

INMA2471 - Méthodes et Modèles d'Optimisation

François Glineur (glineur@core.ucl.ac.be)

Avant propos

Ces notes constituent un condensé des notions et résultats présentés durant le cours et ont pour objectif de servir de support écrit de référence ; elles n'ont pas la prétention d'être exhaustives. La matière à connaître pour l'examen reste définie par le cours oral et l'ensemble des séances d'exercices. Notez également que les notations employées ici peuvent différer légèrement de celles utilisées durant l'année.

Evaluation

Deux projets en cours de quadrimestre (20% de la note finale pour chaque projet), un examen écrit composé d'une première partie sans notes (une heure, 20% de la note finale) et d'une seconde partie à livre ouvert (deux heures, 40% de la note finale).

Plan (provisoire) du cours

	Cours	Exercices	Projet
Modèles	Linéaire (1–2) Convexe (2–3) Conique (3–5)	Modélisation Illustrations AMPL	Projet 1 (MATLAB)
Méthodes	Méth. de point intérieur, linéaire (6–8) Méth. de point intérieur, convexe (9–10) Non-linéaire (11–13)	Propriétés Illustrations	Projet 2 (AMPL+MATLAB)

Partie 1

Modèles

Introduction

Soit $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ une fonction de n variables réelles et $X \subseteq \mathbb{R}^n$ un sous-ensemble de \mathbb{R}^n . On s'intéresse au problème d'optimisation

$$\min f(x) \text{ tel que } x \in X$$

Les variables x sont les *variables de décision*, la fonction f est la *fonction objectif*, tandis que l'ensemble X est le *domaine admissible*. Il est courant de définir l'ensemble X à l'aide de contraintes d'égalité et d'inégalité

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \forall i \in I_i \text{ et } h_i(x) = 0 \forall i \in I_e\}$$

(les ensembles I_e (égalités) et I_i (inégalités) peuvent être vides, finis ou même infinis). Soit f^* la *valeur optimale* du problème : $f^* = \inf\{f(x) \mid x \in X\}$. On distingue

- a. $X = \emptyset$: problème non admissible (impossible, *infeasible*), par convention¹ on pose $f^* = +\infty$.
- b. $X \neq \emptyset$: problème admissible (possible, *feasible*). On distingue dans ce cas
 - (a) $f^* > -\infty$: problème borné.
 - (b) $f^* = -\infty$: problème non borné.

L'infimum f^* n'est pas toujours atteint : on distingue selon l'ensemble des solutions optimales $X^* = \{x^* \in X \mid f(x^*) = f^*\}$

- a. $X^* \neq \emptyset$: problème soluble (*solvable*), possède au moins une solution optimale.
- b. $X^* = \emptyset$: problème insoluble. Un problème non admissible ou non borné est toujours insoluble, mais il existe également des problèmes admissibles, bornés et insolubles (par exemple $\min \frac{1}{x}$ tel que $x \in \mathbb{R}_+$ donne $f^* = 0$ mais $X^* = \emptyset$).

Bien entendu, toutes ces définitions ont une contrepartie évidente dans le cas d'un problème de maximisation. En pratique, on peut se poser différentes questions à propos d'un problème d'optimisation :

- a. On peut être intéressé uniquement par la valeur optimale de la fonction objectif (f^*)
- b. On peut être intéressé par l'une de solutions optimales ($x^* \in X^*$), ou par l'ensemble complet de celles-ci (X^*).
- c. On peut enfin simplement désirer connaître si le problème est admissible ou pas (décider si X est non-vide ou vide), ainsi qu'éventuellement identifier l'une des solutions admissibles dans le premier cas ($x \in X$). Bien que ne relevant pas à strictement parler du domaine de l'optimisation, on peut convertir cette question

¹De même, on pose que le supremum d'un ensemble vide est égal à $-\infty$.

en problème d'optimisation en posant $f(x) = 0$, ce qui nous ramène aux deux premières problématiques.

On distingue les problèmes d'optimisation selon plusieurs critères

- a. Un problème est dit *non contraint* (*unconstrained*) lorsque $X = \mathbb{R}^n$ et *contraint* (*constrained*) dans le cas contraire.

Un problème contraint peut être rendu non contraint, par exemple en considérant $\min \hat{f}(x)$ avec $\hat{f}(x) = f(x)$ si $x \in X$ et $\hat{f}(x) = M$ si $x \notin X$: pour M suffisamment grand (en fait dès que $M > f^*$), ce problème non contraint admet la même valeur optimale et les mêmes solutions optimales que le problème contraint de départ. Cependant, cette façon de procéder conduit en général à une fonction objectif non différentiable (et par conséquent plus difficile à résoudre).

- b. Il est possible de considérer plusieurs fonctions objectifs simultanément (optimisation *multicritère*). On peut alors soit se ramener au cas monocritère par l'agrégation des différents objectifs en un seul objectif (somme pondérée ou maximum, par exemple), soit utiliser des méthodes spécifiques pour identifier les solutions non dominées, c'est-à-dire des solutions pour lesquelles il n'est pas possible d'améliorer *simultanément* tous les objectifs. Cette problématique ne sera pas abordée dans ce cours.
- c. Les données du problèmes peuvent être incertaines, basées sur des variables aléatoires (optimisation *stochastique*). On peut alors chercher à optimiser la valeur moyenne (espérance mathématique) de la fonction objectif, ou la valeur que prend l'objectif dans le pire des cas. Il est également possible de considérer des variables et/ou des contraintes floues (*fuzzy*) lorsque les données du problème sont peu précises. Ces problématiques ne seront pas abordées dans ce cours (voir par exemple le cours [22]).
- d. La fonction objectif f et le domaine admissible X sont le plus souvent décrits analytiquement mais peuvent aussi être le résultat d'une simulation ou de l'observation d'un processus réel, ce qui conduit à l'utilisation de méthodes spécifiques. Cette problématique ne seront pas abordée dans ce cours.

Dans le cas qui nous préoccupe, celui d'un problème monocritère contraint, certain, précis et pour lequel f et X sont décrits analytiquement, on distingue encore les caractéristiques suivantes :

- a. La fonction objectif peut être continue ou discontinue, l'ensemble X peut être de nature continue (par exemple $X = \mathbb{R}_+^n$, $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq 1\}$) ou discrète (par exemple variables entières : $X = \mathbb{N}^n$, variables binaires : $X = \{0, 1\}^n$). Ce cours n'abordera pas le cas d'un ensemble X discret (voir par exemple le cours d'optimisation combinatoire [24]).
- b. Une fonction objectif continue peut être différentiable (une fois, deux fois ou plus) ou pas. Comme on le verra par la suite, l'absence de gradient dans le cas d'une fonction discontinue ou non différentiable peut compliquer singulièrement la tâche.

- c. Ce cours traitera principalement du cas d'une fonction objectif continue et (au moins) deux fois différentiable. Dans ce cas, on distingue encore le type de la fonction objectif et éventuellement des fonctions g_i et h_i intervenant dans la définition du domaine admissible ; celles-ci peuvent être
- (a) linéaires ; dans ce cas, on peut encore distinguer les problèmes linéaires généraux de certains problèmes linéaires particuliers possédant une structure spécifique (problèmes d'affectation, de flots, de réseaux).
 - (b) non-linéaires ; on distingue encore dans ce cas les fonctions quadratiques, les fonctions convexes et les fonctions non-linéaires "générales" (ni quadratiques, ni convexes).

La nature de la fonction objectif et du domaine admissible influe grandement sur la taille des problèmes que l'on est capable de résoudre ; ainsi, il est possible de résoudre des problèmes linéaires possédant plusieurs millions de variables et de contraintes alors que le calcul de la solution optimale de certains problèmes non linéaires comportant quelques centaines de variables est actuellement impossible.

CHAPITRE 1

Optimisation linéaire

1. Introduction

Un problème d'optimisation linéaire dans sa forme la plus générale peut s'écrire

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } a_i^T y \leq c_i \quad \forall i \in I_i \text{ et } a_i^T y = c_i \quad \forall i \in I_e$$

où le vecteur $y \in \mathbb{R}^m$ contient les inconnues, les deux ensembles d'indices I_i et I_e dénombrant les contraintes sont finis et les coefficients du problème sont contenus dans les vecteurs colonnes $b \in \mathbb{R}^m$, $a_i \in \mathbb{R}^m \quad \forall i$ et les scalaires $c_i \in \mathbb{R} \quad \forall i$ (le cas de la minimisation d'une fonction linéaire se ramène à la maximisation de la fonction opposée, le cas d'une inégalité de sens opposé $a_i^T y \geq c_i$ peut se formuler comme $(-a_i)^T y \leq (-c_i)$).

De plus, il est toujours possible d'exprimer un tel problème en n'utilisant que des contraintes d'inégalité, pour obtenir ce qu'on nomme la forme *géométrique*

$$\max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } a_i^T y \leq c_i \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

(il suffit de remplacer chaque contrainte d'égalité $a_i^T y = c_i$ par la paire d'inégalités $(-a_i)^T y \leq (-c_i)$ et $a_i^T y \leq c_i$). Le problème est donc entièrement défini par les vecteurs colonnes $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $a_i \in \mathbb{R}^m \quad \forall i$. Si on groupe les n vecteurs a_i dans une matrice $\mathbb{R}^{m \times n}$, le problème s'écrit

$$(D) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \leq c$$

(en interprétant toute inégalité entre deux vecteurs composante par composante).

2. Dualité pour l'optimisation linéaire

Posons-nous la question suivante : le problème admet-il des solutions admissibles ? En d'autres termes, le système d'inégalités $A^T y \leq c$ est-il consistant ?

Dans le cas où la réponse est positive, il est facile de fournir une preuve irréfutable : il suffit d'exhiber un vecteur y satisfaisant la contrainte $A^T y \leq c$, et la vérification de l'inégalité est une preuve que le système est consistant.

Par contre, dans le cas où le système est inconsistant, comment en fournir la preuve ? Par exemple, considérons le système

$$3y_1 + 2y_2 \leq 8, \quad -y_2 \leq -3, \quad -y_1 \leq -1$$

Une analyse graphique montre aisément que le système est impossible, mais il est possible de fournir une preuve algébrique : en additionnant la première contrainte au double de la deuxième contrainte puis au triple de la troisième contrainte, on obtient l'inégalité $0y_1 +$

$0y_2 \leq -1$, soit $0 \leq -1$, une impossibilité. Par conséquent, aucune solution admissible ne peut exister, et l'on a bien prouvé que le système est inconsistant. Il est facile de généraliser cette procédure : étant donné un système d'inégalité $A^T y \leq c$, on peut multiplier chaque inégalité $a_i^T y \leq c_i$ par une constante positive x_i (positive pour ne pas changer le sens de l'inégalité, éventuellement nulle si on ne désire pas utiliser l'inégalité) et sommer le tout pour obtenir une inégalité valide pour toute solution admissible du système, en d'autres termes, une *conséquence* du système. Mathématiquement, cette conséquence s'écrit

$$\sum_{i=1}^n (a_i^T y) x_i \leq \sum_{i=1}^n c_i x_i \text{ avec } x_i \geq 0$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i x_i \right)^T y \leq c^T x \text{ avec } x \geq 0$$

où les n constantes x_i ont été rassemblées dans le vecteur colonne $x \in \mathbb{R}^n$ et enfin, sous forme matricielle (en se souvenant que les a_i sont les colonnes de A),

$$(Ax)^T y \leq c^T x \text{ avec } x \geq 0$$

S'il s'avère qu'il est possible d'obtenir une conséquence contradictoire, nécessairement de la forme $0^T y \leq \alpha$ avec $\alpha < 0$, on dispose bien d'une preuve (par l'absurde) que le système d'inégalités est inconsistant. Ceci se produit donc uniquement lorsque $Ax = 0$ (membre de gauche identiquement nul) et $c^T x < 0$ (membre de droite négatif).

L'existence d'une conséquence contradictoire est donc une condition suffisante de l'inconsistance du système. En réalité, le théorème ci-dessous nous apprend que, de façon relativement surprenante, cette condition est également nécessaire, ce qui signifie que si un système d'inégalités est inconsistant, il est toujours possible de dériver (par sommation des inégalités multipliées par des constantes positives) une conséquence contradictoire prouvant son inconsistance.

THEOREM 2.1. *Le système d'inégalités $A^T y \leq c$ est inconsistant si et seulement si il existe un vecteur $x \geq 0$ tel que $Ax = 0$ et $c^T x < 0$*

Ce théorème est parfois connu sous le nom de *Lemme de Farkas*. Nous n'en présentons pas la preuve, qui fait appel à certaines notions de topologie (on peut consulter par exemple [18]).

Revenons à présent à notre problème d'optimisation linéaire : à supposer que celui-ci soit admissible, comment s'assurer qu'une solution potentielle est bien optimale ? En effet, s'il est facile de vérifier qu'une solution est admissible (en remplaçant le vecteur y par sa valeur dans les contraintes), il n'est pas a priori évident de prouver qu'elle est optimale, c'est-à-dire qu'il n'existe pas d'autre solution admissible possédant une plus grande valeur de la fonction objectif. Idéalement, une preuve de l'optimalité d'une solution potentielle pourrait donc prendre la forme d'une dérivation d'une borne supérieure sur la valeur de la fonction objectif.

Est-il aisé d'obtenir de telles borne supérieure ? Constatons tout d'abord qu'il est très facile d'obtenir une borne inférieure sur la valeur de la fonction objectif : en effet,

n'importe quelle solution admissible y fournit automatiquement la borne inférieure $b^T y$ sur la valeur optimale de la fonction objectif du problème, puisque le véritable maximum de la fonction objectif sera forcément supérieur ou égal à la valeur prise en n'importe quelle solution admissible.

Par contre, il est clair que ce procédé ne permet pas d'obtenir de borne supérieure, alors que c'est précisément ce type d'information qui est nécessaire pour prouver l'optimalité d'une solution potentielle.

Une fois encore, c'est la notion de conséquence d'un système d'inégalités qui va nous tirer d'affaire : supposons en effet qu'il soit possible de dériver du système $A^T y \leq c$ une conséquence qui affirme précisément que $b^T y \leq \beta$: dans ce cas, on a bien une preuve que β est une borne supérieure sur la valeur maximale de la fonction objectif. En reprenant la forme mathématique de la conséquence décrite plus haut, on constate qu'un choix des constantes $x_i \geq 0$ telles que $Ax = b$ fournit la conséquence $b^T y \leq c^T x$ et donc une borne supérieure égale à $c^T x$. Il est dès lors naturel de chercher à obtenir la meilleure borne supérieure possible, c'est-à-dire la plus petite, ce qui conduit au problème d'optimisation suivant :

$$(P) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \geq 0$$

On constate qu'il s'agit également d'un problème d'optimisation linéaire (objectif et contraintes linéaires), mais qui n'est toutefois pas exprimé sous la forme géométrique : cette formulation, qui comporte des contraintes d'égalité mais dont les contraintes d'inégalité se réduisent à exprimer que chaque variable est positive, est appelée forme *standard* (en fait, tout comme pour la forme canonique, on peut montrer qu'il est possible de transformer n'importe quel un problème linéaire en un problème exprimé sous la forme standard).

Puisque le problème linéaire que nous venons d'obtenir est fortement lié au problème d'origine (D), on dit qu'il est le problème dual de (D). Analysons à présent les relations qui unissent ces deux problèmes.

THEOREM 2.2. *Soit y une solution admissible de (D) et x une solution admissible de (P) : on a toujours $c^T x \geq b^T y$.*

C'est le théorème de *dualité* faible. Sa validité découle directement du raisonnement que nous avons suivi pour formuler le problème (P), mais on peut également en fournir une preuve plus algébrique : on a

$$c^T x - b^T y = c^T x - (Ax)^T y = x^T c - x^T A^T y = x^T (c - A^T y) \geq 0$$

et cette dernière quantité est positive puisque $x \geq 0$ et $c - A^T y \geq 0$ découle de $A^T y \leq c$.

Ce résultat affirme que toute solution admissible de (P) fournit une borne supérieure pour le problème de maximisation (D) (et inversement que toute solution admissible de (D) fournit une borne inférieure pour le problème de minimisation (P)). Cependant, nous nous sommes intéressés à la notion de borne supérieure dans l'espoir de pouvoir démontrer l'optimalité d'une solution potentielle. Le résultat suivant nous montre que c'est toujours possible.

THEOREM 2.3. *Si le problème (D) admet une solution optimale y^* , le problème (P) admet lui aussi une solution optimale x^* et les valeurs optimales des deux fonctions objectif coïncident : on a toujours $c^T x^* = b^T y^*$.*

C'est le théorème de *dualité forte*. Une façon de le prouver consiste à appliquer l'algorithme du simplexe au problème (P) (nous renvoyons au cours [4]).

Interprétons ce résultat : étant donné une solution optimale y^* pour le problème (D), ayant donc $b^T y^*$ pour valeur de la fonction objectif, ce théorème signifie qu'il est toujours possible de dériver une conséquence du système d'inégalités $A^T y \leq c$ qui fournira une borne supérieure $c^T x^*$ précisément égale à la valeur de la solution optimale y^* du problème (D), et qui par conséquent certifie que y^* est une solution optimale du problème.

Il s'agit en quelque sorte d'une généralisation du Lemme de Farkas : celui-ci exprime que l'absence de solution admissible de (D) peut toujours être certifiée par une conséquence (du système d'inégalités $A^T y \leq c$) exprimant une contradiction, tandis que le théorème de dualité forte signifie que l'optimalité d'une solution pour (D) peut toujours être certifiée par une conséquence (du système d'inégalités $A^T y \leq c$) exprimant qu'aucune autre solution ne saurait avoir une valeur de la fonction objectif supérieure à celle de la solution optimale.

On a vu que le problème (P) est le dual du problème (D). Un raisonnement similaire dont l'objectif serait la recherche de bornes inférieures pour le problème (P) déboucherait en fait sur la formulation du problème (D), qui peut donc également être considéré comme le dual du problème (P) (une autre façon de procéder serait de transformer (P) en un problème équivalent sous forme géométrique afin d'en déduire directement son dual). En fait, pour des raisons historiques, contrairement à l'ordre de présentation adopté ici, on appellera (P) problème *primal* et (D) problème *dual* (et donc le dual du dual est égal au primal).

