Une méthode d'évaluation multicritère basée sur une interprétation probabiliste

François Glineur
Faculté Polytechnique de Mons
Groupe de Contact du F.N.R.S.
Méthodes quantitatives de gestion.

20 mars 1998.

Contents

1 Introduction

1.1 Chaînes de Markov

Soit un ensemble fini composé de n états $\mathbf{E} = \{E_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$. Soit un ensemble de variables aléatoires $\mathbf{X} = \{X_t,\ t = 0, 1, 2, \ldots\}$ indexé par le temps, où chaque X_t prend ses valeurs dans $\mathbf{X}$.

Si

- X_t dépend uniquement de X_{t-1} (processus *markovien*)
- Cette dépendance est invariante dans le temps (processus *homogène*)

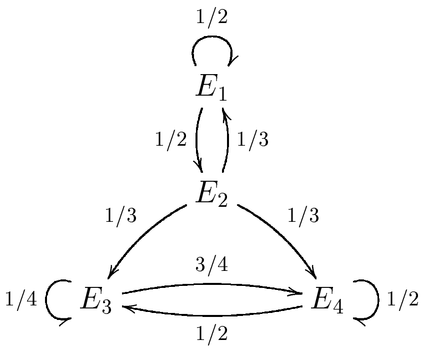
on dit que $\mathbf{X}$ est une chaîne de Markov (finie, à temps discret).

Elle est caractérisée complètement par la matrice $M = (p_{ij})$ où

$$p_{ij} = \mathbb{P}(X_t = E_j | X_{t-1} = E_i)$$

On peut la représenter par un graphe orienté valué (sommets $\equiv$ états, arcs $\equiv$ transitions).

Par exemple, à la matrice $M = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ correspond le graphe



M est une matrice stochastique (somme des éléments sur une ligne égale à un).

Soit une distribution initiale a_0 (correspondant à X_0).

- Il est possible de calculer a_i, la distribution de X_i, pour tout i (récursivement à partir de a_{i-1}
- Dans certaines conditions (chaîne *régulière*), la suite des a_i tend vers une limite a indépendamment de la distribution initiale a_0.
- Cette limite est appelée *distribution stationnaire*.

- Il existe un moyen efficace de la calculer (système linéaire ou vecteur propre à gauche).

Dans notre exemple, $a = \left(0, 0, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$.

1.2 Relations de préférence

Définitions Soit $\mathbf{A} = \{A_i,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$ un ensemble de n alternatives et $\mathcal{R}$ une relation sur $\mathbf{A}$ ($\mathcal{R} \subseteq \mathbf{A}^2$).

$\mathcal{R}$ est dite

- *réflexive* si $a \mathrel{\mathcal{R}} a$ pour tout $a \in \mathbf{A}$
- *complète* si $a \mathrel{\mathcal{R}} b$ ou $b \mathrel{\mathcal{R}} a$ pour tout $a, b \in \mathbf{A}$
- *symétrique* si $a \mathrel{\mathcal{R}} b \Rightarrow b \mathrel{\mathcal{R}} a$ pour tout $a, b \in \mathbf{A}$
- *asymétrique* si $a \mathrel{\mathcal{R}} b \Rightarrow b \neg\mathcal{R}\ a$ pour tout $a, b \in \mathbf{A}$
- *transitive* si $a \mathrel{\mathcal{R}} b$ et $b \mathrel{\mathcal{R}} c \Rightarrow a \mathrel{\mathcal{R}} c$ pour tout $a, b, c \in \mathbf{A}$

On donne à $\mathcal{R}$ la signification $\leq$, c'est-à-dire $a \mathrel{\mathcal{R}} b \equiv a$ n'est pas préféré strictement à b. A partir de $\mathcal{R}$, on définit les relations $\mathcal{I}$ et $\mathcal{S}$ selon $a \mathrel{\mathcal{I}} b \Leftrightarrow a \mathrel{\mathcal{R}} b$ et $b \mathrel{\mathcal{R}} a$ et $a \mathrel{\mathcal{S}} b \Leftrightarrow a \mathrel{\mathcal{R}} b$ et $b \neg\mathcal{R}\ a$.

