chaque matériau.
Si on a calculé les résistances R_b et R_c , on peut aussi multiplier ces résistances par le carré du courant I.

6) Les champs (S03-241b) et (S03-241c) étant des champs en 1/r , ils sont identiques à ceux que l'on obtiendrait dans des condensateurs cylindriques avec champ radial, formés de diélectriques de permittivité ε_b et ε_c , soumis aux tensions U_b et U_c . Les énergies cherchées sont donc identiques à l'énergie de tels condensateurs. On peut donc les obtenir par la formule

(S03-246) $$w_e = (1/2)\, C\, U^2 .$$

Le calcul de la capacité d'un condensateur cylindrique (champ radial) est classique. On peut aussi déduire l'expression des capacités de celles des résistances (S03-243) en utilisant l'analogie entre phénomènes électriques et de conduction qui a été développée à l'occasion du premier laboratoire. On obtient

(S03-247a) $$C_b = \varepsilon_b \frac{2\pi L}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$

(S03-247b) $$C_c = \varepsilon_c \frac{2\pi L}{\ln(\frac{r_2}{r_1})}$$

En introduisant ces expressions dans (S03-246), on obtient l'expression des énergies.

Une façon plus directe d'obtenir la valeur des énergies consiste à utiliser l'expression de la densité d'énergie électrique

(S03-248) $W_e = (1/2)\, \varepsilon\, E^2$, soit, en utilisant (S03-241)

(S03-249a) $$W_{eb} = \frac{1}{2}\varepsilon_b [\rho_b \frac{I}{2\pi L r}]^2$$

et

(S03-249b) $$W_{ec} = \frac{1}{2}\varepsilon_c [\rho_c \frac{I}{2\pi L r}]^2$$

En intégrant ces expressions, on obtient

(S03-250a) $$w_{eb} = \iiint W_{eb}\, dV = \int_{r1}^{r2} \frac{1}{2}\varepsilon_b \rho_b{}^2 \frac{I^2}{(2\pi L r)^2} 2\pi r L\, dr = \varepsilon_b \rho_b{}^2 \frac{I^2}{4\pi L} \ln\frac{r_2}{r_1}$$

et, de la même façon,

(S03-250b) $$w_{ec} = \varepsilon_c \rho_c{}^2 \frac{I^2}{4\pi L} \ln\frac{r_3}{r_2}$$