La combinaison des théorèmes de dualité faible et forte nous permet donc d'écrire

$$c^T x \geq c^T x^* = b^T y^* \geq b^T y$$

où x et y sont des solutions admissibles respectivement pour (P) et (D) tandis que x^* et y^* sont des solutions optimales respectivement pour (P) et (D). Il est possible de caractériser un peu plus les solutions optimales x^* et y^* :

THEOREM 2.4. *Soit x^* une solution optimale pour (P) et y^* une solution optimale pour (D) : on a $x_i^*(c_i - a_i^T y^*) = 0$ pour tout i . Par conséquent, si $x_i^* > 0$ pour un certain indice i , alors $a_i^T y^* = c_i$ pour ce même indice i , tandis que si $a_i^T y^* < c_i$ pour un certain indice i , alors $x_i^* = 0$ pour ce même indice i .*

Ce théorème se prouve aisément en remarquant que

$$0 = c^T x^* - b^T y^* = x^{*T}(c - A^T y^*) = \sum_{i=1}^n x_i^*(c_i - a_i^T y^*)$$

(voir plus haut), tandis que $x_i^* \geq 0$ et $c_i - a_i^T y^* \geq 0$ pour tout i , ce qui implique forcément que $x_i^*(c_i - a_i^T y^*) = 0$ pour tout i . En d'autres termes, pour un i fixé, *au plus* une seule des deux inégalités $x_i^* \geq 0$ et $a_i^T y^* \leq c_i$ peut être satisfaite de façon stricte.

CHAPITRE 2

Optimisation convexe

1. Introduction

Reconsidérons le problème général d'optimisation

$$\min f(x) \text{ tel que } x \in X$$

Une solution admissible x^* est dite

- ◇ minimum *global* si et seulement si $f(x^*) \leq f(x) \forall x \in X$
- ◇ minimum *local* si et seulement si il existe un voisinage V de x^* tel que

$$f(x^*) \leq f(x) \forall x \in X \cap V$$

(on peut prendre par exemple comme voisinage $V = \{x \mid \|x - x^*\| \leq \varepsilon\}$).

Tout minimum global est évidemment également un minimum local. En général, on est beaucoup plus intéressé par la recherche de minima globaux (car ils les seuls à garantir que la valeur de leur fonction objectif ne peut être améliorée), mais ceux-ci sont malheureusement également beaucoup plus difficiles à calculer (intuitivement, la raison en est qu'il suffit pour prouver qu'un minimum est local de vérifier qu'il n'existe pas de meilleure solution dans un voisinage restreint autour de ce minimum, tandis que prouver qu'un minimum est global requiert l'analyse de la fonction objectif sur l'entière du domaine admissible). Cependant, à l'aide de la notion de convexité, nous allons décrire une classe de problèmes pour laquelle la situation est bien plus favorable.

2. Ensembles et fonctions convexes

Un ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est appelé *convexe* si le segment joignant toute paire de points appartenant à S appartient également entièrement à S . Algébriquement, on demande donc que $x \in S$ et $y \in S$ entraîne que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

Quelques ensembles convexes dans \mathbb{R}^n :

- ◇ \emptyset (l'ensemble vide),
- ◇ \mathbb{R}^n (la totalité de l'espace \mathbb{R}^n),
- ◇ \mathbb{R}_+^n (l'ensemble des vecteurs dont les composantes positives ou nulles),
- ◇ \mathbb{R}_{++}^n (l'ensemble des vecteurs dont les composantes sont strictement positives),
- ◇ $B_r(a) = \{x \mid \|x - a\| < r\}$ et $\hat{B}_r(a) = \{x \mid \|x - a\| \leq r\}$ (les boules ouvertes et fermées de rayon r centrées en a),
- ◇ $\{x \mid b^T x < \beta\}$ et $\{x \mid b^T x \leq \beta\}$ (un demi-espace ouvert ou fermé),
- ◇ $\{x \mid b^T x = \beta\}$ (un hyperplan, intersection de deux demi-espaces fermés).

Dans \mathbb{R} , il est facile de constater qu'un ensemble convexe est forcément un intervalle, ouvert ou fermé à gauche ou à droite, éventuellement infini (soit $[a b]$, $]a b]$, $[a b[$, $]a b[$ avec $a \leq b$ et éventuellement $a = -\infty$ et/ou $b = +\infty$).

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. On appelle l'*épigraphe* de f l'ensemble

$$\text{epi } f = \{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$$

On dira qu'une fonction est convexe si et seulement si son épigraphe est convexe. On peut montrer que cette définition de la convexité d'une fonction est équivalente à la condition suivante :

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

(la plupart des propriétés de cette section sont données sans démonstration, celles-ci peuvent par exemple être trouvées dans [18]). Quelques fonctions convexes de \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} :

- ◇ $x \mapsto c$ (fonction constante),
- ◇ $x \mapsto b^T y + \beta_0$ (fonctions linéaires/affines)
- ◇ $x \mapsto \|x\|$ et $x \mapsto \|x\|^2$ (norme euclidienne et son carré),
- ◇ $x \mapsto x^T Q x$ avec une matrice $Q \in \mathbb{R}^{n \times n}$ semidéfinie positive (fonction convexes)

Parmi les fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , citons $x \mapsto e^x$, $x \mapsto -\log x$, $x \mapsto |x|^p$ avec $p \geq 1$. Par ailleurs, on dira qu'une fonction f est *concave* si et seulement si $-f$ est convexe (ce qui correspond à un renversement du sens de l'inégalité dans la condition ci-dessus). A noter qu'il n'existe pas de notion d'ensemble concave.

Si une fonction est deux fois différentiable, on peut montrer qu'elle est convexe si et seulement si sa matrice hessienne est toujours (semi)définie positive (c'est-à-dire si toutes ses valeurs propres sont plus grandes ou égales à zéro).

Le problème d'optimisation

$$\min f(x) \text{ tel que } x \in X$$

est convexe si et seulement si la fonction objectif f est une fonction convexe et le domaine admissible X est un ensemble convexe (à la différence du cas de l'optimisation linéaire où ces notions sont quasi interchangeables, il est fondamental de s'assurer ici qu'on procède à la *minimisation* de la fonction objectif et non à sa maximisation).

THEOREM 2.1. *Si deux ensembles $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et $T \subseteq \mathbb{R}^n$ sont convexes, alors leur intersection $S \cup T \subseteq \mathbb{R}^n$ est également convexe.*

THEOREM 2.2. *Si deux ensembles $S \subseteq \mathbb{R}^n$ et $T \subseteq \mathbb{R}^m$ sont convexes, alors leur produit cartésien $S \times T \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ est également convexe.*

(les preuves de ces deux résultats sont des applications immédiates de la définition de la convexité). Soit une fonction $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ définissant la contrainte $g(x) \leq 0$. Pour que l'ensemble $X(g)$ des vecteurs x satisfaisant cette contrainte, défini par $X(g) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) \leq 0\}$, soit convexe, il suffit que $g(x)$ soit convexe : en effet, dans ce cas, les inclusions $x \in X$ et $y \in X$ impliquent $g(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda g(x) + (1 - \lambda)g(y) \leq 0$, ce qui montre

que $\lambda x + (1 - \lambda)y$ appartient à $X(g)$ (il est à noter que la convexité de g est une condition suffisante mais pas nécessaire pour la convexité de $X(g)$). Par conséquent, l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \forall i \in I_i\}$$

sera convexe dès que chacune des fonction g_i sera convexe (en effet, cet ensemble est l'intersection d'une série d'ensembles $X(g_i)$ convexes). De même, si on désire ajouter une contrainte d'égalité $h(x) = 0$, équivalent à la paire $h(x) \leq 0$ et $-h(x) \leq 0$, on voit qu'il faut que h soit à la fois convexe et concave, ce qui n'est possible que si la fonction h est linéaire (ce fait est une conséquence simple de l'inégalité définissant la convexité d'une fonction). En résumé, l'ensemble

$$X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_i(x) \leq 0 \forall i \in I_i \text{ et } h_i(x) = 0 \forall i \in I_e\}$$

est convexe dès que chaque fonction g_i est convexe et chaque fonction h_i est linéaire, et par conséquent le problème d'optimisation

$$\min f(x) \text{ tel que } g_i(x) \leq 0 \forall i \in I_i \text{ et } h_i(x) = 0 \forall i \in I_e$$

est convexe dès que f est convexe, chaque fonction g_i est convexe et chaque fonction h_i est linéaire. Enfin, pour revenir à la notion de minima locaux et globaux, on montre la propriété suivante :

THEOREM 2.3. *Tous les minima locaux d'un problème d'optimisation convexe sont également des minima globaux. De plus, l'ensemble de ces minima est lui-même un ensemble convexe.*

Comme on l'a mentionné plus haut, il est en général beaucoup plus aisé de calculer des minima locaux, d'où l'intérêt de se restreindre à des problèmes d'optimisation convexe : tous les minima locaux trouvés seront également des minima globaux. On verra plus tard qu'une autre excellente raison de considérer des problèmes d'optimisation convexe est qu'il existe des méthodes de résolution très efficaces pour ces problèmes.

THEOREM 2.4. *Si $f(x)$ et $g(x)$ sont deux fonctions convexes, les fonctions suivantes sont également convexes :*

- ◇ $f(x) + g(x)$
- ◇ $af(x)$ où a est une constante positive
- ◇ $\max\{f(x), g(x)\}$

(les deux premières propriétés se démontrent aisément à l'aide de l'inégalité caractérisant la convexité d'une fonction, la troisième en considérant l'intersection des épigraphes de $f(x)$ et $g(x)$)

CHAPITRE 3

Optimisation conique

1. Des cônes pour l'optimisation

La théorie de dualité que nous avons dérivée pour l'optimisation linéaire peut s'avérer très utile, non seulement pour déterminer des bornes supérieures et certifier de façon irréfutable l'optimalité d'une solution (ou l'absence de solutions admissibles), on va par conséquent tenter de la généraliser à des problèmes non-linéaires. Ce faisant, on établira un lien très étroit avec l'optimisation convexe.

Soit la paire de problèmes primal et dual:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \geq 0 \quad \text{et} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \leq c$$

On désire généraliser ces problèmes en modifiant le moins possible leur structure (fonction objectif linéaire, égalités et inégalités dans les contraintes) : une idée prometteuse consiste à définir un nouveau type d'inégalités, c'est-à-dire à redéfinir la signification de l'inégalité \geq (et \leq), tout en tentant de conserver les bonnes caractéristiques qui nous ont permis de dériver des bornes supérieures et d'établir les propriétés de dualité.

Pour rappel, l'inégalité $a \geq b$ entre deux vecteurs $a \in \mathbb{R}^n$ et $b \in \mathbb{R}^n$ est à prendre composante par composante, ce qui signifie $a_i \geq b_i$ pour $1 \leq i \leq n$. En fait, si on décide de définir un nouvel ordre sur \mathbb{R}^n , que l'on notera $a \succeq b$, il suffit de choisir l'ensemble de vecteurs positifs pour ce nouvel ordre : en effet, on peut alors définir la relation $a \succeq b$ comme suit

$$a \succeq b \Leftrightarrow a - b \succeq 0$$

Soit K l'ensemble des vecteurs que nous choisissons être positifs pour ce nouvel ordre

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \succeq 0\}$$

On a donc

$$a \succeq 0 \Leftrightarrow a \in K \text{ et } a \succeq b \Leftrightarrow a - b \in K$$

De même, il est naturel de poser pour l'ordre inverse

$$a \preceq 0 \Leftrightarrow -a \in K \text{ et } a \preceq b \Leftrightarrow b - a \in K$$

Pour l'ordre classique, cet ensemble K est tout simplement l'orthant positif \mathbb{R}_+^n . Dans le cas général, il est raisonnable d'imposer certaines conditions sur K afin de conserver les propriétés naturelles d'un ordre. Passons ces propriétés en revue :

◇ Multiplier un élément positif par une constante positive laisse l'élément positif

$$x \succeq 0 \Rightarrow \lambda x \succeq 0 \quad \forall \lambda \geq 0 \text{ ce qui entraîne } x \in K \Rightarrow \lambda x \in K \quad \forall \lambda \geq 0$$

L'ensemble K est donc fermé par rapport à la multiplication par une constante positive ; un ensemble vérifiant cette propriété est appelé un *cône* (géométriquement, quand on a un point x dans K , on a également tout la demi-droite démarrant à l'origine λx dans K).

- ◇ Additionner deux éléments positifs donne un élément positif

$$x \succeq 0 \text{ et } y \succeq 0 \Rightarrow x + y \succeq 0 \text{ ce qui entraîne } x \in K \text{ et } y \in K \Rightarrow x + y \in K$$

L'ensemble K est donc fermé pour l'addition.

Les ensembles K vérifiant les deux propriétés ci-dessus appartiennent en fait à une catégorie que nous avons déjà rencontrée :

THEOREM 1.1. *Un cône est fermé pour l'addition si et seulement si il est convexe.*

En effet, supposons tout d'abord le cône K fermé pour l'addition. Soit $x \in K$ et $y \in K$. Puisque K est un cône, on a $\lambda x \in K$ et $(1 - \lambda)y \in K$ pour $\lambda \in [0, 1]$, et par conséquent $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ via la fermeture pour l'addition, et donc K est convexe. Supposons à présent le cône K convexe. Soit $x \in K$ et $y \in K$, on a donc $x/2 + y/2 \in K$ (puisque $1/2 + 1/2 = 1$). Comme K est un cône, on a également $2(x/2 + y/2) = x + y \in K$, ce qui montre bien que K est fermé pour l'addition.

- ◇ Le seul élément à la fois positif et négatif est 0

$$x \succeq 0 \text{ et } x \preceq 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ce qui entraîne } x \in K \text{ et } -x \in K \Rightarrow x = 0$$

Cette dernière condition peut également s'écrire $K \cap (-K) = \{0\}$ (où $-K$ est défini par $-K = \{x \mid -x \in K\}$). Un cône vérifiant cette propriété est appelé *pointé*.

- ◇ Comment définir l'inégalité stricte $a \succ b$ ou, de façon équivalente, $a \succ 0$? Une façon naturelle de procéder consiste à utiliser l'intérieur (au sens topologique) du cône K : on dira $a \succ 0$ si et seulement si $a \in \text{int } K$, tandis que $a \succ b$ si et seulement si $a - b \succ 0 \Leftrightarrow a - b \in \text{int } K$. Par conséquent, pour que l'inégalité stricte ait un sens, nous imposons à K de posséder un intérieur non vide : $\text{int } K \neq \emptyset$. Un tel cône sera appelé *solide*.
- ◇ Enfin, on désire garder la propriété de conservation de l'ordre pour les limites :

$$\text{Soit } \{x_i\}_{i \rightarrow \infty} \text{ avec } x_i \succeq 0 \forall i, \text{ alors } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \succeq 0$$

ce qui entraîne pour le cône K

$$\text{Soit } \{x_i\}_{i \rightarrow \infty} \text{ avec } x_i \in K \forall i, \text{ alors } \lim_{i \rightarrow \infty} x_i = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} \in K$$

ce qui n'est rien d'autre que de dire que l'ensemble K est fermé.

Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône convexe, solide, pointé et fermé. Nous sommes dès lors en mesure d'écrire le problème dual (D) généralisé à l'aide de \succeq_K , l'ordre basé sur l'ensemble K

$$\text{(DC)} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \preceq_K c \text{ ou, de façon équivalente, } \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } c - A^T y \in K$$

où on a toujours comme données du problème $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$ et $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$.

Notons qu'il s'agit d'un problème convexe : en effet, la fonction objectif est linéaire (et donc convexe), tandis qu'on peut montrer aisément que le domaine admissible $F = \{y \in \mathbb{R}^m \mid c - A^T y \in K\}$ est lui aussi convexe : soit $y_1 \in F$ et $y_2 \in F$, on a $\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2 \in F$ puisque $c - A^T(\lambda y_1 + (1 - \lambda)y_2) = \lambda(c - A^T y_1) + (1 - \lambda)(c - A^T y_2) \in K$ vu que K est convexe.

Outre le cas $K = \mathbb{R}_+^n$, correspondant à l'ordre traditionnel, un exemple de cône convexe, solide, pointé et fermé est

$$K = \mathbb{L}^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq x_0^2 \text{ et } x_0 \geq 0\}$$

Ce cône est appelé *cône de Lorentz*, *cône du second-ordre* ou *ice-cream cone*.

Un autre exemple utilise l'ensemble \mathbb{S}^n des matrices carrés symétriques : on peut montrer que l'ensemble ci-dessous est un cône convexe, solide, pointé et fermé

$$K = \mathbb{S}_+^n = \{M \in \mathbb{S}^n \mid x^T M x \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n\}$$

(\mathbb{S}_+^n est donc l'ensemble des matrices semidéfinies positives, c'est-à-dire dont les valeurs propres sont toutes positives ou égales à zéro).

A noter qu'il est possible de combiner plusieurs types de contraintes $A^T y \preceq_K c$ basées sur des cônes différents. Ainsi, si on désire exprimer simultanément les contraintes

$$A_1^T y \preceq_{K_1} c_1 \text{ et } A_2^T y \preceq_{K_2} c_2$$

équivalent à

$$c_1 - A_1^T y \in K_1 \text{ et } c_2 - A_2^T y \in K_2$$

il suffit de considérer le cône $K = K_1 \times K_2$ et, puisqu'on a par définition du produit cartésien $x_1 \in K_1$ et $x_2 \in K_2$ si et seulement si $(x_1, x_2) \in K_1 \times K_2$, on voit aisément que la paire de contraintes est équivalente à

$$(c_1 - A_1^T y, c_2 - A_2^T y) \in K_1 \times K_2$$

ou encore

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix} y \in K_1 \times K_2 \text{ et finalement } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix} y \succeq_{K_1 \times K_2} 0$$

On peut d'ailleurs aisément vérifier que si K_1 et K_2 sont des cônes convexes, solides, pointés et fermés, $K_1 \times K_2$ est également un cône convexe, solide, pointé et fermé.

Puisque dans le cas linéaire on peut associer un problème primal (P) au problème (D), il est tentant de vouloir associer au problème (DC) suivant

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \succeq_K 0$$

En réalité, la situation est légèrement plus compliquée : tentons de reproduire le raisonnement qui a conduit à la dérivation du problème (P) dans le cas de l'optimisation linéaire. Etant donné le système d'inégalités $A^T y \leq c$, on a multiplié chaque inégalité $a_i^T y \leq c_i$ par une constante positive x_i et on a sommé le tout pour obtenir une conséquence valide de

ce système. Malheureusement, cette procédure n'est plus valable dans le cas non-linéaire. Prenons par exemple l'inégalité

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \succeq_{\mathbb{L}^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{vraie puisque } (-1)^2 + (-1)^2 \leq 2^2)$$

En multipliant la première ligne par 0, 1 et les deux suivantes par 1 puis en sommant, on obtient $0.1 \times 2 - 1 \times 1 - 1 \times 1 \geq 0$, soit $-1.8 \geq 0$, une contradiction alors que le système de départ était parfaitement consistant.