$\mathcal{I}$ représente l'indifférence de $\mathcal{R}$ ($\mathcal{I}$ est symétrique et réflexive).

$\mathcal{S}$ représente la préférence stricte de $\mathcal{R}$ ($\mathcal{S}$ est asymétrique et non-réflexive).

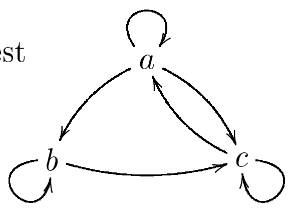
Si $a \mathrel{\mathcal{R}} b$, on a soit $a \mathrel{\mathcal{I}} b$, soit $a \mathrel{\mathcal{S}} b$.

Représentations $\mathcal{R}$ peut se représenter sous forme matricielle (r_{ij}), avec r_{ij} égal à 1 si $A_i \mathrel{\mathcal{R}} A_j$, à 0 dans le cas contraire.

$\mathcal{R}$ peut aussi se représenter graphiquement par un graphe orienté (sommets $\equiv$ alternatives, arcs $\equiv$ relation $\mathcal{R}$).

Par exemple, si $\mathbf{A} = \{a, b, c\}$ et $a \mathrel{\mathcal{R}} c$, $c \mathrel{\mathcal{R}} a$, $a \mathrel{\mathcal{R}} b$, $b \mathrel{\mathcal{R}} c$, $a \mathrel{\mathcal{R}} a$, $b \mathrel{\mathcal{R}} b$ et $c \mathrel{\mathcal{R}} c$, $\mathcal{R}$ est réflexive et complète.

$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et le graphe est



Quelques relations de préférence Soit $\mathcal{R}$ réflexive et complète.

- Si $\mathcal{S}$ est transitive et $\mathcal{I}$ est transitive, $\mathcal{R}$ est un *préordre complet* (ordre avec ex-aequo). On peut associer à chaque alternative une valeur v_i telle que $A_i\ \mathcal{R}\ A_j \Leftrightarrow v_i \leq v_j$.

- Si $\mathcal{S}$ est transitive et $\mathcal{I} = \{(a, a)\}$, $\mathcal{R}$ est un *ordre complet.* On peut associer à chaque alternative une valeur v_i distincte telle que $A_i\ \mathcal{R}\ A_j \Leftrightarrow v_i \leq v_j$.

- Si on peut associer à chaque alternative A_i un intervalle de la droite réelle $U_i = [v_i v_i']$ tel que $A_i\ \mathcal{I}\ A_j \Leftrightarrow U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et $A_i\ \mathcal{S}\ A_j \Leftrightarrow v_i' < v_j$, $\mathcal{R}$ est un *ordre d'intervalle.* Dans ce cas, $\mathcal{S}$ est transitive mais $\mathcal{I}$ ne l'est pas.

- Si on peut associer à chaque alternative A_i un intervalle de la droite réelle $U_i = [v_i v_i']$ tel que $A_i\ \mathcal{I}\ A_j \Leftrightarrow U_i \cap U_j \neq \emptyset$ et $A_i\ \mathcal{S}\ A_j \Leftrightarrow v_i' < v_j$, et si aucun des intervalles n'est inclus strictement dans un autre, $\mathcal{R}$ est un *semiordre.* Dans ce cas, $\mathcal{S}$ est transitive mais $\mathcal{I}$ ne l'est pas.

