

Equilibre d'un treillis – Séance 0

INMA2375 - (PROJET INTÉGRÉ EN INGÉNIERIE MATHÉMATIQUE)
<http://www.icampus.ucl.ac.be/INMA2375/>

F. Glineur, Y. Nesterov, L. Wolsey

Q1 2003-2004

Description

Un treillis est composé d'un ensemble de noeuds \mathcal{N} et d'un ensemble de barres $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{N} \times \mathcal{N}$ reliant des paires de noeuds. Chaque noeud peut être libre, fixé (au sol, par exemple) ou semi-fixé (glissement sur le sol, par exemple). On considère les noeuds et les barres dans une configuration initiale au repos puis on applique un ensemble de forces externes (une charge) au treillis. Ceci va provoquer un déplacement de ces noeuds de manière à équilibrer ces forces externes. On désire écrire les équations définissant l'équilibre d'un tel ensemble.

Hypothèses

Nous ferons les hypothèses suivantes pour établir notre premier modèle :

- ◇ On considère un problème bidimensionnel
- ◇ Chaque barre est homogène, élastique et ne se déforme que dans le sens de sa longueur
- ◇ Les forces exercées par chaque barre leur sont parallèles et obéissent à la loi de *Hooke*
- ◇ On supposera les déplacements des extrémités des barres suffisamment petits de telle façon que la relation liant l'élongation d'une barre aux déplacements de ses extrémités puisse être linéarisée (effets du premier ordre)
- ◇ On supposera les forces externes appliquées uniquement aux noeuds du treillis
- ◇ On négligera dans un premier temps le poids de barres

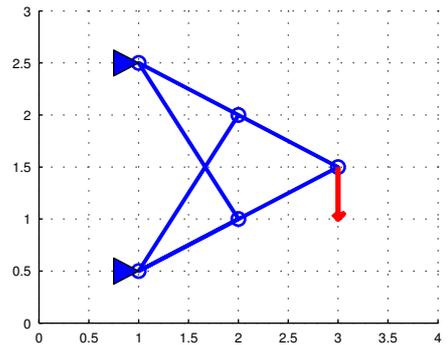
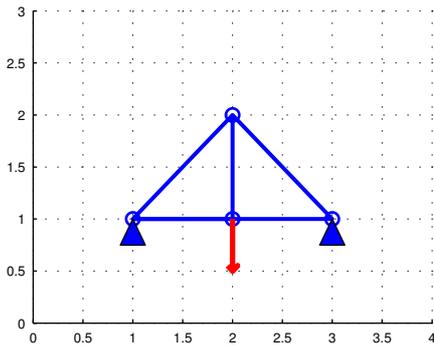
Variables

On décrit un treillis soumis à une charge à l'aide de trois ensembles de variables :

- a. Chaque barre sera décrite par une seule variable $t_k \in \mathbb{R}_+$ avec $k \in \mathcal{B}$
- b. L'intensité de la force externe exercée au noeud $i \in \mathcal{N}$ sera décrite par le vecteur $f_i \in \mathbb{R}^2$
- c. Le déplacement du noeud $i \in \mathcal{N}$ à l'équilibre par rapport à sa position au repos sera repris dans le vecteur $v_i \in \mathbb{R}^2$

Questions

- Quels sont les différents paramètres physiques influençant le comportement d'une barre dans ce modèle. Comment peut-on réduire la description d'une barre à une seule variable (que représente-t-elle) ?
- Considérez les treillis suivants, où on suppose que les barres sont identiques (à part leurs longueurs)



- Dans chaque cas, exprimez la condition d'équilibre du treillis soumis à la charge externe représentée, supposée d'intensité c , en introduisant et identifiant les constantes physiques nécessaires (précisez le choix des unités).
 - Exprimez cette condition sous forme matricielle. On regroupera ("empilera") les vecteurs f_i dans un unique vecteur f , ainsi que les vecteurs v_i dans un unique vecteur v , et la matrice utilisée dépendra uniquement des variables t .
 - Quelles modifications faudrait-il apporter pour tenir compte du poids des barres ? Que devient alors votre condition d'équilibre ? (faites les hypothèses nécessaires)
- Proposez quelques critères qu'il vous semble raisonnable d'optimiser dans le cadre de la conception d'un treillis. Tentez de les formuler dans le cadre du modèle.
 - Proposez quelques contraintes qu'il vous semble raisonnable d'imposer dans le cadre de l'optimisation d'un treillis. Tentez de les formuler dans le cadre du modèle.