Pour corriger ce problème, nous allons restreindre le choix des multiplicateurs x_i de façon à ce que les inégalités dérivées soient toujours valides. Soit $(z_1, z_2, \dots, z_n) \succeq_K 0 \Leftrightarrow (z_1, z_2, \dots, z_n) \in K$, on désire multiplier chaque composante z_i par une constante x_i puis sommer de façon à obtenir une inégalité $z_1 x_1 + \dots + z_n x_n \geq 0$ valide quel que soit le vecteur z choisi au départ. Définissons donc K^* comme l'ensemble des vecteurs de multiplicateurs x telle que cette propriété est vraie :

$$K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid z^T x \geq 0 \forall z \in K\}$$

Sous la condition $x \in K^*$, les conséquences dérivées de $A^T y \preceq c$ seront donc valides, puisque $(c_1 - a_1^T y, \dots, c_n - a_n^T y) \in K$ impliquera que la somme $x_1(c_1 - a_1^T y) + \dots + x_n(c_n - a_n^T y)$ sera positive, et donc que $(a_1^T y)x_1 + \dots + (a_n^T y)x_n \leq c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ ou encore $(a_1 x_1)^T y + \dots + (a_n x_n)^T y \leq c^T x$ ce qui s'écrit finalement, comme pour l'optimisation linéaire,

$$(Ax)^T y \leq c^T x \text{ avec } x \in K^*$$

On obtient donc une borne supérieure sur la valeur de la fonction objectif $b^T y$ pour autant que $Ax = b$ et $x \in K^*$, ce qui permet d'écrire le problème dual suivant

$$(PC) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \succeq_{K^*} 0$$

En effet, on a pu exprimer la contrainte $x \in K^*$ sous la forme $x \succeq_{K^*} 0$ car K^* est toujours un cône convexe solide, pointé et fermé. En fait, on a les théorèmes suivants

THEOREM 1.2. *Soit $K \subseteq \mathbb{R}^n$ un cône convexe. L'ensemble $K^* = \{x \in \mathbb{R}^n \mid z^T x \geq 0 \forall z \in K\}$ est également un cône convexe, que l'on nomme cône dual de K .*

THEOREM 1.3. *Soit K un cône convexe solide. Le cône dual K^* est pointé.*

THEOREM 1.4. *Soit K un cône convexe pointé. Le cône dual K^* est solide.*

THEOREM 1.5. *Soit K un cône convexe. Le cône dual K^* est toujours fermé.*

THEOREM 1.6. *Soit K un cône convexe. Le dual du cône dual K^* est égal à la fermeture du cône d'origine (c'est-à-dire le cône d'origine plus les points situés à sa frontière), soit $(K^*)^* = \text{cl } K$. Par conséquent, si le cône K est convexe et fermé, il est égal au dual de son dual, soit $(K^*)^* = K$.*

(les démonstrations des quatre premières propriétés sont élémentaires et laissées comme exercices, consulter [18] pour la dernière propriété, parfois appelée *théorème bipolaire*).

Par conséquent, le dual d'un cône convexe, solide, pointé et fermé sur lequel nous avons basé notre problème d'optimisation (DC) est un cône convexe, solide, pointé et fermé à l'aide duquel on peut exprimer le problème dual de (DC). Par ailleurs, comme dans le cas linéaire, on peut montrer que le dual de ce problème dual est égal au problème d'origine. Pour des raisons historiques, on préfère appeler (DC) problème dual, et le baser sur le cône K^* , tandis que (PC) sera dénommé problème primal et basé sur le cône K , ce qui nous donne la paire primale-duale de problèmes d'*optimisation conique*

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \succeq_K 0 \quad \text{et} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \preceq_{K^*} c$$

où \succeq_K est l'ordre défini à l'aide d'un cône K convexe, solide, pointé et fermé et \preceq_{K^*} est l'ordre défini à l'aide du cône dual de K .

Cette paire peut encore s'écrire

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \in K \quad \text{et} \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } c - A^T y \in K^*$$

Dans le cas linéaire, c'est-à-dire lorsque $K = \mathbb{R}_+^n$, il est évident que tout ceci nous redonne les résultats obtenus auparavant, en particulier on trouve bien que $K^* = (\mathbb{R}_+^n)^* = \mathbb{R}_+^n = K$ (ce cône est auto-dual) et donc que les ordres définis pour le problème primal et pour son dual sont tous deux égaux à l'ordre traditionnel composante par composante.

Aux séances d'exercices, il a été vu que les deux cônes \mathbb{L}^n et \mathbb{S}_+^n sont également auto-duaux. Cependant, il est important qu'il s'agit de cas particuliers et qu'il existe des cônes qui ne sont pas auto-duaux (ceux-ci forment en fait la majorité des cônes).

On a déjà vu que le problème conique dual (DC) était convexe. Il en est de même pour le problème conique primal (PC), puisque sa fonction objectif est convexe (linéaire en fait) et son domaine admissible est convexe : en effet, si x_1 et x_2 appartiennent tous deux à l'ensemble $E = \{x \mid Ax = b \text{ et } x \in K\}$, il est évident que la combinaison $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2$ appartiendra également à E puisqu'elle vérifiera $A(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2) = \lambda Ax_1 + (1 - \lambda)Ax_2 = \lambda b + (1 - \lambda)b = b$ tandis que $\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_2 \in K$ sera garanti de par la convexité de K .

L'optimisation conique est donc apparemment un cas particulier de l'optimisation convexe. En fait, la relation entre ces deux catégories de problèmes est beaucoup plus étroite que cela, puisqu'il est possible de formuler n'importe quel problème d'optimisation convexe sous la forme d'un problème d'optimisation conique ! Voici comment on procède : soit un problème convexe

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \text{ tel que } x \in X$$

(pour rappel, on a donc que la fonction objectif f est une fonction convexe et que le domaine admissible X est un ensemble convexe). Tout d'abord, l'optimisation conique nécessite une fonction objectif linéaire. A cet effet, il est aisé de montrer que le problème suivant, dont l'objectif est linéaire, est équivalent au problème convexe d'origine.

$$\min_{(x,t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}} t \text{ tel que } x \in X \text{ et } (x,t) \in \text{epi } f$$

En effet, on a ajouté une variable supplémentaire t qui intervient uniquement dans la contrainte $(x, t) \in \text{epi } f$ qui, d'après la définition de l'épigraphe, est équivalent à $t \geq f(x)$. Par conséquent, si on minimise t , à l'optimum, on aura forcément $t = f(x)$ et on aura donc bien minimisé l'objectif d'origine $f(x)$. De plus, ce problème équivalent est toujours convexe, car son domaine admissible est convexe puisqu'il s'agit de l'intersection du domaine admissible d'origine X (supposé convexe) et de l'épigraphe de la fonction objectif d'origine (supposée convexe), également un ensemble convexe.

On peut donc supposer sans perte de généralité qu'on dispose d'un objectif linéaire pour notre problème convexe. Cependant, pour l'exprimer à l'aide de la formulation conique, le domaine admissible devrait être défini par une contrainte de type $x \succeq_K 0$. Soit le domaine admissible convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$, définissons le cône suivant

$$K_X = \text{cl}\{(x, u) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_{++} \mid \frac{x}{u} \in X\}$$

THEOREM 1.7. *Soit X un ensemble convexe. L'ensemble K_X est un cône convexe, appelé enveloppe conique de l'ensemble X .*

(la démonstration élémentaire est laissée comme exercice : il suffit de montrer que K_X est un cône et qu'il est fermé pour l'addition). Géométriquement, on retrouve l'ensemble X dans l'intersection de K_X avec l'hyperplan $u = 1$. En fait, K_X peut être vu dans l'espace $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ comme la réunion des différentes demi-droites joignant l'origine aux points de X dans l'hyperplan $u = 1$. Il reste à s'assurer que K_X est solide, pointé et fermé, ce qui peut se faire moyennant quelques adaptations d'ordre technique dont nous ne discuterons pas ici.

A l'aide de K_X , il devient possible d'exprimer la contrainte $x \in X$ simplement sous la forme $(x, u) \in K_X$ et $u = 1$, qui correspond bien au format du problème d'optimisation conique primal (on a bien une contrainte linéaire d'égalité et une contrainte d'inclusion dans un cône convexe).

Pour autant qu'on ait rendu auparavant la fonction objectif linéaire à l'aide de la procédure décrite plus haut, on dispose donc d'un moyen d'écrire le problème convexe

$$\min c^T x \text{ tel que } x \in X$$

sous la forme primale conique

$$\min c^T x \text{ tel que } u = 1 \text{ et } (x, u) \succeq_{K_X} 0$$

De façon relativement surprenante, ceci montre que la classe des problèmes d'optimisation conique est tout aussi générale que celle des problèmes d'optimisation convexe. Cependant, comme on va le voir par la suite, elle dispose de l'avantage d'une formulation grandement simplifiée quand il s'agit d'aborder les questions de dualité (cf. plus haut et la section suivante).

Enfin, pour conclure cette section, il est intéressant d'examiner le cas d'un problème basé sur l'utilisation du produit cartésien de plusieurs cônes déjà mentionné plus haut.

THEOREM 1.8. *Soit deux cônes convexes K_1 et K_2 . Le dual du produit cartésien $K_1 \times K_2$ est égal au produit cartésien des duaux de K_1 et K_2 , soit $(K_1 \times K_2)^* = K_1^* \times K_2^*$*

(démonstration élémentaire). Ceci nous permet d'exprimer aisément le primal du problème

$$\max b^T y \text{ tel que } A_1^T y \preceq_{K_1^*} c_1 \text{ et } A_2^T y \preceq_{K_2^*} c_2$$

qui, puisqu'il est équivalent au problème

$$\max b^T y \text{ tel que } \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A_1^T \\ A_2^T \end{pmatrix} y \succeq_{K_1^* \times K_2^*} 0$$

admet comme primal le problème

$$\min \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \text{ tel que } (A_1 \ A_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = b \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \succeq_{K_1 \times K_2} 0$$

qui peut encore se décomposer comme

$$\min c_1^T x_1 + c_2^T x_2 \text{ tel que } A_1 x_1 + A_2 x_2 = b \text{ et } x_1 \succeq_{K_1} 0, x_2 \succeq_{K_2} 0$$

2. Dualité pour l'optimisation conique

Débutons par un rappel de la dualité pour l'optimisation linéaire. On considère les deux problèmes

$$(P) \quad p^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \geq 0$$

et

$$(D) \quad d^* = \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \leq c$$

On a posé p^* la valeur optimale de la fonction objectif du problème primal (P) et d^* celle du problème dual (D). A priori, p^* peut prendre la valeur $+\infty$ (problème primal non admissible), une valeur finie (problème primal admissible borné) ou la valeur $-\infty$ (problème primal admissible non borné). De même, d^* peut prendre la valeur $-\infty$ (problème dual non admissible), une valeur finie (problème dual admissible borné) ou la valeur $+\infty$ (problème dual admissible non borné). Au total, il existe donc $3 \times 3 = 9$ situations possibles pour la paire primale-duale. Cependant, en raison des théorèmes de dualité, certaines de ces situations sont impossibles. En effet, lorsque le problème primal est non borné, son dual doit forcément être non admissible. En effet, si son dual admettait une solution admissible, celle-ci constituerait une borne inférieure pour le problème primal (théorème de dualité faible), ce qui est en contradiction avec son caractère non borné. En résumé, $p^* = -\infty \Rightarrow d^* = -\infty$. De même, un raisonnement similaire montre que $d^* = +\infty \Rightarrow p^* = +\infty$. Lorsque d^* est fini, le théorème de dualité forte affirme que p^* doit également être fini et que $p^* = d^*$. Ce même théorème appliqué au cas symétrique où p^* est fini implique de la même façon que d^* est fini et que $d^* = p^*$. Enfin, il reste un dernier cas possible : les deux problèmes sont impossibles (soit $p^* = +\infty$ et $d^* = -\infty$), cas qui peut effectivement se produire (prendre par exemple $c = (-1 \ 0)^T$, $b = -1$ et $A = (0 \ 1)$). On retrouve donc le tableau suivant, pour lequel en réalité seules quatre situations peuvent se produire :

	$d^* = -\infty$	d^* fini	$d^* = +\infty$
$p^* = -\infty$	Possible, $p^* = d^*$	Impossible	Impossible
p^* fini	Impossible	Possible, $p^* = d^*$	Impossible
$p^* = +\infty$	Possible, $p^* \neq d^*$	Impossible	Possible, $p^* = d^*$

Revenons maintenant à la paire primale-duale de l'optimisation conique

$$p^* = \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \text{ tel que } Ax = b \text{ et } x \succeq_K 0 \quad \text{et} \quad d^* = \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \text{ tel que } A^T y \preceq_{K^*} c$$

Tout d'abord, tout comme dans le cas linéaire, la propriété de dualité faible est vérifiée.

THEOREM 2.1. *Soit y une solution admissible pour le problème conique dual et x une solution admissible pour le problème conique primal : on a toujours $c^T x \geq b^T y$.*

Sa validité découle directement du raisonnement que nous avons suivi pour formuler le problème (PC), mais on peut également en fournir une preuve plus algébrique : on a

$$c^T x - b^T y = c^T x - (Ax)^T y = x^T c - x^T A^T y = x^T (c - A^T y) \geq 0$$

et le fait que cette dernière quantité est positive découle des inclusions $x \in K$, $c - A^T y \in K^*$ et de la définition du cône dual K^* .

Par conséquent, si on nomme ici aussi p^* et d^* les valeurs optimales des problèmes coniques primal et dual, on a $p^* = -\infty \Rightarrow d^* = -\infty$ et $d^* = +\infty \Rightarrow p^* = +\infty$ par le même raisonnement que dans le cas linéaire.

Malheureusement, le théorème de dualité forte pour l'optimisation linéaire n'est pas totalement transposable au cas conique : en effet, considérons le problème conique suivant

$$K = \mathbb{L}^2, A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, b = (0 \quad -1)^T \text{ et } c = (0 \quad 0 \quad 0)^T$$

Le problème primal peut s'écrire

$$\min 0 \text{ tel que } -x_1 - x_3 = 0, \quad -x_2 = -1 \text{ et } (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{L}^2$$

mais on se convainc aisément que cette dernière contrainte ne peut être satisfaite : en utilisant $x_2 = -1$ et $x_3 = -x_1$, la contrainte conique $x_2^2 + x_3^2 \leq x_1^2$ devient $1 + x_1^2 \leq x_1^2$, une contradiction. Par conséquent, le problème primal est non admissible et $p^* = +\infty$. Le problème dual peut s'écrire (en se rappelant que $(\mathbb{L}^2)^* = \mathbb{L}^2$)

$$\max y_2 \text{ tel que } (y_1, y_2, y_1) \in \mathbb{L}^2$$

Toutefois, l'inclusion dans \mathbb{L}^2 implique $y_1^2 + y_2^2 \leq y_1^2$, ce qui implique $y_2 = 0$ et par conséquent la fonction objectif du dual est identiquement égale à 0 pour toutes les solutions admissibles : $d^* = 0$. En conclusion, ce problème possède un dual admissible et borné et pourtant son primal est impossible.

La cause fondamentale de ce problème provient du fait que la zone admissible du dual est *tangente* au cône \mathbb{L}^2 , en ce sens qu'aucune solution admissible n'appartient à l'intérieur de ce cône, et donc que toutes les solutions admissibles correspondent à un *cas limite* (frontière) d'appartenance au cône \mathbb{L}^2 . Le problème peut même être plus grave puisqu'on

vous a présenté lors d'une séance d'exercices une paire conique primale-duale, basée sur le cône \mathbb{S}_+^3 , telle que p^* et d^* sont tous les deux finis mais différents.

On peut observer une autre particularité des problèmes coniques sur l'exemple suivant :

$$\min x_1 \text{ tel que } x_3 = 1 \text{ et } \begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_3 & x_2 \end{pmatrix} \succeq_{\mathbb{S}_+^2} 0$$

Il s'agit d'un problème conique dans la forme primale basé sur le cône $K = \mathbb{S}_+^2$, ce qui implique que le déterminant de la matrice ci-dessus est positif, soit $x_1 x_2 \geq x_3^2$. En combinant avec la contrainte d'égalité $x_3 = 1$, on trouve $x_1 x_2 \geq 1$, ce qui permet de conclure que le minimum de x_1 vaut 0 ; cependant, ce minimum n'est atteint par aucune solution puisque x_1 ne peut valoir zéro. Le problème est donc admissible, borné mais non soluble, une situation qui ne se produit jamais dans le cas de l'optimisation linéaire.

Ces résultats négatifs pourraient laisser penser que le lien primal-dual est beaucoup moins fort dans le cas conique que dans le cas linéaire, mais il est possible de restaurer la quasi-totalité des résultats du cas linéaire à l'aide d'une hypothèse de régularité du problème relativement simple.

Une solution admissible x du problème conique primal est dite strictement admissible si elle appartient à l'intérieur du cône primal K , c'est-à-dire si $Ax = b$ et $x \succ_K 0$ (rappelons que $x \succ_K 0$ signifie $x \in \text{int } K$). De même, une solution admissible y du problème conique dual est dite strictement admissible si elle satisfait strictement l'inégalité impliquant le cône dual K^* , c'est-à-dire si $A^T y \prec_{K^*} c$ (ce qui signifie $c - A^T y \in \text{int } K^*$).

Un problème conique (primal ou dual) est dit strictement admissible si il admet au moins une solution strictement admissible. Le théorème de la dualité forte pour l'optimisation conique devient

THEOREM 2.2. *Si le problème dual est strictement admissible, on a soit*

- ◇ *un problème dual non borné : dans ce cas $d^* = +\infty = p^*$ et le primal n'est pas admissible*
- ◇ *un problème dual borné : dans ce cas le problème primal est forcément borné, soluble et satisfait $p^* = d^*$ (il existe donc au moins une solution primale admissible x^* telle que $c^T x^* = p^* = d^*$).*

Le premier cas décrit dans ce théorème se montre simplement en utilisant la dualité faible (et à vrai dire n'utilise pas l'hypothèse de stricte admissibilité du dual). Par contre, la démonstration dans le second cas repose fondamentalement sur l'hypothèse de stricte admissibilité (cette preuve est plus complexe et sort du cadre de ce cours). Remarquons encore que le théorème ne précise pas dans le second cas si le problème dual est soluble ou pas (en effet, les deux situations peuvent survenir en pratique).

Bien sûr, le théorème symétrique est valable dans le cas d'un primal strictement admissible :

THEOREM 2.3. *Si le problème primal est strictement admissible, on a soit*

- ◇ *un problème primal non borné : dans ce cas $p^* = -\infty = d^*$ et le dual n'est pas admissible*

- ◇ un problème primal borné : dans ce cas le problème dual est forcément borné, soluble et satisfait $p^* = d^*$ (il existe donc au moins une solution duale admissible y^* telle que $b^T y^* = d^* = p^*$).