Exemples de relations

- Ordre complet. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad —\, a \,—\, b \,—\, c \longrightarrow$

- Préordre complet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad —\, a \,—\, b, c \longrightarrow$

- Ordre d'intervalle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad -\{-[\overset{a}{-}]-[\overset{b}{-}]-[\overset{c}{-}]-\underset{d}{\}}\longrightarrow$

- Semiordre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad -[\overset{a}{-}]-[\overset{b}{-}\{-]-[-\underset{d}{\}}\overset{c}{-}]\longrightarrow$

Théorèmes Soit $\mathcal{R}$ une relation sans alternatives équivalentes (a et b sont équivalentes si $a\ \mathcal{R}\ x \Leftrightarrow b\ \mathcal{R}\ x$ et $x\ \mathcal{R}\ a \Leftrightarrow x\ \mathcal{R}\ b$ pour tout $x \in \mathbf{A}$.

- Si $\mathcal{R}$ est un semiordre, il existe un *unique ordre complet* sous-jacent à $\mathcal{R}$. Il s'agit de l'ordre des extrémités v_i (ou v'_i) des intervalles U_i. De plus, si on ordonne les lignes et les colonnes de la matrice représentative de $\mathcal{R}$ selon cet ordre, on obtient une matrice échelonnée.

- Si $\mathcal{R}$ est un ordre d'intervalle, il existe *deux ordres complets* sous-jacents à $\mathcal{R}$. Il s'agit de l'ordre des extrémités v_i (ou v'_i) des intervalles U_i. De plus, si on ordonne les lignes (les colonnes) de la matrice représentative de $\mathcal{R}$ selon le premier (le second) ordre, on obtient une matrice échelonnée.

$$\text{Exemples :} \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&1&1&1 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 1&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&1&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&1&1&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&1&1&1&1\\ 0&0&0&0&0&0&0&1 \end{pmatrix}$$

2 Méthode probabiliste

2.1 Exploitation d'une relation de préférence

Soit une relation de préférence $\mathcal{R}$ complète et réflexive.

On crée une chaîne de Markov en associant à l'alternative A_i un état E_i.

On choisit les probabilités de transition p_{ij} de façon à avoir

- $p_{ij} > 0$ lorsque $A_i\ \mathcal{R}\ A_j$
- $p_{ij} = 0$ lorsque $A_i\ \neg\mathcal{R}\ A_j$
- la matrice (p_{ij}) est stochastique

On calcule alors la distribution stationnaire de la chaîne ainsi définie et on classe les alternatives selon cette distribution.

Justification Intuitivement, le processus passe toujours d'une alternative à une alternative meilleure ou équivalente. Il est donc raisonnable de penser que les meilleures alternatives auront une forte probabilité dans la distribution stationnaire.

Choix des p_{ij} Il semble raisonnable de ne pas faire dépendre le choix des p_{ij} d'autres alternatives que A_i et A_j (une certaine forme d'*indépendance*).

Une première possibilité est

Si $A_i \mathcal{R} A_j$, on pose $p_{ij} = 1/n$; sinon on pose $p_{ij} = 0$.

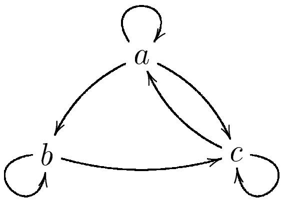
Cependant, la matrice obtenue n'est pas stochastique. On modifie alors p_{ii} de façon à rendre la matrice stochastique, c'est-à-dire

$$p_{ii} = 1 - \sum_{j \neq i} p_{ij}$$

On interprète alors le processus comme suit :

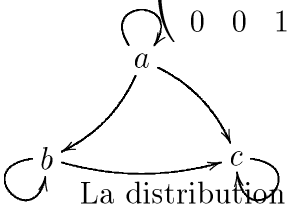
- Je suis à l'état i.
- Je choisis au hasard un état j (équitablement).
- Si $A_i \mathcal{R} A_j$, je passe à l'état j, sinon je reste en i.

Exemples : $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \end{pmatrix}$.



La distribution stationnaire vaut $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$: c est meilleur, a et b suivent.