Enfin, on peut en déduire aisément le corollaire suivant :

COROLLARY 2.1. *Si le problème primal et le problème dual sont tous deux strictement admissibles, les deux problèmes sont bornés, solubles et satisfont $p^* = d^*$ (il existe donc des solutions admissibles x^* et y^* telles que $b^T y^* = d^* = p^* = c^T x^*$).*

3. Ensembles et fonctions SQL-représentables

On a vu que n'importe quel problème convexe peut être formulé comme un problème d'optimisation conique. Cependant, à l'heure actuelle, on ne dispose pas encore de méthode de résolution performante en pratique pour n'importe quel type de cône convexe. En fait, on est capable de traiter efficacement trois types de cônes : le cône \mathbb{R}_+^n (optimisation linéaire), le cône \mathbb{L}^n (optimisation du cône du second-ordre) et \mathbb{S}_+^n (optimisation semidéfinie). Conformément à ce qui a été expliqué plus haut, il est également possible d'utiliser simultanément plusieurs de ces cônes (à l'aide de leur produit cartésien).

Bien sûr, puisque le choix des cônes est limité, il n'est pas toujours possible de modéliser un problème convexe donné. Ainsi, il est intuitivement clair qu'un problème utilisant la fonction exponentielle, même s'il est convexe, ne pourra pas être formulé à l'aide des cônes \mathbb{R}_+^n , \mathbb{L}^n ou \mathbb{S}_+^n .

Toutefois, certains problèmes, même s'ils ne peuvent être formulés directement comme problèmes coniques, peuvent parfois être tout de même modélisés moyennant l'ajout de variables auxiliaires. En fait, on a déjà rencontré cette situation plus haut, au cours de la description de l'exemple de problème borné non soluble. La contrainte $x_1 x_2 \geq 1$ n'est pas directement modélisable de façon conique, car aucun cône ne contient un tel produit dans sa définition. Par contre, moyennant l'ajout d'une variable auxiliaire x_3 fixée à 1, cette contrainte devient modélisable à l'aide du cône \mathbb{S}_+^2 des matrices semidéfinies positives 2×2 (voir plus haut). La notion d'ensemble SQL-représentable permet de formaliser cette procédure.

Une ensemble convexe $X \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *SQL-représentable* si et seulement si il existe un ensemble $W \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^r$ tel que

- ◇ L'ensemble X est la projection de l'ensemble W sur ses n premières composantes, c'est-à-dire

$$x \in X \Leftrightarrow \exists w \in \mathbb{R}^r \text{ tel que } (x, w) \in W$$

- ◇ W est exprimable comme le domaine admissible d'un problème conique utilisant exclusivement les trois cônes \mathbb{S}_+^n ($S \equiv$ semidéfini), \mathbb{L}^n ($Q \equiv$ quadratique) ou \mathbb{R}_+^n ($L \equiv$ linéaire), c'est-à-dire soit

$$W = \{w \in \mathbb{R}^{n+r} \mid Aw = b \text{ et } w \succeq_K 0\}, \text{ soit } W = \{w \in \mathbb{R}^{n+r} \mid A^T w \preceq_K c\}$$

où K utilise exclusivement les trois cônes \mathbb{R}_+^n , \mathbb{L}^n ou \mathbb{S}_+^n (un seul d'entre eux ou un produit cartésien)

Intuitivement, les r composantes additionnelles que possède W par rapport à X correspondent à r variables additionnelles que l'on introduit en sus des variables de X afin de pouvoir modéliser l'ensemble résultant comme un problème conique.

Lorsque l'objectif du problème que l'on cherche à modéliser est convexe mais pas linéaire, il suffit d'appliquer la procédure décrite plus haut pour transformer l'objectif en fonction linéaire (utilisation de l'épigraphe de l'objectif non-linéaire). Par conséquent, il faudra que cet épigraphe soit lui-même SQL-représentable, ce qui correspond à la notion de fonction SQL-représentable. Formellement, une fonction convexe $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ est SQL-représentable si et seulement si son épigraphe $\{(x, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid f(x) \leq t\}$ est un ensemble SQL-représentable.

Au final, on sera capable de résoudre efficacement en pratique un problème convexe pour autant que son domaine admissible soit SQL-représentable et son objectif soit linéaire ou SQL-représentable (cf. séances d'exercices pour des exemples).

Signalons pour conclure que tout comme pour les ensembles convexes, l'intersection et le produits cartésien de deux ensembles SQL-représentables est également SQL-représentable, tandis que la somme de deux fonctions SQL-représentables ainsi que le produit d'une telle fonction par une constante positive est également SQL-représentable (cf. exercices).

Partie 2

Méthodes

Méthodes de point intérieur pour l'optimisation linéaire

1. Introduction

Nous débutons par un rappel de la formulation standard d'un problème d'optimisation¹ linéaire et donnons un bref aperçu des différences principales entre l'algorithme simplexe, l'approche traditionnelle pour résoudre un problème linéaire et les méthodes de point intérieur, une famille d'algorithmes développés plus récemment à laquelle ce chapitre est consacré.

1.1. Programmation linéaire. Pour rappel, un problème de programmation linéaire consiste à optimiser une fonction objectif linéaire f dépendant de n variables de décision tout en vérifiant un ensemble de contraintes linéaires (égalités et/ou inégalités), ce que l'on peut écrire mathématiquement comme (en utilisant des notations matricielles)

$$(1.1) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) = c^T x \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} A^E x = b^E \\ A^I x \geq b^I \end{cases},$$

où le vecteur x contient les n variables de décision, le vecteur c définit la fonction objectif et les paires (A^E, b^E) et (A^I, b^I) définissent les m^E contraintes égalités et les m^I contraintes d'inégalité. Les vecteurs colonnes x et c sont de taille n , les vecteurs colonnes b^E et b^I sont de taille m^E et m^I tandis que les matrices A^E et A^I sont de dimensions respectives $m^E \times n$ et $m^I \times n$.

Cependant, de nombreux problèmes linéaires utilisent des contraintes d'inégalité plus simples, par exemple des contraintes de positivité ($x \geq 0$) ou des bornes inférieures et supérieures ($l \leq x \leq u$). La *forme standard* pour la programmation linéaire est une forme particulière de problème d'optimisation linéaire que nous utiliserons pour le développement théorique des méthodes de point intérieur :

$$(1.2) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases}.$$

Les seules contraintes d'inégalités dans ce problème sont des contraintes de positivité, et celles-ci concernent la *totalité* des variables, ce qui signifie qu'aucune variable n'est libre (on a donc que m^I est égal à n , A^I est la matrice identité et b^I est le vecteur nul). Il est toutefois possible de montrer que n'importe quel problème d'optimisation linéaire exprimé sous la forme générale (1.1) admet un programme équivalent sous forme standard, que l'on peut obtenir en ajoutant et/ou supprimant des variables et/ou des contraintes (le fait pour

¹Nous utiliserons indistinctement les expressions *programmation* linéaire et *optimisation* linéaire.

un problème d'être *équivalent* à un problème donné signifie que la résolution du problème transformé permet de trouver la solution du problème original).

1.2. L'algorithme simplexe. L'ensemble de tous les vecteurs x satisfaisant les contraintes de (1.2) forme un polyèdre dans \mathbb{R}^n . Puisque la fonction objectif est linéaire, chaque hyperplan de \mathbb{R}^n orthogonal au vecteur c constitue un ensemble de solutions admissibles possédant le même coût, ce qui entraîne que la solution optimale doit se trouver sur l'un des sommets du polyèdre (il est également possible qu'une face entière du polyèdre soit optimale, ou qu'il n'existe aucune solution optimale, soit parce que les contraintes du problème sont inconsistantes, soit parce que le polyèdre n'est pas borné dans la direction de la fonction objectif).

Pour rappel, l'idée principale de l'algorithme simplexe consiste à explorer de façon itérative les sommets de ce polyèdre, en se déplaçant de sommet en sommet tout en améliorant la valeur de la fonction objectif (en utilisant une caractérisation algébrique des sommets appelée *base*). Quand il n'est plus possible d'effectuer un tel déplacement sans détériorer la valeur de la fonction objectif, on arrête l'algorithme. Il a été prouvé que cela se produit nécessairement après un nombre fini de déplacements, et que le sommet résultant est bien optimal [5].

1.3. Un premier coup d'oeil aux méthodes de point intérieur. Nous sommes à présent en mesure de fournir une première description des méthodes de point intérieur. Contrairement à l'algorithme simplexe qui utilise les sommets, ces méthodes sont initialisées avec un point de départ situé à *l'intérieur* de l'ensemble des solutions admissibles. En nous basant sur la formulation standard (1.2), nous appellerons domaine admissible \mathcal{P} l'ensemble des vecteurs x qui satisfont les contraintes, c'est-à-dire

$$\mathcal{P} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ et } x \geq 0\} ,$$

tandis que l'ensemble associé \mathcal{P}^+ sera le sous-ensemble des points \mathcal{P} qui satisfont de manière stricte les contraintes de positivité

$$\mathcal{P}^+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \text{ et } x > 0\} .$$

\mathcal{P}^+ sera dénommé *domaine strictement admissible* et ses éléments seront appelés *points* (ou *solutions*) *strictement admissibles*.

Les méthodes de point intérieur sont des méthodes *itératives* qui calculent une suite d'itérés appartenant à \mathcal{P}^+ et convergeant vers une solution optimale, à l'opposé de l'algorithme simplexe qui obtient une solution optimale *exacte* après un nombre fini d'itérations. Les itérés des méthodes de point intérieur tendent donc vers une solution optimale sans jamais l'atteindre (puisque les solutions optimales n'appartiennent pas à \mathcal{P}^+ mais bien à $\mathcal{P} \setminus \mathcal{P}^+$, la frontière du domaine admissible). Ceci n'est un inconvénient qu'en apparence, puisque

- ◇ la plupart du temps, une solution approchée (avec par exemple une précision relative de 10^{-8}) se révèle tout à fait suffisante,
- ◇ il existe une procédure d'*arrondi* capable de convertir une solution intérieure quasi-optimale en un sommet optimal exact (voir par exemple [19]).

Une autre différence dans le comportement de ces méthodes se produit lorsqu'une face entière de \mathcal{P} est optimale : les méthodes de point intérieur convergent alors vers un point situé à l'intérieur de cette face, tandis que l'algorithme simplexe aboutira sur l'un de ses sommets).

La dernière différence que nous mentionnerons à ce stade concerne la complexité algorithmique de ces méthodes. Tandis que l'algorithme simplexe peut nécessiter un nombre d'itérations qui croît exponentiellement avec la taille du problème à résoudre [14], les méthodes de point intérieur ne nécessitent qu'un nombre d'itérations borné de façon polynomiale par la taille du problème pour atteindre une précision donnée. Cette propriété fondamentale est sans nul doute la principale responsable de l'énorme quantité de recherches effectuées dans le domaine des méthodes de point intérieur pour la programmation linéaire.

1.4. Un bref compte-rendu historique. L'objectif ici n'est pas d'être exhaustif mais plutôt de souligner les étapes importantes qui ont jalonné le développement des méthodes de point intérieur.

Premiers pas de l'optimisation linéaire.

1930–1940. Premières formulations de problèmes de programmation linéaire.

1939–1945. Seconde guerre mondiale : la recherche opérationnelle fait ses débuts, applications militaires.

1947. Georges B. Dantzig décrit l'algorithme simplexe pour la programmation linéaire [5].

1970. V. Klee et G. Minty prouvent que l'algorithme simplexe possède une complexité algorithmique (de pire cas) de type exponentiel [14].

Premier pas des méthodes de point intérieur et complexité polynomiale.

1955. K. R. Frisch propose une méthode *barrière* pour résoudre des problèmes non linéaires [8].

1967. P. Huard introduit la *méthode des centres* pour résoudre des problèmes possédant des contraintes non linéaires [10].

1968. A. V. Fiacco et G. P. McCormick développent la méthode barrière pour la programmation non linéaire convexe [7].

1978. L. G. Khachiyan applique la méthode de l'*ellipsoïde* (initialement introduite par N. Shor en 1970 [21]) à la programmation linéaire et prouve que sa complexité algorithmique est de type polynomial [13].

Il est important de réaliser que la méthode barrière fut développée pour résoudre des problèmes non linéaires. Bien qu'en principe également applicable à la programmation linéaire, ces auteurs ne la considéraient pas comme une alternative viable à l'algorithme simplexe. Il faut également signaler que la meilleure complexité algorithmique de la

méthode de l'ellipsoïde comparée à l'algorithme simplexe ne présente qu'un intérêt théorique, car la méthode de l'ellipsoïde s'avérera être très lente en pratique².

La révolution des méthodes de point intérieur.

- 1984.** N. Karmarkar découvre une méthode de point intérieur de complexité polynomiale plus efficace en pratique que celle de Khachiyan. Il annonce également des performances supérieures à celles de l'algorithme simplexe [12].
- 1994.** Y. Nesterov et A. Nemirovski publient une étude sur les méthodes de point intérieur polynomiales appliquées à la programmation convexe [17].
- 2000.** Depuis l'annonce de Karmarkar, plus de 3000 articles de recherche portant sur les méthodes de point intérieur ont été publiés par la communauté scientifique, ainsi que quelques ouvrages de références (voir par exemple [25, 19, 26]). Les recherches se dirigent à présent vers la programmation non linéaire, plus particulièrement dans le domaine de l'optimisation convexe.

Avec le recul, il faut modérer l'affirmation de Karmarkar : sa méthode n'était en définitive pas véritablement supérieure aux meilleures implémentations de l'algorithme simplexe disponibles à l'époque, surtout pour la résolution de problèmes de petite taille. Néanmoins, elle a eu le mérite de susciter de nombreuses recherches dans ce domaine. Signalons également pour l'anecdote que la méthode de Khachiyan n'est pas à proprement parler la première méthode de résolution polynomiale pour la programmation linéaire. En effet, il a été montré a posteriori [2] que la méthode barrière de Fiacco et McCormick jouissait d'une complexité algorithmique de type polynomial lorsqu'elle était appliquée à la programmation linéaire. Ainsi, on disposait dès 1968 - mais sans en être conscient - d'une méthode polynomiale pour la programmation linéaire.

2. Concepts de base

Passons à présent en revue les différents concepts nécessaires à une compréhension correcte des méthodes de point intérieur. Nous débutons avec la notion très utile de dualité pour la programmation linéaire (voir par exemple [20]).

2.1. Dualité. Voici à nouveau le problème d'optimisation linéaire dans sa forme standard

$$(LP) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} .$$

²L'algorithme simplexe n'exhibe un nombre exponentiel d'itérations que sur quelques problèmes spécifiquement créés à cet effet et résout les problèmes réels beaucoup plus rapidement, tandis que la méthode de l'ellipsoïde nécessite un nombre d'itérations pratiquement toujours égal à sa borne polynomiale de pire cas, qui s'avère être nettement plus coûteuse en temps de calculs que le comportement typique de l'algorithme simplexe.

A l'aide des mêmes données (à savoir la matrice A et les vecteurs b et c), il est possible de décrire un autre programme linéaire

$$(LD') \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} A^T y \leq c \\ y \text{ est libre} \end{cases} .$$

Comme nous le constaterons par la suite, ce problème est fortement lié à (LP) et sera pour cette raison appelé le problème *dual* de LP (qui sera quant à lui baptisé problème *primal*). On vérifie aisément que ce problème peut également être formulé comme

$$(LD) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m, s \in \mathbb{R}^n} b^T y \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} A^T y + s = c \\ s \geq 0 \text{ et } y \text{ libre} \end{cases} .$$

L'introduction de ce vecteur supplémentaire s , contenant des variables d'*écart*, permettra de simplifier grandement nos notations, et nous utiliserons donc principalement cette seconde formulation du dual. Définissons également les domaines admissible \mathcal{D} et strictement admissible \mathcal{D}^+ pour le problème dual, de façon tout à fait similaire aux domaines \mathcal{P} et \mathcal{P}^+ pour le primal

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \{(y, s) \mid A^T y + s = c \text{ et } s \geq 0\} , \\ \mathcal{D}^+ &= \{(y, s) \mid A^T y + s = c \text{ et } s > 0\} . \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous faisons l'hypothèse que la matrice A est de plein rang, et donc que ses lignes sont linéairement indépendantes³. L'équation $A^T y + s = c$ induit alors dans ce cas une correspondance bijective entre les variables y et s sur le domaine admissible du problème dual. Dans la suite, nous emploierons donc indistinctement (y, s) , y ou s en tant que variables duales.

Mentionnons à présent quelques propriétés de dualité fondamentales :

- ◇ Si x est admissible pour (LP) et (y, s) est admissible pour (LD), nous avons l'inégalité $b^T y \leq c^T x$ entre les fonctions objectifs. En d'autres termes, toute solution admissible pour (LD) fournit une borne inférieure au problème (LP) et toute solution admissible pour (LP) fournit une borne supérieure pour (LD). C'est la propriété de dualité *faible*. La quantité $c^T x - b^T y$, toujours positive ou nulle, sera dénommée *saut de dualité*, on montre qu'elle est en fait égale à $x^T s$ (en effet, en utilisant le fait que $b = Ax$ et $c = A^T y + s$, on trouve $c^T x - b^T y = s^T x + y^T Ax - x^T A^T y = x^T s$, puisque le scalaire $y^T Ax$ est égal à son transposé $x^T A^T y$). .
- ◇ Les solutions x et (y, s) sont optimales pour les problèmes (LP) et (LD) si et seulement si le saut de dualité correspondant est égal à zéro. C'est la propriété de dualité *forte*. Ceci implique que dans la situation où les deux problèmes admettent une solution optimale, les valeurs optimales des deux fonctions objectifs sont égales. Dans ce cas, puisque $x^T s = 0$ et $x \geq 0$, $s \geq 0$, chacun des produits $x_i s_i$ doit être égal

³Cette hypothèse peut être faite sans aucune perte de généralité : si une des lignes de A dépendait linéairement d'un ensemble d'autres lignes, la contrainte associée serait soit redondante (et peut donc être ignorée sans conséquence), soit impossible à satisfaire (conduisant alors à un problème insoluble), ceci dépendant des valeurs du vecteur b rassemblant les membres de droite des contraintes.

à zéro, ce qui entraîne qu'au moins une des deux variables de chaque paire $\{x_i, s_i\}$ est égale à zéro pour chaque i (c'est la propriété des *écarts complémentaires*).

- ◇ Des deux théorèmes de dualité, on déduit aisément que les deux problèmes (LP) et (LD) doivent obligatoirement se trouver dans l'une des trois situations suivantes
- Les deux problèmes admettent une solution optimale finie (et la dualité forte garantit qu'ils partagent alors la même valeur optimale de la fonction objectif).
 - Un des problèmes n'est pas borné (sa valeur optimale est infinie) tandis que l'autre ne possède aucune solution admissible (son domaine admissible est vide). Ceci est une conséquence de la dualité faible.
 - Aucun des problèmes n'admet de solution admissible.

C'est le *théorème fondamental de dualité* pour la programmation linéaire.

2.2. Conditions d'optimalité. La théorie de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) permet d'écrire des conditions nécessaires d'optimalité pour tout problème d'optimisation contraint possédant une fonction objectif différentiable. De plus, lorsque le problème est convexe, ces conditions sont également suffisantes, ce qui est le cas pour l'optimisation linéaire. En considérant le problème (LP), on aboutit au système⁴

$$(KKT) \quad x \text{ est optimal pour (LP)} \Leftrightarrow \exists (z, t) \text{ tel que } \begin{cases} Ax = b \\ A^T z + t = c \\ x_i t_i = 0 \forall i \\ x \text{ et } t \geq 0 \end{cases} .$$

On remarque que la seconde équation possède exactement la même structure que les contraintes d'égalité du problème dual (LD). En fait, si nous identifions z avec y et t avec s , nous trouvons

$$x \text{ est optimal pour (LP)} \Leftrightarrow \exists (y, s) \text{ tel que } \begin{cases} Ax = b \\ A^T y + s = c \\ x_i s_i = 0 \forall i \\ x \text{ et } s \geq 0 \end{cases} .$$

Finalement, en utilisant les définitions de \mathcal{P} et \mathcal{D} et le fait que lorsque deux vecteurs u et v sont positifs,

$$u_i v_i = 0 \forall i \Leftrightarrow \sum_i u_i v_i = 0 \Leftrightarrow u^T v = 0$$

on obtient

$$x \text{ est optimal pour (LP)} \Leftrightarrow \exists (y, s) \text{ tel que } \begin{cases} x \in \mathcal{P} \\ (y, s) \in \mathcal{D} \\ x^T s = 0 \end{cases} .$$

Ceci n'est en fait rien d'autre qu'une reformulation de la propriété de dualité forte, révélant à nouveau les liens étroits qui unissent les problèmes primal et dual : une condition à la fois nécessaire et suffisante pour l'optimalité d'une solution admissible pour le problème primal

⁴Ce système peut également aisément être obtenu à l'aide de la théorie des multiplicateurs de Lagrange.

est l'existence d'une solution admissible pour le problème dual avec un saut de dualité nul (c'est-à-dire la même valeur de la fonction objectif).

De façon tout à fait similaire, l'écriture des conditions KKT pour le problème dual mènerait au même système d'équations, imposant l'existence d'une solution primale admissible avec un saut de dualité nul.

2.3. La méthode de Newton. Une des idées maîtresses dans la conception des méthodes de point intérieur consiste à remplacer la résolution des problèmes d'optimisation (LP) et (LD) par celle du système d'équations non linéaires (KKT). Il est dès lors naturel de lui appliquer une des méthodes les plus populaires pour la résolution de systèmes d'équations non linéaires⁵ : la *méthode de Newton*, dont nous décrivons à présent brièvement le principe.

Soit $F : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$ une fonction non linéaire différentiable. La méthode de Newton est une procédure itérative qui a pour objectif de trouver un point $x \in \mathbb{R}^n$ tel que $F(x) = 0$. Pour chaque itéré x^k , la méthode calcule une approximation du premier ordre (linéaire) de F autour de x^k et définit l'itéré suivant x^{k+1} comme le zéro de cette approximation linéaire. Plus formellement, si J est le jacobien de F (que l'on suppose ne pas être singulier), on écrit

$$F(x^k + \Delta x^k) \approx F(x^k) + J(x^k)\Delta x^k$$

et la pas de Newton Δx^k est choisi de telle façon que cette approximation linéaire est égale à zéro : on pose donc $x^{k+1} = x^k + \Delta x^k$ avec⁶ $\Delta x^k = -J(x^k)^{-1}F(x^k)$. La convergence vers une solution est garantie à partir du moment où l'itéré initial x^0 se trouve dans un voisinage suffisamment proche d'un des zéros de F .

La méthode de Newton est également applicable à des problèmes de minimisation, en procédant comme suit : soit $g : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ une fonction à minimiser. Nous formons l'approximation du second ordre de $g(x)$ autour de x^k , soit

$$g(x^k + \Delta x^k) \approx g(x^k) + \nabla g(x^k)^T \Delta x^k + \frac{1}{2} \Delta x^{kT} \nabla^2 g(x^k) \Delta x^k .$$

Si la matrice hessienne $\nabla^2 g(x^k)$ est définie positive, ce qui se produit lorsque g est strictement convexe, cette approximation possède un minimum unique, qui sera choisi comme itéré suivant. Il est donc défini par $\Delta x^k = -\nabla^2 g(x^k)^{-1} \nabla g(x^k)$, ce qui décrit en fait une méthode équivalente à l'application de la méthode de Newton à la condition d'optimalité $\nabla g(x) = 0$ basée sur le gradient de g .

Comme on l'a mentionnée plus haut, les méthodes de point intérieur vont donc tenter de résoudre le systèmes d'équations (KKT) à l'aide de la méthode de Newton. Cette approche présente néanmoins deux inconvénients majeurs :

⁵A proprement parler, les deux premières conditions sont linéaires tandis que seules les équations $x_i s_i = 0$ sont non linéaires. Les contraintes de positivité ne sont pas des équations et ne peuvent par conséquent être traitées par une telle méthode.

⁶Le calcul de Δx^k est généralement effectué en pratique via la résolution du système linéaire $J(x^k)\Delta x^k = -F(x^k)$ plutôt qu'en évaluant explicitement l'inverse de $J(x^k)$.

- ◇ D'une part, les contraintes de positivité sur x et s ne peuvent être directement prises en compte par la fonction F , et sont donc totalement ignorées par la méthode de Newton. Rien ne garantit donc que les itérés fournis seront positifs, et donc admissibles.
- ◇ D'autre part, la convergence méthode de Newton n'est garantie que si l'on démarre d'un point suffisamment proche de la solution recherchée, condition qui peut difficilement être vérifiée dans le cas général.

On montrera plus loin qu'une modification de la longueur du pas fourni par la méthode de Newton permet de résoudre ces deux difficultés de façon relativement satisfaisante (voir la section 3.2 sur les méthodes de mise à l'échelle affine). Toutefois, l'introduction des concepts de *fonction barrière* et de *chemin central* apporte une réponse bien plus efficace et convaincante à ces deux préoccupations.

2.4. La fonction barrière. Une fonction barrière $\phi : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ est simplement une fonction différentiable telle que $\lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = +\infty$. A l'aide d'une telle barrière, il est possible de dériver à partir d'un problème possédant des contraintes d'inégalités toute une famille paramétrée de problèmes non contraints, de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \text{(G)} \quad & \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \quad \text{tel que} \quad g_i(x) \geq 0 \quad \forall i \\ \text{(G}^\mu\text{)} \quad & \rightarrow \min_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) + \mu \sum_i \phi(g_i(x)), \end{aligned}$$

où le paramètre $\mu \in \mathbb{R}^+$ est un réel positif. Le rôle du terme barrière ajouté consiste à tenir les itérés générés par une méthode d'optimisation pour problèmes sans contraintes à distance de la zone non admissible (c'est-à-dire où un ou plusieurs des termes g_i sont négatifs). Bien sûr, on ne peut pas s'attendre à ce que les solutions optimales du problème (G^μ) soit égales à celles du problème d'origine (G). En fait, chaque valeur de μ fournit un problème (G^μ) différent avec ses propres solutions optimales.

Cependant, si on résout une série de problèmes (G^μ) avec le paramètre μ décroissant vers zéro, on peut s'attendre à ce que la suite des solutions optimales obtenues converge vers la solution optimale du problème d'origine (G), puisque l'impact du terme barrière devient de moins en moins prononcé en comparaison avec la fonction objectif réelle. L'avantage de cette procédure réside dans le fait que chaque solution optimale obtenue au cours de résolution de la série de problèmes paramétrés satisfera strictement les contraintes d'inégalité $g_i(x) > 0$, conduisant ainsi à la limite à une solution admissible et optimale pour le problème (G)⁷.

L'application de cette technique à la programmation linéaire va nous mener au dernier concept fondamental pour les méthodes de point intérieur : le *chemin central*.

⁷La notion de fonction barrière fut introduite à l'origine par Frisch puis Fiacco et McCormick pour traiter pour traiter les problèmes non linéaires [8, 7].

2.5. Le chemin central. Les méthodes de point intérieur sont basées sur l'utilisation d'une fonction barrière bien spécifique, appelée *barrière logarithmique* :

$$\phi(x) = -\log(x) .$$

A l'aide de cette fonction ϕ , appliquons un terme barrière au problème d'optimisation linéaire (LP)

$$(P^\mu) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x - \mu \sum_i \log(x_i) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Ax = b \\ x > 0 \end{cases}$$

et à son dual (LD) (puisque'il s'agit d'une maximisation, nous devons soustraire le terme barrière)

$$(D^\mu) \quad \max_{y \in \mathbb{R}^m} b^T y + \mu \sum_i \log(s_i) \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} A^T y + s = c \\ s > 0 \text{ et } y \text{ free} \end{cases} .$$

Un exemple de problème linéaire (format dual (LD[']), avec inégalités), où l'on a représenté les courbes de niveau de l'objectif perturbé par la fonction barrière du problème (P^μ) est représenté sur la figure 1.

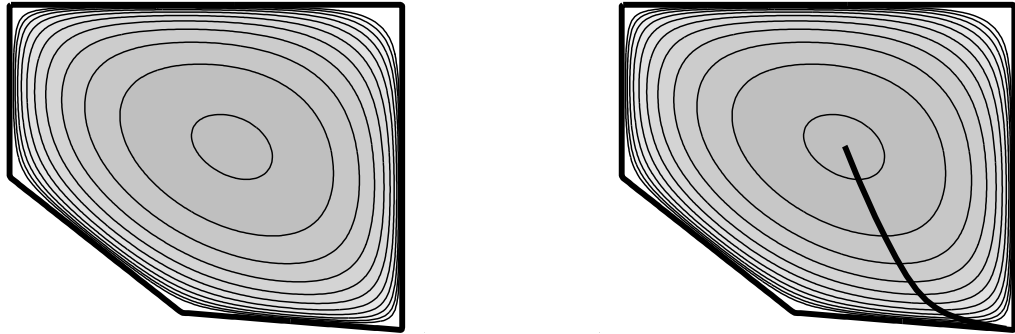


FIGURE 1. Courbes de niveau du problème (P^μ) (à gauche) et chemin central (à droite).

On peut montrer (voir par exemple [19]) que ces deux problèmes ont chacun une solution optimale unique $x^{(\mu)}$ et $(y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$ pour tout $\mu > 0$ à condition de faire l'hypothèse que les domaines strictement admissibles \mathcal{P}^+ et \mathcal{D}^+ sont tous deux non vides⁸. Nous admettrons donc dans la suite de ce texte qu'il existe au moins une solution strictement admissible pour le problème primal et pour le problème dual (on verra en plus loin que cette condition n'est pas véritablement restrictive et comment on peut s'en affranchir en pratique, cf. section 4.1)

⁸Cette hypothèse, connue sous le nom de *condition de point intérieur*, est en fait une condition nécessaire et suffisante pour garantir l'existence et l'unicité des solutions $x^{(\mu)}$ et $(y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$ pour tout $\mu > 0$.

Lorsque μ varie sur l'intervalle $]0 + \infty$, on appellera ces deux ensembles de solutions optimales $\{x^{(\mu)} \mid \mu > 0\} \subset \mathcal{P}^+$ et $\{(y^{(\mu)}, s^{(\mu)}) \mid \mu > 0\} \subset \mathcal{D}^+$ respectivement *chemin central* primal et dual. Ces courbes paramétrées possèdent les propriétés suivantes :

- ◇ La valeur de la fonction objectif primale (resp. duale) $c^T x$ (resp. $b^T y$) décroît (resp. croît) de façon monotone le long du chemin central primal (resp. dual) lorsque μ tend en décroissant vers zéro.
- ◇ Le saut de dualité $c^T x^{(\mu)} - b^T y^{(\mu)}$ évalué pour la solution primale-duale $(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$ est précisément égal à $n\mu$, raison pour laquelle on baptisera μ *mesure de dualité*. Lorsqu'un point (x, y, s) ne se trouve pas exactement sur le chemin central, on pourra calculer une mesure de dualité *estimée* à l'aide de la formule $\mu = (c^T x - b^T y)/n$.
- ◇ Les points limites $x^* = \lim_{\mu \rightarrow 0} x^{(\mu)}$ et $(y^*, s^*) = \lim_{\mu \rightarrow 0} (y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$ existent et sont par conséquent des solutions optimales pour les problèmes (LP) et (LD) (en vertu du fait qu'on a par continuité $c^T x^* - b^T y^* = 0$ et de la propriété de dualité forte). De plus, il est possible de montrer que ces solutions vérifient l'inégalité stricte $x^* + s^* > 0$, et on appellera un tel couple de solutions optimales *strictement complémentaire*⁹.

2.6. Lien entre le chemin central et les conditions d'optimalité KKT. Pour conclure cette section, nous mettons en évidence un lien intéressant entre le chemin central et les conditions d'optimalité (KKT) : si on tente d'écrire les conditions d'optimalité (KKT) pour le problème primal perturbé (P^μ) ou pour le problème dual perturbé (D^μ), on trouve dans les deux cas le même système de conditions nécessaires et suffisantes :

$$(KKT^\mu) \quad \begin{cases} Ax = b \\ A^T y + s = c \\ x_i s_i = \mu \forall i \\ x \text{ et } s > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \mathcal{P}^+ \\ (y, s) \in \mathcal{D}^+ \\ x_i s_i = \mu \forall i \end{cases} .$$

Ce système est très similaire au système (KKT) d'origine, les seules différences consistant en une modification du membre de droite de la troisième condition et l'emploi d'inégalités strictes. Cela signifie donc que les points du chemin central satisfont une version légèrement perturbée des conditions d'optimalité (KKT) pour les problèmes (LP) et (LD).

Nous sommes à présent en possession de tous les outils nécessaires à la description des méthodes de point intérieur pour la programmation linéaire.

3. Méthodes de point intérieur

Depuis la découverte de Karmarkar, de nombreuses variantes de méthodes de point intérieur ont été développées. Il est important de réaliser qu'il existe un véritable arsenal de méthodes, basées sur les mêmes principes fondamentaux mais dont les caractéristiques individuelles peuvent varier assez fortement.

⁹Pour toute solution optimale (x, s) , on sait que $x_i s_i = 0$, et donc qu'au moins une des deux variables x_i et s_i est nulle, ce qui justifie le nom de solution complémentaire. Dans le cas d'une solution strictement complémentaire, on a *exactement* une des deux variables x_i et s_i égale à zéro.

Parmi les critères couramment utilisés pour différencier les méthodes, nous avons

- ◇ **Espace des itérés.** Une méthode est dite *primale*, *duale* ou *primale-duale* lorsque ses itérés appartiennent respectivement à l'espace des variables primales, duales ou le produit cartésien de ces deux espaces.
- ◇ **Type d'itérés.** Une méthode est dite *admissible* lorsque ses itérés sont admissibles, c'est-à-dire lorsqu'ils satisfont à la fois les contraintes d'égalité et de positivité. Dans le cas d'une méthode *non admissible*, on autorise les itérés à ne plus vérifier les contraintes d'égalité, tout s'assurant qu'ils satisfont toujours les contraintes de positivité.
- ◇ **Type d'algorithme.** C'est le point de différenciation principal entre les méthodes. Bien que les dénominations ne soient pas à l'heure actuelle totalement standardisées, on distinguera les méthodes de *suiti de chemin* (*path-following* algorithms), les méthodes dites de *mise à l'échelle affine* (*affine-scaling* algorithms) et les méthodes de *réduction de potentiel* (*potential reduction* algorithms). Les sections 3.1, 3.2 et 3.3 décriront ces trois types de méthodes avec plus de détail.
- ◇ **Type de pas.** Afin de garantir une complexité algorithmique de type polynomial, certains algorithmes sont forcés de prendre de très petits pas à chaque itération, ce qui conduit à un nombre d'itérations assez élevé lorsqu'on les applique à des problèmes pratiques¹⁰. Ces méthodes sont appelées méthodes à *pas courts* et présentent surtout un intérêt théorique. Par conséquent, des méthodes à *pas longs* ont été développées, permettant à chaque itération une mise à jour bien plus importante des variables, et constituent les seules méthodes véritablement utilisées en pratique.

Notre objectif n'est pas de fournir une liste exhaustive de toutes les méthodes qui ont été proposées à ce jour, mais plutôt de présenter quelques algorithmes représentatifs, en mettant en évidence les idées sous-jacentes.

3.1. Méthodes de suivi de chemin. Débutons avec la classe de méthodes la plus élégante : les méthodes de suivi de chemin. Comme le suggère leur dénomination, elles consistent à suivre le chemin central jusqu'à sa limite optimale. Il est assez naturel de proposer l'algorithme conceptuel suivant (nous préférons rester encore assez général à ce stade et ne précisons pas si notre méthode est primale, duale ou primale-duale)

Soit un itéré initial $v^{(0)}$ et une suite de mesures du dualité décroissant de façon monotone vers zéro : $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > 0$ et $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k = 0$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

En prenant $v^{(k)}$ comme point de départ, calculer $v^{(k+1)}$, le point du chemin central possédant une mesure du dualité égale à μ_{k+1} .

Fin

¹⁰Veillez noter que ceci n'est pas en contradiction avec le fait que le nombre d'itérations est borné de façon polynomiale par la taille du problème. Cela peut simplement signifier que les coefficients du polynôme sont élevés.

Il est clair que cette procédure conduit l'itéré $v^{(k)}$ à tendre vers le point limite du chemin central, qui est une solution optimale de notre problème.

Cependant, la détermination à chaque itération d'un point du chemin central via la méthode de Newton requiert en principe le calcul de la solution d'un problème de minimisation du type (P^μ) ou la résolution du système de conditions (KKT^μ) , ce qui demande potentiellement beaucoup de calculs. En effet, si on admet qu'une minimisation du type (P^μ) n'est pas fondamentalement différente de celle de notre problème de départ, et n'est pas conséquent pas beaucoup plus facile à effectuer, on conçoit aisément que la résolution à chaque itération d'un problème presque aussi compliqué que celui qu'on cherche à résoudre à l'origine n'est pas une solution viable.

C'est pourquoi les méthodes de suivi de chemin calculent en fait des itérés se situant *approximativement* sur le chemin central, économisant ainsi de nombreux calculs, et ne suivent donc que grossièrement le chemin central. Notre algorithme conceptuel devient alors

Soit un itéré initial $v^{(0)}$ et une suite de mesures de dualité décroissant de façon monotone vers zéro : $\mu_1 > \mu_2 > \mu_3 > \dots > 0$ et $\lim_{k \rightarrow 0} \mu_k = 0$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

En prenant $v^{(k)}$ comme point de départ, calculer $v^{(k+1)}$, une approximation du point du chemin central possédant une mesure de dualité égale à μ_{k+1} .