$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.



La distribution stationnaire vaut $(0, 0, 1)$: c est meilleur, a et b suivent. Inconvénient : information perdue pour b et a. Méthode trop *agressive* (c est un état absorbant).

Autre choix des p_{ij} Ajoutons à la chaîne de Markov un état *fictif neutre* E_0, ne représentant aucune alternative, tel que $p_{00} = 0$ et $p_{0i} = 1/n \ \forall i > 0$. Les transitions depuis cet état ne favorisent aucune alternative.

Reprenons la règle

Si $A_i \ \mathcal{R} \ A_j$, on pose $p_{ij} = 1/n$; sinon on pose $p_{ij} = 0$.

Cette fois, pour rendre la matrice stochastique, on choisit les p_{i0}, c'est-à-dire

$$p_{i0} = 1 - \sum_{j \neq 0} p_{ij}$$

On interprète alors le processus comme suit :

- Je suis à l'état i.
- Je choisis au hasard un état j (équitablement).
- Si $A_i \ \mathcal{R} \ A_j$, je passe à l'état j, sinon je vais en 0.

Exemples : $\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/30 & \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$.
La distribution stationnaire vaut $\left(\frac{7}{27}, \frac{6}{27}, \frac{9}{27}, \frac{5}{27}\right)$: c est meilleur, suivi de a puis de b.

$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/30 & \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. Distribution stationnaire : $\left(\frac{4}{27}, \frac{6}{27}, \frac{9}{27}, \frac{8}{27}\right)$: c est meilleur, suivi de b puis de a.

Propriété Si $\mathcal{R}$ est un préordre complet, la distribution stationnaire reflète ce préordre complet.

2.2 Passage au cas multicritère

Considérons à présent plusieurs relations de préférence (critères) à agréger. Soit $\mathcal{R}_i, \ i = 1, 2, \ldots, r$ r critères avec $\mathcal{R}_i$ complète et réflexive $\forall i$.

Supposons que ces critères sont pondérés par des poids $w_i, \ i = 1, 2, \ldots, r$ dont la somme vaut 1.

Calculons la matrice stochastique M_i pour chaque relation $\mathcal{R}_i$ de la manière décrite plus haut. Soit M la sommet de ces M_i pondérée par les poids w_i.

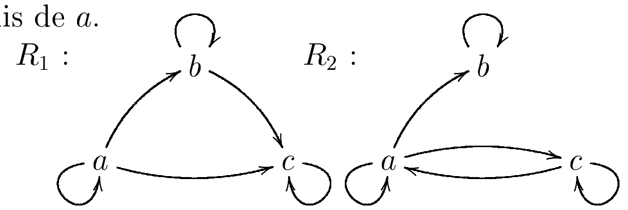
M est également stochastique, elle définit une chaîne de Markov. On classe alors les alternatives selon la distribution stationnaire de cette chaîne.

Cette méthode admet l'interprétation suivante :

- Je suis à l'état i.
- Je choisis au hasard un critère $\mathcal{R}_p$ (selon les w_i)

- Je choisis au hasard un état j (équitablement).
- Si $A_i \ \mathcal{R}_p \ A_j$, je passe à l'état j, sinon je vais en 0.

Exemple : $r = 2$, $w_1 = 1/3$ et $w_2 = 2/3$. $M_1 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/30 & \\ 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$,
$M_2 = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/30 & \\ 0 & 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/30 & \\ 0 & 1/3 & 1/9 & 5/9 \\ 2/9 & 2/9 & 1/3 & 2/9 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}$. La distribution stationnaire est $\left(\frac{16}{79}, \frac{24}{79}, \frac{21}{79}, \frac{18}{79}\right)$, ce qui suggère b en tête, suivi de c puis de a.