Fin

Il est clair que la tâche principale dans l'analyse de la convergence et de la complexité algorithmique de ces méthodes consiste à évaluer avec quelle précision on approche les cibles sur le chemin central (et donc à quelle distance on reste du chemin central).

3.1.1. *Méthodes de suivi de chemin primale-duale à pas courts.* Cet algorithme spécifique est une méthode primale-duale admissible, ce qui signifie que ses itérés appartiennent à l'ensemble $\mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$. Soit $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)})$ l'itéré de l'itération courante, avec sa mesure de dualité μ_k . Nous supposons également que cet itéré est *proche* du point $(x^{(\mu_k)}, y^{(\mu_k)}, s^{(\mu_k)})$ du chemin central. Pour calculer l'itéré suivant, on vise $(x^{(\mu_{k+1})}, y^{(\mu_{k+1})}, s^{(\mu_{k+1})})$, un point du chemin central avec un mesure de dualité plus petite μ_{k+1} (et donc plus proche de la limite optimale du chemin central). Les deux caractéristiques principales de la méthode à pas courts sont

- ◇ La mesure de dualité du point visé pour l'itéré suivant est définie par $\mu_{k+1} = \sigma \mu_k$ où σ est une constante strictement comprise entre 0 et 1.
- ◇ L'itéré suivant sera calculé en appliquant *une seule* itération de la méthode de Newton aux conditions primales-duales perturbées (KKT^μ) avec la valeur $\mu = \sigma \mu_k$ qui définit une cible sur le chemin central¹¹

$$(3.1) \quad \begin{cases} Ax = b \\ A^T y + s = c \\ x_i s_i = \sigma \mu_k \quad \forall i \end{cases} .$$

¹¹Notez bien que nous ignorons pour le moment les contraintes de positivité.

Formellement, nous avons introduit la méthode de Newton en tant qu'outil permettant de calculer les zéros d'une fonction F et non comme façon de résoudre un système d'équations. Définissons tout d'abord une fonction dont les zéros seront les solutions du système (3.1). En effet, en considérant

$$F^{(k)} : \mathbb{R}^{2n+m} \mapsto \mathbb{R}^{2n+m} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} Ax - b \\ A^T y + s - c \\ X^{(k)} S^{(k)} e - \sigma \mu_k e \end{pmatrix},$$

où e représente un vecteur dont toutes les composantes sont égales à 1 tandis que $X^{(k)}$ et $S^{(k)}$ sont des matrices carrées reprenant respectivement sur leur diagonale les vecteurs $x^{(k)}$ et $s^{(k)}$ (ces notations sont couramment utilisées dans le domaine des méthodes de point intérieur), on trouve alors que le pas préconisé par la méthode de Newton est solution du système d'équations linéaires suivant

$$(3.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -X^{(k)} S^{(k)} e + \sigma \mu_k e \end{pmatrix}.$$

On obtient donc l'algorithme suivant

Soit un itéré initial $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$ possédant une mesure de dualité μ_0 et une constante $0 < \sigma < 1$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas de Newton $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.2).

Poser $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + (\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ et $\mu_{k+1} = \sigma \mu_k$.

Fin

Esquissons à présent une preuve de la correction de cet algorithme. Afin que notre stratégie de suivi de chemin fonctionne, nous devons garantir que nos itérés $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)})$ restent suffisamment proches des points $(x^{(\mu_k)}, y^{(\mu_k)}, s^{(\mu_k)})$ situés sur le chemin central qui nous guide vers une solution optimale. À cet effet, définissons une quantité mesurant la proximité entre un itéré strictement admissible $(x, y, s) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$ et le point du chemin central $(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$. Puisque la propriété principale de ce point central (hormis son admissibilité) est $x_i s_i = \mu \forall i$, ou de manière équivalente¹² $xs = \mu e$, la quantité suivante (voir par exemple [25])

$$\delta(x, s, \mu) = \frac{1}{\mu} \|xs - \mu e\| = \left\| \frac{xs}{\mu} - e \right\|$$

semble adéquate : elle est égale à zéro si et seulement si (x, y, s) est égal à $(x^{(\mu)}, y^{(\mu)}, s^{(\mu)})$ et augmente au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ce point central. Il est également intéressant de constater que la taille du voisinage défini par $\delta(x, s, \mu) < R$ décroît avec μ en raison du facteur de tête $\frac{1}{\mu}$.

¹²On note ici xs le produit composante par composante des vecteurs x et s .

Une autre possibilité pour mesurer la proximité consiste à prendre

$$\delta(x, s, \mu) = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{\frac{xs}{\mu}} - \sqrt{\frac{\mu}{xs}} \right\|$$

où les racines carrées agissent sur les vecteurs composante par composante (voir [19]).

A l'aide de cette mesure de proximité, l'analyse de l'algorithme repose sur les étapes suivantes [19, 25]

- a. **Admissibilité stricte.** Prouver que l'admissibilité stricte est préservée par le pas de Newton : si $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$, alors $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$. Il faudra être particulièrement attentif aux contraintes de positivité, puisqu'elles ne sont a priori pas prises en compte par la méthode de Newton.
- b. **Mesure de dualité.** Prouver que la mesure de dualité visée est atteinte après le pas de Newton : si $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)})$ possède une mesure de dualité égale à μ_k , l'itéré suivant $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)})$ a une mesure de dualité égale à $\sigma\mu_k$.
- c. **Proximité.** Prouver que la proximité au chemin central est préservée : il existe une constante τ telle que si $\delta(x^{(k)}, s^{(k)}, \mu_k) < \tau$, on a $\delta(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}, \mu_{k+1}) < \tau$ après le pas de Newton.

En ajoutant une hypothèse initiale stipulant que $\delta(x^{(0)}, s^{(0)}, \mu_0) < \tau$, on peut alors démontrer que la suite des itérés produit par l'algorithme restera confinée dans le voisinage imposé du chemin central et convergera donc (approximativement) vers son point limite, qui est une solution optimale strictement complémentaire.

La dernière question délicate consiste à choisir une combinaison adéquate des constantes σ et τ permettant de démontrer les trois étapes ci-dessus. Dans le cas de la première mesure de proximité, on peut choisir (voir [25])

$$\sigma = 1 - \frac{0.4}{\sqrt{n}} \text{ et } \tau = 0.4 ,$$

où n dénote la taille des vecteurs x et s , tandis que pour la seconde mesure de dualité le choix suivant est acceptable (voir [19])

$$\sigma = 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}} \text{ et } \tau = \frac{1}{\sqrt{2}} .$$

Pour terminer cette description, nous spécifions le critère d'arrêt de la méthode. Étant donné un paramètre ε déterminant la précision requise, nous arrêtons l'algorithme lorsque le saut de dualité devient inférieur à ε , ce qui se produit dès que $n\mu_k < \varepsilon$. Ceci garantit que $c^T x$ et $b^T y$ approchent la véritable valeur optimale de la fonctions objectif avec une erreur inférieure à ε . Nous sommes à présent en mesure de formuler l'algorithme sous sa forme finale :

Soit un itéré initial $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$ possédant une mesure de dualité μ_0 , la précision requise ε et des constantes appropriées $0 < \sigma < 1$ et τ telles que $\delta(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) < \tau$.

Répéter for $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas de Newton $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.2).

Poser $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + (\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ et $\mu_{k+1} = \sigma \mu_k$.

Jusqu'à ce que $n\mu_{k+1} < \varepsilon$

En outre, il est possible de prouver qu'une solution de précision ε est atteinte après un nombre d'itérations N vérifiant

$$(3.3) \quad N = O\left(\sqrt{n} \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right).$$

Cette borne polynomiale sur le nombre d'itérations, qui varie comme la racine carrée de la taille du problème, est à ce jour la meilleure jamais atteinte pour la programmation linéaire.

Toutefois, il est important de réaliser que les valeurs de σ préconisées ci-dessus seront en pratique presque égales à un, ce qui conduira à une décroissance très lente des mesures de dualité et par conséquent à des pas de Newton relativement courts (d'où la dénomination de la méthode). Dès lors, bien que de complexité algorithmique polynomiale, cette méthode nécessite un grand nombre d'itérations et n'est pas la plus efficace d'un point de vue pratique.

3.1.2. *Méthode de suivi de chemin duale à pas courts.* Cette seconde méthode de suivi de chemin est très similaire à la précédente, mis à part le fait que ses itérés appartiennent cette fois au domaine admissible dual \mathcal{D}^+ . En gardant le principe général qui consiste à suivre le chemin central dual et à y viser les points $(y^{(\mu_k)}, s^{(\mu_k)})$, on effectue les adaptations suivantes¹³

- ◇ Il n'est plus possible de déduire le pas de la méthode de Newton des conditions (KKT $^\mu$), puisqu'elles font apparaître à la fois les variables primales et les variables duales. On utilise en remplacement un pas de la méthode de Newton appliquée à la minimisation du problème dual (D^μ) perturbé par la fonction barrière, ce qui conduit au système d'équations linéaires suivant, de taille $(n+m) \times (n+m)$

$$(3.4) \quad \begin{pmatrix} A^T & I \\ AS^{(k)-2}A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta y^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{b}{\sigma\mu_k} - AS^{(k)-1}e \end{pmatrix}.$$

- ◇ Il est également nécessaire de modifier la mesure de proximité employée : on définit à présent $\delta(s, \mu)$ selon [19]

$$\delta(s, \mu) = \min_x \{\delta(x, s, \mu) \mid Ax = b\} = \frac{1}{\mu} \min_x \{\|xs - \mu e\| \mid Ax = b\}$$

(cette mesure est nulle si et seulement si $s = s^{(\mu)}$).

Notre algorithme devient alors

¹³Il est bien sûr également possible de concevoir une méthode de suivi de chemin primale de façon complètement similaire.

Soit un itéré initial $(y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{D}^+$ possédant une mesure de dualité égale à μ_0 , la précision requise ε et des constantes appropriées $0 < \sigma < 1$ et τ telles que $\delta(y^{(0)}, s^{(0)}) < \tau$.

Répéter for $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas de Newton $(\Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.4).

Poser $(y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (y^{(k)}, s^{(k)}) + (\Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ et $\mu_{k+1} = \sigma \mu_k$.

Jusqu'à ce que $n\mu_{k+1} < \varepsilon$

Dans ce cas, on peut par exemple prendre

$$\sigma = 1 - \frac{1}{3\sqrt{n}} \text{ et } \tau = \frac{1}{\sqrt{2}},$$

ce qui conduit à la même borne (3.3) sur le nombre total d'itérations.

3.1.3. *Méthode de suivi de chemin primale-duale à pas longs.* La méthode de suivi de chemin que nous sommes sur le point de décrire tente de contourner la principale limitation des deux méthodes précédentes : la très petite taille de leurs pas. Comme on l'a fait remarquer plus haut, la raison fondamentale de leur progression très lente en pratique est la valeur de σ qu'il faut choisir presque égale à un afin d'être capable de prouver la complexité algorithmique polynomiale de la méthode.

Une façon d'accélérer la méthode consisterait simplement à décroître la mesure de dualité de façon plus agressive, c'est-à-dire en utilisant $\mu_{k+1} = \sigma \mu_k$ avec une valeur de σ plus petite. Cependant, cette modification d'apparence anodine détruit les bonnes propriétés des algorithmes à pas courts. En effet, si la cible sur le chemin central est trop éloignée de l'itéré courant, on constate que

- ◇ Le pas de Newton fourni par la résolution de (3.2) n'est plus nécessairement admissible, ce qui est facile à comprendre. On demande à la méthode de Newton de résoudre le système (KKT^μ) , composé de deux ensembles d'équations linéaires et d'un ensemble d'équations légèrement non linéaires. En raison de cette non linéarité, le système linéaire que nous résolvons n'est qu'une approximation locale du véritable système d'équations et par conséquent plus on s'éloigne de l'itéré courant, moins l'approximation est précise. Quant le point visé se trouve suffisamment loin, l'approximation linéaire devient si mauvaise que le terme barrière (non linéaire) ne joue plus son rôle et le pas de Newton quitte le domaine admissible en cessant de satisfaire les contraintes de positivité¹⁴ $x > 0$ et $s > 0$.

Puisque le respect des contraintes de positivité strictes est un des principes fondamentaux des méthodes de point intérieur, nous n'avons dans ce cas d'autre recours que d'appliquer un pas de Newton *partiel*, c'est-à-dire réduit via un facteur $\alpha_k < 1$ de façon à rester dans le domaine strictement admissible $\mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$:

$$(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha_k (\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)}).$$

¹⁴Notez que puisque les deux premières séries d'équations $Ax = b$ et $A^T y + s = c$ sont linéaires, elles sont automatiquement satisfaites après le pas de Newton.

- ◇ Cette réduction du pas de Newton détruit la propriété qui stipulait que la mesure de dualité de la cible visée sur le chemin central était toujours atteinte. On peut en fait montrer que la mesure de dualité après un pas de Newton partiel est égale à $(1 - \alpha_k(1 - \sigma))\mu_k$, qui varie de façon linéaire entre μ_k et $\sigma\mu_k$ lorsque α décroît depuis 1 jusqu'à 0.

Il n'existe malheureusement pas de moyen de contourner cette difficulté, et il faudra accepter le fait que les itérés n'atteignent pas la mesure de dualité visée, à moins que l'on puisse prendre un pas de Newton complet.

- ◇ Il n'est plus possible de garantir qu'un unique pas de Newton restaure la proximité au chemin central au sens de l'inégalité $\delta(x, s, \mu) < \tau$, pour les mêmes raisons que ci-dessus (non linéarité). Dans la stratégie à pas longs, on appliquera dès lors plusieurs pas de Newton visant la même mesure de dualité jusqu'à ce que la proximité au chemin central soit rétablie. Ce n'est qu'à ce moment qu'on peut choisir une autre cible et décroître μ .

Cette méthode à pas longs peut être décrite comme suit :

Soit un itéré initial $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$, une mesure de dualité initiale μ_0 , la précision requise ε et des constantes appropriées $0 < \sigma < 1$ et τ telles que $\delta(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) < \tau$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas de Newton $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.2).

Poser $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha_k(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ avec une longueur de pas α_k choisie de façon à ce que $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$.

Si $\delta(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}, \sigma\mu_k) < \tau$ **Alors** poser $\mu_{k+1} = \sigma\mu_k$ **Sinon** poser $\mu_{k+1} = \mu_k$.

Jusqu'à ce que $n\mu_{k+1} < \varepsilon$

Contrairement à ce qui était imposé par l'analyse de la complexité algorithmique des méthodes à pas courts, on peut ici choisir n'importe quelle valeur pour la constante σ , en particulier des valeurs très inférieures à 1. Ce sont les choix de τ et d' α_k qui rendent la méthode polynomiale. La difficulté principale de l'analyse consiste ici à évaluer le nombre d'itérations visant la même valeur de la mesure de dualité nécessaires au rétablissement de la proximité au chemin central. En prenant pour σ une constante indépendante de n (telle que .5, .1 ou .01), on peut montrer qu'un choix approprié des constantes τ et α_k conduit à un nombre d'itérations égal à (voir [25])

$$N = O\left(n \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right).$$

Ce résultat est passablement paradoxal : bien que cette méthode effectue des pas plus longs et soit plus efficace en pratique que les méthodes à pas courts, sa complexité algorithmique de pire cas est moins bonne que celle des méthodes à pas courts (3.3).

3.2. Méthodes de mise à l'échelle affine. La quantité impressionnante de recherches effectuées sur le thème des méthodes de point intérieur pour la programmation linéaire fut déclenchée par l'article pionnier de Karmarkar [12]. Sa méthode utilisait des transformations projectives et n'était pas décrite en termes de chemin central ou de méthode de Newton. Les méthodes de mise à l'échelle affine se basent sur des principes similaires, sans toutefois recourir à l'usage de ces transformations projectives (on a découvert, bien après l'explosion des recherches dans ce domaine, que ces méthodes avaient été proposées initialement par Dikin, un chercheur russe, près de 17 ans avant l'article de Karmarkar [6]).

Les méthodes de mise à l'échelle affine ne suivent pas explicitement le chemin central, et ne s'y réfèrent même pas. Le principe de base de ces méthodes est le suivant : considérons par exemple le problème primal (LP)

$$(LP) \quad \min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Ax = b, \\ x \geq 0. \end{cases}$$

Ce problème est difficile à résoudre à cause des contraintes de positivité, qui donnent au domaine admissible une forme polyédrale. Considérons l'itéré courant $x^{(k)}$ et remplaçons le domaine admissible polyédral par un ellipsoïde centré en $x^{(k)}$ qui lui soit inscrit. On va à présent minimiser la fonction objectif sur cet ellipsoïde, ce qui devrait être plus aisé que sur un polyèdre, et prendre le minimum obtenu comme itéré suivant.

Comment construire un ellipsoïde centré en $x^{(k)}$ et inscrit à l'intérieur du domaine admissible ? Soit une matrice diagonale strictement positive D . On montre aisément que le problème (P_D)

$$(P_D) \quad \min_{w \in \mathbb{R}^n} (Dc)^T w \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} ADw = b, \\ w \geq 0 \end{cases}$$

est équivalent à (LP), les variables x y étant simplement mises à l'échelle via l'équation $x = Dw$ (d'où la dénomination de la méthode). En choisissant la matrice diagonale particulière $D = X^{(k)}$, qui fait correspondre à l'itéré courant $x^{(k)}$ le vecteur e , on obtient le problème suivant

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} (X^{(k)}c)^T w \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} AX^{(k)}w = b, \\ w \geq 0. \end{cases}$$

On peut alors restreindre le domaine admissible défini par $w \geq 0$ à une boule de rayon 1 centrée en e , puisqu'on a l'inclusion $\{w \mid \|w - e\| \leq 1\} \subset \{w \mid w \geq 0\}$. Notre problème devient

$$\min_{w \in \mathbb{R}^n} (X^{(k)}c)^T w \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} AX^{(k)}w = b, \\ \|w - e\| \leq 1, \end{cases}$$

c'est-à-dire la minimisation d'une fonction objectif linéaire sur l'intersection d'une boule unité et d'un sous-espace défini par des contraintes linéaires. On peut montrer que la solution de ce problème peut se calculer aisément de façon analytique, via la résolution d'un système d'équations linéaires. Exprimé en fonction des variables d'origine x , ce problème

est équivalent à

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x \quad \text{tel que} \quad \begin{cases} Ax = b, \\ \|X^{(k)-1}x - e\| \leq 1, \end{cases}$$

dont le domaine admissible est un ellipsoïde centré en $x^{(k)}$. Cet ellipsoïde, appelé *ellipsoïde de Dikin*, est entièrement inclus à l'intérieur de \mathcal{P} . Le minimum sur cet ellipsoïde est donné par $x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$, où ¹⁵

$$(3.5) \quad \Delta x^{(k)} = -\frac{X^{(k)} P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c}{\|P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c\|}.$$

Puisque l'ellipsoïde appartient entièrement au domaine admissible, le pas $\Delta x^{(k)}$ est admissible et on peut raisonnablement supposer que l'itéré suivant $x^{(k)} + \Delta x^{(k)}$ sera plus proche de la solution optimale que $x^{(k)}$.

3.2.1. *Méthodes de mise à l'échelle affine à pas courts et à pas longs.* En introduisant une constante ρ destinée à réduire la taille du pas effectué, on peut décrire l'algorithme selon

Soit un itéré initial $x^{(0)} \in \mathcal{P}^+$ et une constante $0 < \rho < 1$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas issu de la mise à l'échelle affine $\Delta^{(k)}$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.5) et poser $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho \Delta^{(k)}$.

Fin

Cet algorithme est en fait la méthode de mise à l'échelle affine à pas court. La convergence vers une solution primale optimale a été prouvée lorsque $\rho = \frac{1}{8}$, mais on ne sait toujours pas à ce jour si sa complexité est de type polynomial¹⁶. Il est bien évidemment possible de concevoir une variante duale et même une variante primale-duale de cette méthode (il suffit de définir les ellipsoïdes de Dikin correspondants).

On peut également tenter de rendre l'algorithme plus efficace en prenant des pas plus longs, y compris en s'autorisant à sortir de l'ellipsoïde de Dikin. En gardant la même direction que dans le cas de la méthode à pas courts, le pas le plus long que l'on peut prendre sans quitter le domaine primal admissible est donné par

$$(3.6) \quad \Delta x^{(k)} = -\frac{X^{(k)} P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c}{\max [P_{AX^{(k)}} X^{(k)} c]},$$

où $\max[v]$ dénote la composante maximale du vecteur v , ce qui conduit à formuler l'algorithme suivant :

Soit un itéré initial $x^{(0)}$ et une constante $0 < \lambda < 1$.

Répéter for $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas issu de la mise à l'échelle affine $\Delta^{(k)}$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.6) et poser $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \lambda \Delta^{(k)}$.

¹⁵ P_Q est la matrice de projection sur $\text{Ker } Q = \{x \mid Qx = 0\}$, qui peut s'écrire $P_Q = I - Q^T(QQ^T)^{-1}Q$ lorsque la matrice Q est de plein rang.

¹⁶Si le problème donné vérifie certaines conditions de non-dégénérescence, on peut prouver la convergence pour toutes les valeurs de ρ satisfaisant $0 < \rho < 1$.

Fin

La constante λ détermine quelle fraction de la distance à la frontière du domaine admissible doit être parcourue.¹⁷ La convergence vers une solution optimale a été prouvée lorsque $0 < \lambda \leq 2/3$ mais, de façon assez surprenante, un contre-exemple a été découvert pour le cas $\lambda = 0.999$ (voir [15]). En définitive, comme pour la méthode de mise à l'échelle à pas courts, on ne sait pas à l'heure actuelle si cette méthode jouit d'une complexité algorithmique de type polynomial.

3.2.2. *Lien avec les méthodes de suivi de chemin.* Il existe un lien intéressant et peut-être inattendu entre les méthodes de mise à l'échelle affine et les algorithmes à suivi de chemin. Si on prend par exemple la définition (3.4) du pas de Newton pour la méthode de suivi de chemin duale à pas courts, et que l'on fait tendre σ vers zéro (ce qui revient à faire tendre la mesure de dualité visée vers zéro), la direction limite qui en résulte est précisément égale à celle préconisée par la méthode de mise à l'échelle affine duale ! Cette propriété surprenante, également valide pour les méthodes primales, nous permet de donner un autre éclairage à ces deux méthodes :

- ◇ Les méthodes de mise à l'échelle affine peut être vues comme une application de la méthode de Newton visant directement le point limite du chemin central, c'est-à-dire tentant d'atteindre la solution optimale directement sans suivre le chemin central. Cependant, comme mentionné plus haut, il est nécessaire de réduire le pas préconisé par le méthode de Newton afin de rester à l'intérieur du domaine admissible.
- ◇ En regardant (3.4), on voit qu'il est possible de décomposer le pas de Newton dual en deux parties:

$$\Delta x^{(k)} = \frac{1}{\sigma \mu_k} \Delta^a x^{(k)} + \Delta^c x^{(k)} ,$$

où

$$\begin{pmatrix} A^T & I \\ AS^{(k)-2}A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^a y^{(k)} \\ \Delta^a s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} A^T & I \\ AS^{(k)-2}A^T & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta^c y^{(k)} \\ \Delta^c s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -AS^{(k)-1}e \end{pmatrix} .$$

- $\Delta^a x^{(k)}$ est la composante de mise à l'échelle affine. C'est la direction préconisée par les méthodes de mise à l'échelle affine, avec pour seul l'objectif l'optimalité de l'itéré suivant.
- $\Delta^c x^{(k)}$ est la composante de centrage. On peut montrer qu'elle vise un point du chemin central possédant la même mesure de dualité que l'itéré courant, c'est-à-dire qu'elle tente uniquement d'améliorer la proximité vis-à-vis du chemin central.

En fait, on peut prouver a posteriori que la plupart des méthodes de point intérieur préconisent des pas résultant de la combinaison de ces deux directions de base.

¹⁷Cette constante doit être strictement inférieure à 1 puisqu'on désire rester à l'intérieur du domaine admissible.

3.3. Méthodes de réduction de potentiel. Plutôt que de viser une suite décroissante de mesures de dualité, la méthode de Karmarkar utilisait une *fonction potentiel* pour jauger la progression de ses itérés vers la solution optimale. L'objectif d'une fonction potentiel est d'évaluer le mérite d'un itéré, selon les critères suivants :

- ◇ Elle doit tendre vers $-\infty$ si et seulement si les itérés tendent vers l'optimalité.
- ◇ Elle doit tendre vers $+\infty$ lorsque les itérés tendent vers la frontière du domaine admissible sans simultanément s'approcher d'une solution optimale.¹⁸

L'objectif principal d'une méthode de réduction de potentiel est simplement de réduire la fonction potentiel d'une quantité fixée δ lors de chaque itération (d'où son nom). La convergence découle directement de la première propriété ci-dessus.

3.3.1. *Méthode de réduction de potentiel primale-duale.* Nous décrivons l'application de cette stratégie dans le cas primal dual. On définit la fonction potentiel de Tanabe-Todd-Ye sur le domaine strictement admissible primal-dual $\mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$ par

$$\Phi_\rho(x, s) = \rho \log x^T s - \sum_i \log x_i s_i,$$

où ρ est une constante strictement supérieure à n . On peut également l'écrire comme

$$\Phi_\rho(x, s) = (\rho - n) \log x^T s - \sum_i \log \frac{x_i s_i}{x^T s / n} + n \log n$$

et effectuer les observations suivantes

- ◇ Le premier terme fait tendre la fonction potentiel vers $-\infty$ lorsque (x, s) tendent vers l'optimalité, puisque dans ce cas le saut de dualité $x^T s$ tend vers 0.
- ◇ Les second terme mesure la *centralité* de l'itéré. Un itéré parfaitement centré verra tous ses produits $x_i s_i$ égaux à leur valeur moyenne $x^T s / n$, ce qui annulera ce second terme. Dès que ces produits deviennent différents (et s'écartent de leur valeur moyenne), ce terme augmente et peut même tendre vers $+\infty$ si l'un des produits $x_i s_i$ tend vers zéro sans que $x^T s$ tende également vers zéro (ce qui signifie exactement que l'on s'approche de la frontière du domaine admissible sans tendre vers une solution optimale).

La direction des pas que prend cette méthode n'est pas nouvelle : il s'agit de la même que celle de la méthode de suivi de chemin primale-duale, en visant une mesure de dualité égale à $n\mu_k/\rho$ (c'est-à-dire avec $\sigma = n/\rho$). Toutefois, dans le cas d'une méthode de réduction de potentiel, μ_k ne suivra pas une suite décroissante de valeurs prédéterminées, mais sera recalculé à chaque itération (puisque cet algorithme ne peut garantir que la mesure de dualité visée par le pas de Newton sera bien atteinte). On procède comme suit :

Soit un itéré initial $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$ possédant une mesure de dualité μ_0 et une constante $\rho > n$. Poser $\sigma = n/\rho$.

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

¹⁸On ne peut bien sûr pas simplement empêcher la méthode d'approcher la frontière du domaine admissible, puisque la solution optimale recherchée s'y trouve forcément.

Calculer le pas de Newton $(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ à l'aide du système d'équations linéaires (3.2).

Poser $(x^{(k+1)}, y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha_k(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)})$ où α_k est défini par

$$\alpha_k = \arg \min_{\alpha} \Phi_{\rho}(x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)}, s^{(k)} + \alpha \Delta s^{(k)})$$

tel que $(x^{(k)}, y^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha(\Delta x^{(k)}, \Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)}) \in \mathcal{P}^+ \times \mathcal{D}^+$.

Évaluer μ_{k+1} via $(x^{(k+1)})^T s^{(k+1)} / n$.

Jusqu'à ce que $n\mu_{k+1} < \varepsilon$

Le principe de cette méthode consiste donc à minimiser à chaque itération la fonction potentiel le long de la direction préconisée par la méthode de Newton. Le point clé dans l'analyse de sa complexité algorithmique réside dans la preuve que ce pas occasionnera à chaque itération une réduction de la fonction potentiel Φ_{ρ} au moins égale à une quantité fixée δ . En posant $\rho = n + \sqrt{n}$, on peut montrer que $\Phi_{\rho}(x^{(k+1)}, s^{(k+1)}) \leq \Phi_{\rho}(x^{(k)}, s^{(k)}) - \delta$ avec $\delta = 0.16$ (voir par exemple [3]), ce qui conduit à un nombre total d'itérations égal à

$$N = O\left(\sqrt{n} \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right),$$

ce qui fait jeu égal avec les meilleures méthodes de suivi de chemin.

Il est en général beaucoup trop coûteux pour un algorithme pratique de minimiser exactement la fonction potentiel le long de la direction de recherche, car Φ_{ρ} est une fonction hautement non linéaire. On utilise par conséquent l'une des stratégies suivantes

- ◇ Définir une approximation quadratique de Φ_{ρ} le long de la direction de recherche et prendre le point qui atteint son minimum comme itéré suivant.
- ◇ Parcourir un pourcentage fixé (par exemple 95%) du plus grand pas le long de la direction de recherche qui reste à l'intérieur du domaine admissible.

Notons toutefois qu'on ne peut continuer à garantir un complexité algorithmique polynomiale dans ce cas que si la condition de réduction fixée de la fonction potentiel reste satisfaite à chaque itération.

4. Améliorations

Les méthodes que nous avons décrites jusqu'à présent souffrent de certaines limitations (nécessité de connaître un point de départ admissible, nombre d'itérations potentiellement élevé en pratique) qui restreignent essentiellement leur utilisation à un contexte assez théorique. Nous présentons dans ce qui suit différentes améliorations facilitant leur implémentation et leur utilisation en pratique.

4.1. Méthodes non-admissibles. Les algorithmes présentés plus haut sont des méthodes admissibles, ce qui signifie qu'ils nécessitent un itéré de départ strictement admissible. Un tel point n'est malheureusement pas toujours aisément disponible :

- ◇ La formulation de certains problèmes ne permet pas d'obtenir directement une solution (strictement) admissible, et exhiber une telle solution peut s'avérer aussi difficile que de résoudre le problème d'optimisation en lui-même.
- ◇ Certains problèmes ne possèdent aucun point strictement admissible, bien qu'ils soient tout à fait valides et admettent des solutions optimales finies. Cette situation se produit en fait lorsque l'ensemble des solutions optimales n'est pas borné¹⁹.

Il existe deux stratégies permettant de traiter ces situations :

- ◇ Transformer le problème (généralement via l'ajout de contraintes et/ou de variables) de manière à lui faire admettre un point de départ strictement admissible aisément identifiable (ce qui sera présenté dans le paragraphe suivant).
- ◇ Modifier l'algorithme de façon à lui permettre de travailler avec des itérés n'appartenant pas au domaine admissible, ce qui permet d'obtenir une méthode non admissible.

Donnons à présent un aperçu de cette seconde option.

Rappelons que les itérés d'une méthode non admissible ne sont pas obligés de vérifier les contraintes d'égalité linéaires $Ax = b$ et $A^T y + s = c$ mais doivent toutefois rester positifs ($x > 0$ et $s > 0$). L'idée maîtresse pour convertir un algorithme admissible en méthode non admissible consiste à utiliser la méthode de Newton pour rendre les itérés progressivement admissibles au cours de la résolution. Cela revient en fait à modifier légèrement le système d'équations linéaires (3.2), qui devient

$$(4.1) \quad \begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y^{(k)} - s^{(k)} \\ b - Ax^{(k)} \\ -X^{(k)} S^{(k)} e + \sigma \mu_k e \end{pmatrix} .$$

La seule différence avec le système dans le cas admissible se trouve dans le vecteur du membre de droite, qui incorpore à présent les *résidus* primal $b - Ax^{(k)}$ et dual $c - (A^T y^{(k)} + s^{(k)})$. Les pas de la méthode de Newton tenteront alors de réduire simultanément la mesure de dualité de l'itéré courant et son écart par rapport à l'admissibilité.

Des variantes non admissibles ont été développées à la fois pour les méthodes de suivi de chemin et les méthodes de réduction de potentiel. Sans rentrer dans plus de détails, mentionnons qu'il est nécessaire d'inclure une contrainte supplémentaire sur le pas préconisé par la méthode afin de s'assurer que l'écart par rapport à l'admissibilité est réduit au moins au même rythme que la mesure de dualité (cela permet d'éviter que l'algorithme se termine avec une solution "optimale" du point de vue de la mesure de dualité mais non admissible). La complexité algorithmique de ces méthodes est généralement identique à celle de leurs contreparties admissibles, bien que leur analyse soit en général beaucoup plus ardue.

4.2. Technique du problème homogène auto-dual. Comme on l'a mentionné plus haut, une autre façon de pallier l'indisponibilité d'un itéré de départ strictement admissible consiste à modifier le problème de façon à lui faire admettre un point de départ strictement admissible aisément identifiable. La méthode des variables artificielles présentée au point

¹⁹C'est le cas par exemple lorsqu'une variable non bornée par les contraintes n'est pas présente dans la fonction objectif.

?? est un exemple d'application de cette technique. Nous présentons ici une seconde stratégie plus spécifique aux méthodes de point intérieur. Choisissons un itéré de départ arbitraire $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)})$ tel que $x^{(0)} > 0$ et $s^{(0)} > 0$ et définissons les quantités suivantes

$$\begin{aligned}\hat{b} &= b - Ax^{(0)} \\ \hat{c} &= c - A^T y^{(0)} - s^{(0)} \\ \hat{g} &= b^T y^{(0)} - c^T x^{(0)} - 1 \\ \hat{h} &= x^{(0)T} s^{(0)} + 1.\end{aligned}$$

On considère à présent le problème suivant, initialement présenté dans [27]

$$\begin{array}{llllllll} \min & & & & \hat{h} \theta & & & \\ \text{s.t.} & & Ax & -b\tau & +\hat{b}\theta & & & = 0 \\ \text{(HSD)} & -A^T y & & +c\tau & -\hat{c}\theta & -s & & = 0 \\ & b^T y & -c^T x & & -\hat{g}\theta & & -\kappa & = 0 \\ & -\hat{b}^T y & +\hat{c}^T x & +\hat{g}\tau & & & & = -\hat{h} \\ & & x \geq 0 & \tau \geq 0 & & s \geq 0 & \kappa \geq 0 & \end{array}.$$

Il n'est pas difficile de trouver un point de départ strictement admissible pour ce problème. En fait, on vérifie aisément que la point $(x, y, s, \tau, \kappa, \theta) = (x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)}, 1, 1, 1)$ est un choix possible. Sans rentrer dans les détails, on peut donner une brève description des nouvelles variables introduites dans le problème (HSD) : τ est une variable d'homogénéisation, θ mesure l'écart par rapport à l'admissibilité et κ renvoie au saut de dualité du problème d'origine. Signalons encore que les deux premières conditions correspondent aux contraintes linéaires $Ax = b$ et $A^T y + s = c$. Ce problème possède les caractéristiques suivantes (voir [27]):

- ◇ Ce problème est homogène, c'est-à-dire que son membre de droite est égale au vecteur nul (exception faite de sa dernière composante, nécessaire à la dernière égalité qui est une contrainte d'homogénéisation).
- ◇ Ce problème est auto-dual, ce qui signifie que son dual lui est identique (c'est dû au fait que la matrices des coefficients est antisymétrique).
- ◇ La valeur optimale du problème (HSD) est égale à 0 (ce qui signifie $\theta^* = 0$).
- ◇ Étant donné une solution optimale au problème (HSD) strictement complémentaire $(x^*, y^*, s^*, \tau^*, \kappa^*, 0)$, on a soit $\tau^* > 0$, soit $\kappa^* > 0$.
 - Si $\tau^* > 0$, alors $(x^*/\tau^*, y^*/\tau^*, s^*/\tau^*)$ est une solution optimale du problème d'origine.
 - Si $\kappa^* > 0$, alors le problème d'origine ne possède pas de solution optimale finie. De plus, on a dans ce cas $b^T y^* - c^T x^* > 0$ et
 - * Lorsque $b^T y^* > 0$, le problème primal (LP) n'admet aucune solution admissible.
 - * Lorsque $-c^T x^* > 0$, le problème dual (LD) n'admet aucune solution admissible.

Puisque nous connaissons un point de départ strictement admissible pour ce problème, nous pouvons lui appliquer une méthode de suivi de chemin admissible qui convergera vers une solution optimale strictement complémentaire. A l'aide des propriétés mentionnées ci-dessus, il est alors toujours possible de calculer une solution optimale du problème d'origine ou de détecter l'absence de solution admissible.

Les dimensions du problème homogène auto-dual sont approximativement le double de celles du problème d'origine, ce qui peut être vu comme un inconvénient en pratique. Cependant, il est possible de tirer parti de la propriété d'auto-dualité et d'utiliser certaines techniques d'algèbre linéaire afin de résoudre ce problème à un coût presque identique à celui du problème d'origine.