2.3 Extension : introduction de l'incomparabilité

Même si les $\mathcal{R}_i$ sont des préordres complets, le théorème d'Arrow interdit l'existence d'une *bonne* méthode d'agrégation, à savoir une méthode fournissant un préordre complet vérifiant

- La règle de l'unanimité
- L'absence de dictateur
- La règle d'indépendance vis-à-vis de tierces altenatives

dès que l'on agrège plus de 2 critères.

Notre procédure d'agrégation fournit un rangement. Pour échapper au thèorème d'Arrow, on va affaiblir la structure de la relation résultante.

Lors du choix des probabilités de transition, on n'a pas fait la différence entre les cas $A_i \ \mathcal{S} \ A_j$ et $A_i \ \mathcal{I} \ A_j$ (indifférence ou préférence stricte).

S'il est raisonnable de maintenir la règle $p_{ij} = 1/n$ dans le premier cas, on peut envisager un choix moins radical si $A_i \ \mathcal{I} \ A_j$. Nous proposons dans ce as le choix $p_{ij} = \alpha/n$, où α est un paramètre à choisir dans l'intervalle $[0, 1]$.

La matrice est toujours rendue stochastique à l'aide des p_{i0}.

Cela nous donne l'interprétation suivante :

- Je suis à l'état i.

- Je choisis au hasard un état j (équitablement).
- Si $A_i \ \mathcal{S} \ A_j$, je passe à l'état j.
- Si $A_i \ \mathcal{I} \ A_j$, je passe à l'état j avec une probabilité α et à l'état 0 avec une probabilité $1 - \alpha$.
- Sinon, je vais en 0.

La méthode précédente est un cas particulier ($\alpha = 1$). On peut également adapter de façon semblable le cas multicritère.

On va mainteanant considérer la famille des rangements obtenus pour toutes les valeurs de α comprises entre 0 et 1. Nous l'exploitons de la façon suivante :

- Si A_i est classé avant A_j pour toutes les valeurs de α, on considére A_i supérieur à A_j.
- Si A_i est classé après A_j pour toutes les valeurs de α, on considére A_i inférieur à A_j.
- Sinon, on déclare A_i et A_j incomparables.

Exemples :

- Ordre complet. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Préordre complet $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Ordre d'intervalle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
- Semiordre $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Propriétés Si $\mathcal{R}$ est un préordre complet, le rangement obtenu $\forall \alpha \in [0,1]$ est conforme à $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ est un semiordre, le rangement obtenu $\forall \alpha \in]0,1[$ est l'ordre strict associé à $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{R}$ est un ordre d'intervalle, les rangements obtenus pour α tendant vers 0 et 1 sont les deux ordres stricts associés à $\mathcal{R}$, ce qui implique au moins deux alternatives incomparables.

Utilisation Si l'on doit sélectionner la meilleur alternative, choisir parmi toutes celles se trouvant en tête pour une valeur de α (celles-ci étant incomparables entre-elles).

Plus un croisement est proche des extrémités 0 et 1, moins l'incomparabilité qu'il représente est forte.

Intérêt

- Méthode simple et intuitive.
- Pas de paramètre à fixer.
- Implémentation aisée.
- Visualisation d'une relation de préférence.
- Détecter les alternatives qui *posent problème*.

3 Illustrations

3.1 Relations de préférence

3.2 Choix d'un supermarché

4 critères : Prix, Accueil, Qualité et Situation.

3.3 Implantation d'une usine

5 critères : Prix, Transport, Environnement, Résidents, Compétition : notes.

Calcul d'un semiordre pour chaque critère.

4 Conclusion

4.1 Exploitation de relation de préférence

- Principe intuitif
- Visualisation du résultat
- Pas de paramètre à fixer
- Implémentation aisée

4.2 Analyse multicritère

- Généralisation naturelle
- Analyse de sensibilité facile à réaliser
- Exploitation d'information cardinale possible

4.3 Perspectives

- Propriétés théoriques
- Utilisation sur relations valuées