4.3. Différences entre algorithme théorique et implémentation. Nous avons déjà observé qu'une complexité algorithmique de type polynomial n'est pas nécessairement une garantie d'un bon comportement en pratique. Les méthodes à pas courts sont irrémédiablement trop lentes en raison de l'infime réduction de la mesure de dualité qu'elles préconisent à chaque itération. Les méthodes à pas longs sont plus performantes mais restent relativement lentes. C'est la raison pour laquelle les praticiens ont examiné différentes adaptations destinées à accélérer le comportement pratique de ces algorithmes. Il est important de réaliser que les résultats de complexité algorithmique que nous avons mentionnés jusqu'à présent ne s'appliquent pas à ces méthodes modifiées, puisqu'elles ne suivent plus fidèlement la théorie.

La méthode de suivi de chemin primale-duale non admissible est de loin l'algorithme de point intérieur le plus couramment implémenté. On lui apporte généralement les modifications suivantes :

- ◇ La méthode théorique à pas longs nécessitent plusieurs pas de Newton visant la même mesure de dualité pour rétablir la proximité au chemin central. Les algorithmes pratiques ignorent cette considération et, à la manière des méthodes à pas courts, n'effectuent qu'un seul pas de Newton.
- ◇ Au lieu de choisir la longueur de pas recommandée par la théorie, les algorithmes pratiques considèrent généralement une large fraction du plus grand pas restant à l'intérieur du domaine admissible (on utilise couramment des valeurs telles que 99.5% ou 99.9% du pas maximal). Cette modification est particulièrement efficace dans le cas des méthodes primales-duales.
- ◇ On utilise des longueurs de pas différentes pour les itérés primaux et duaux, c'est-à-dire que l'on prend

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \alpha^P \Delta x^{(k)} \text{ et } (y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (y^{(k)}, s^{(k)}) + \alpha^D (\Delta y^{(k)}, \Delta s^{(k)}) .$$

Ces pas sont choisis conformément à la remarque précédente, par exemple selon $(\alpha^P, \alpha^D) = 0.995 (\alpha_{\max}^P, \alpha_{\max}^D)$. Cette modification est souvent responsable à elle seule d'une réduction substantielle du nombre total d'itérations, sans que ce comportement soit à l'heure actuelle justifié par la théorie.

4.4. L'algorithme prédicteur-correcteur de Mehrotra. La description des méthodes qui a été faite dans la section précédente a souligné le fait que la constante σ , responsable

du choix de la mesure de dualité $\sigma\mu_k$ visée pour l'itéré suivant, joue un rôle très important dans la détermination de l'efficacité de l'algorithme :

- ◇ Choisir σ proche de 1 permet d'employer un pas de Newton complet, mais ce pas est souvent très court et ne réalise que peu de progrès vers la solution optimale. Cependant, il présente l'avantage d'augmenter la proximité vis-à-vis du chemin central.
- ◇ Choisir une valeur plus faible de σ résulte souvent dans un pas de Newton plus grand autorisant une progression plus conséquente vers la solution optimale, mais ce pas conduit généralement hors du domaine admissible et doit être réduit. De plus, ce type de pas tend généralement à éloigner les itérés du chemin central.

On comprend alors que le choix de la meilleure valeur possible de σ puisse dépendre de l'itéré courant : petite si une cible éloignée est facile à atteindre, grande dans le cas contraire. En se basant sur ces considérations, Mehrotra a conçu un choix heuristique de σ très efficace : l'algorithme prédicteur-correcteur [16].

Cet algorithme commence par calculer un pas *prédicteur* $(\Delta x^{(k)a}, \Delta y^{(k)a}, \Delta s^{(k)a})$ obtenu en résolvant le système (4.1) pour $\sigma = 0$, en visant donc directement la limite optimale du chemin central. On calcule alors séparément les longueurs de pas maximales pour le primal et le dual, selon

$$\begin{aligned}\alpha_k^{a,P} &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)a} \geq 0 \} , \\ \alpha_k^{a,D} &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid s^{(k)} + \alpha \Delta s^{(k)a} \geq 0 \} .\end{aligned}$$

Enfin, on évalue la mesure de dualité de l'itéré ainsi obtenu à l'aide de

$$\mu_{k+1}^a = \frac{(x^{(k)} + \alpha_k^{a,P} \Delta x^{(k)a})^T (\alpha_k^{a,D} \Delta s^{(k)a})}{n} .$$

Cette quantité mesure la facilité avec laquelle on peut progresser vers l'optimalité : si elle est très inférieure à la mesure de dualité actuelle μ_k , on pourra choisir une petite valeur de σ et espérer progresser de façon notable vers l'optimum, tandis que si elle n'est que légèrement inférieure à μ_k , il faut être plus prudent et choisir une valeur de σ plus proche de 1, de façon à se rapprocher du chemin central avec l'espoir de se retrouver en meilleure posture pour une grande réduction de la mesure de dualité lors de l'itération *suivante*. Mehrotra suggère l'heuristique suivante, qui s'est révélée très efficace en pratique

$$\sigma = \left(\frac{\mu_{k+1}^a}{\mu_k} \right)^3 .$$

On peut alors calculer le pas *correcteur* $(\Delta x^{(k)c}, \Delta y^{(k)c}, \Delta s^{(k)c})$ calculé avec cette valeur de σ et prendre séparément pour le primal et le dual les pas maximaux restant à l'intérieur du domaine admissible.

On peut encore légèrement améliorer cet algorithme en faisant l'observation suivante : après un pas prédicteur complet, les produits $x_i s_i$ deviennent $(x_i + \Delta x_i^a)(s_i + \Delta s_i^a)$, quantités qui sont en fait égales à $\Delta x_i^a \Delta s_i^a$. Puisque ce pas de Newton tentait de rendre le produit $x_i s_i$ égal à zéro, le produit réellement obtenu $\Delta x_i^a \Delta s_i^a$ mesure en quelque sorte

l'erreur commise par la méthode de Newton due à la non linéarité des équations que l'on essaie de résoudre. On peut dès lors incorporer ce terme d'erreur dans le calcul du pas correcteur, à l'aide de la modification suivante du membre de droite dans (4.1)

$$(4.2) \quad \begin{pmatrix} 0 & A^T & I \\ A & 0 & 0 \\ S^{(k)} & 0 & X^{(k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \\ \Delta s^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y^{(k)} - s^{(k)} \\ b - Ax^{(k)} \\ -X^{(k)} S^{(k)} e - \Delta X_k^a \Delta S_k^a e + \sigma \mu_k e \end{pmatrix}.$$

Cette stratégie consistant à calculer un pas en tenant compte des résultats d'une prédiction du premier ordre résulte en une méthode du second ordre. L'algorithme complet s'écrit alors :

Soit un itéré initial $(x^{(0)}, y^{(0)}, s^{(0)})$ possédant une mesure de dualité μ_0 telle que $x^{(0)} > 0$ et $s^{(0)} > 0$, la précision requise ε et une constante $\rho < 1$ (par exemple 0.995 ou 0.999).

Répéter pour $k = 0, 1, 2, \dots$

Calculer le pas de Newton prédicteur $(\Delta x^{(k)a}, \Delta y^{(k)a}, \Delta s^{(k)a})$ à l'aide du système d'équations linéaires (4.1) et $\sigma = 0$.

Calculer les longueurs de pas maximales et la mesure de dualité qui en résulte selon

$$\begin{aligned} \alpha_k^{a,P} &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)a} \geq 0 \} , \\ \alpha_k^{a,D} &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid s^{(k)} + \alpha \Delta s^{(k)a} \geq 0 \} , \\ \mu_{k+1}^a &= \frac{1}{n} (x^{(k)} + \alpha_k^{a,P} \Delta x^{(k)a})^T (s^{(k)} + \alpha_k^{a,D} \Delta s^{(k)a}) . \end{aligned}$$

Calculer le pas de Newton correcteur $(\Delta x^{(k)c}, \Delta y^{(k)c}, \Delta s^{(k)c})$ à l'aide du système d'équations linéaires modifié (4.2) et $\sigma = (\mu_{k+1}^a / \mu_k)^3$.

Calculer les longueurs de pas maximales selon

$$\begin{aligned} \alpha_k^P &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid x^{(k)} + \alpha \Delta x^{(k)c} \geq 0 \} , \\ \alpha_k^D &= \arg \max \{ \alpha \in [0, 1] \mid s^{(k)} + \alpha \Delta s^{(k)c} \geq 0 \} . \end{aligned}$$

Poser $x^{(k+1)} = x^{(k)} + \rho \alpha_k^P \Delta x^{(k)c}$ et $(y^{(k+1)}, s^{(k+1)}) = (y^{(k)}, s^{(k)}) + \rho \alpha_k^D (\Delta y^{(k)c}, \Delta s^{(k)c})$.

Évaluer μ_{k+1} via $(x^{(k+1)})^T s^{(k+1)} / n$.

Jusqu'à ce que $n\mu_{k+1} < \varepsilon$

Il est crucial de réaliser que le pas prédicteur n'est utilisé que pour choisir σ et déterminer le membre de droite dans (4.2) et n'est donc pas appliqué à l'itéré courant. Ceci a une conséquence importante sur les calculs effectués par l'algorithme, car la détermination du pas prédicteur *et* du pas correcteur se fait à partir du même itéré courant, ce qui implique que les matrices des systèmes linéaires (4.2) et (4.1) sont identiques, seuls les vecteurs des membres de droite diffèrent. Comme on le verra plus loin, la résolution du second système pourra réutiliser la factorisation de la matrice utilisée pour le pas prédicteur et ne nécessitera qu'une opération de substitution peu coûteuse en temps de calcul. Cette caractéristique est en partie responsable de la grande efficacité de l'algorithme de Mehrotra

: une heuristique ingénieuse pour réduire la mesure de dualité en augmentant très peu le temps de calcul.

5. Implémentation

Nous présentons ici certains faits importants concernant l'implémentation des méthodes de point intérieur.

5.1. Algèbre linéaire. Il est essentiel de réaliser que la résolution du système d'équations linéaires définissant le pas de Newton consomme la majeure partie de temps de calcul des méthodes de point intérieur (certains auteurs rapportent de 80 à 90% du temps de calcul total). Son implémentation doit par conséquent être réalisée avec beaucoup de soin. Les équations (4.1) ne sont généralement pas résolues directement telles quelles : on effectue successivement le pivotage des variables Δs (où on a défini $D^{(k)2} = S^{(k)-1}X^{(k)}$)

$$(5.1) \quad \begin{pmatrix} -D^{(k)-2} & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x^{(k)} \\ \Delta y^{(k)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c - A^T y^{(k)} - \sigma \mu_k X^{(k)-1} e \\ b - Ax^{(k)} \end{pmatrix}$$

$$(5.2) \quad \Delta s^{(k)} = -s^{(k)} + \sigma \mu_k X^{(k)-1} e - D^{(k)-2} \Delta x^{(k)},$$

puis celui des variables Δx , pour obtenir le système

$$(5.3) \quad AD^{(k)2}A^T \Delta y^{(k)} = b - A(x^{(k)} - D^{(k)2}c + D^{(k)2}A^T y^{(k)} + \sigma \mu_k S^{(k)-1}e)$$

$$(5.4) \quad \Delta s^{(k)} = c - A^T y^{(k)} - s^{(k)} - A^T \Delta y^{(k)}$$

$$(5.5) \quad \Delta x^{(k)} = -x^{(k)} + \sigma \mu_k S^{(k)-1}e - D^{(k)2} \Delta s^{(k)}.$$

Le système d'équations linéaires (5.1) est appelé système *augmenté* : il est symétrique et peut se résoudre à l'aide d'une factorisation de Bunch-Partlett. Toutefois, la façon la plus courante de calculer le pas de Newton consiste à résoudre le système (5.3) (aussi connu sous le nom d'équations *normales*) à l'aide d'une factorisation de Cholevsky, en tirant parti du fait que la matrice $AD^{(k)2}A^T$ est définie positive (voir la discussion dans [1]). A ce stade, il est important de noter que la plupart des problèmes rencontrés en pratique ne comportent que peu d'éléments non nuls dans la matrice A . Il est par conséquent crucial d'exploiter le caractère *creux* de cette matrice afin de réduire à la fois les temps de calcul et la capacité de stockage mémoire requise. De façon plus spécifique, il s'agit d'identifier une permutation des lignes et des colonnes de la matrice $AD^{(k)2}A^T$ menant à un facteur de Cholevsky le plus creux possible²⁰. Pour un problème donné, cette permutation ne doit cependant être calculée qu'une fois pour toutes, puisque la disposition des éléments non nuls de la matrice $AD^{(k)2}A^T$ est la même pour chaque itération.

Mentionnons également que la complexité algorithmique associée à la résolution de ce système linéaire est de $\mathcal{O}(n^3)$ opérations arithmétiques élémentaires, ce qui donne aux

²⁰Malheureusement, le problème consistant à trouver la permutation optimale est \mathcal{NP} -difficile, ce qui a conduit au développement de nombreuses heuristiques, telle que celle du degré minimum (*minimum degree*) ou du remplissage local minimum (*minimum local fill-in*).

meilleures méthodes de point intérieur une complexité algorithmique totale égale à

$$\mathcal{O}\left(n^{3.5} \log \frac{n\mu_0}{\varepsilon}\right)$$

opérations arithmétiques élémentaires ²¹.

5.2. Prétraitement. Dans la plupart des cas, les problèmes de programmation linéaire que l'on cherche à résoudre ne sont pas formulés sous la forme standard (1.2). La première tâche d'un logiciel de résolution consiste donc à convertir le problème qui lui est fourni, en lui ajoutant des variables et des contraintes :

- ◇ Les contraintes d'inégalité peuvent être transformées en contraintes d'égalité à l'aide d'une variable d'écart : $a_i^T x \geq b \Leftrightarrow a_i^T x - s = b$ avec $s \geq 0$.
- ◇ Une variable libre peut être décomposée en deux variables positives : $x = x^+ - x^-$ avec $x^+ \geq 0$ et $x^- \geq 0$. Toutefois, cette procédure présente certains inconvénients dans le cas de la résolution par une méthode de point intérieur²² de telle manière qu'en pratique, les logiciels de résolution utilisent plutôt une modification de leur algorithme permettant de traiter directement les variables libres.
- ◇ Les bornes inférieures $l \leq x$ (et supérieures $x \leq u$) sont traitées à l'aide d'une translation $x = l + x'$ (et $x = u - x'$) avec $x' \geq 0$.
- ◇ Une variable présentant à la fois une borne inférieure et une borne supérieure $l \leq x \leq u$ pourrait être traitée à l'aide d'une variable d'écart, mais les logiciels de résolution sont souvent basés sur une variante de la forme standard qui tient directement compte de ce genre de contraintes.

Après cette conversion initiale, il n'est pas rare qu'une série de transformations simples permette de réduire fortement la taille du problème (cela peut être également le cas si le programme linéaire considéré a été obtenu automatiquement via l'utilisation d'un langage de modélisation)

- ◇ Une ligne ou une colonne entièrement nulle dans la matrice des coefficients est soit redondante, soit rend le problème insoluble.
- ◇ Une contrainte d'égalité ne faisant intervenir qu'une seule variable peut être ôtée de la formulation et utilisée pour fixer la valeur de cette variable.
- ◇ Une contrainte d'égalité faisant intervenir exactement deux variables peut être utilisée pour éliminer une de ces deux variables par substitution.
- ◇ Deux lignes identiques sont soit redondantes (l'une d'entre elles peut être retirée), soit inconsistantes (et rendent le problème insoluble).
- ◇ Certaines contraintes peuvent permettre le calcul de bornes inférieures ou supérieures sur certaines variables. Ces bornes peuvent améliorer des bornes existantes, détecter des contraintes redondantes ou diagnostiquer un problème insoluble.

²¹Une technique relativement sophistiquée basée sur la mise à jour partielle de la matrice $AD^{(k)2}A^T$ des équations normales permet de réduire encore cette complexité totale à $\mathcal{O}(n^3)$ opérations.

²² Cette transformation rend l'ensemble des solutions optimales non borné et entraîne l'absence de solutions primales-duales strictement admissibles.

Tous les logiciels de résolution appliquent ces règles (et d'autres) de façon répétée avant de commencer à résoudre un problème.

5.3. Itéré de départ et critère d'arrêt. La question de l'identification d'un point de départ approprié a été traitée via la technique du problème homogène auto-dual et les méthodes non admissibles. Dans ces deux cas, n'importe quel itéré vérifiant $x^{(0)} > 0$ et $s^{(0)} > 0$ peut être choisi comme point de départ. Cependant, l'efficacité des algorithmes peut être grandement influencée par ce choix.

Bien qu'elle ne repose pas sur une analyse théorique, l'heuristique suivante est souvent utilisée pour fournir un point de départ. On résout d'abord

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} c^T x + \frac{\omega}{2} x^T x \quad \text{tel que} \quad Ax = b \quad \text{et} \quad \min_{(y,s) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n} b^T y + \frac{\omega}{2} s^T s \quad \text{tel que} \quad A^T y + s = c.$$

Ces problèmes quadratiques convexes peuvent être résolus analytiquement avec un temps de calcul comparable à celui d'une itération d'une méthode de point intérieur. Les éléments négatifs des vecteurs x et s obtenus sont ensuite remplacés par une petite constante positive pour fournir $x^{(0)}$ et $(y^{(0)}, s^{(0)})$.

Comme on l'a mentionné plus haut, une petite valeur prédéterminée ε_g du saut de dualité constitue habituellement le critère d'arrêt pour les méthodes de point intérieur. Dans le cas d'une méthode non admissible, les écarts primal et dual par rapport à l'admissibilité doivent également être pris en compte, et on exige également qu'ils descendent sous une valeur prédéfinie ε_i . On peut par exemple utiliser les conditions suivantes

$$\frac{\|Ax - b\|}{\|b\| + 1} < \varepsilon_i, \quad \frac{\|A^T y + s - c\|}{\|c\| + 1} < \varepsilon_i, \quad \frac{\|c^T x - b^T y\|}{\|c^T x\| + 1} < \varepsilon_g.$$

Le rôle des dénominateurs est de permettre une mesure relative de la précision obtenue, tandis que l'ajout de la constante +1 permet d'éviter une éventuelle division par zéro. Enfin, signalons que lorsqu'on applique une méthode non admissible à un problème ne possédant pas de solution admissible, on observe une divergence des itérés (leur norme tend vers l'infini). Les logiciels de résolution sont capables de détecter ce comportement, ce qui leur permet de diagnostiquer un problème insoluble.

6. Remarques finales

La théorie des méthodes de point intérieur est à présent bien établie ; plusieurs ouvrages de référence ont été publiés sur le sujet (voir par exemple [25, 19, 26]). D'un point de vue pratique, ces méthodes sont compétitives avec les meilleures implémentations de l'algorithme simplexe, en particulier pour les problèmes de grande taille.

Toutefois, certaines questions n'ont pas encore trouvé de réponse satisfaisante, comme la justification des nombreuses différences existant entre les algorithmes théoriques et ceux qui sont réellement implémentés, ou le fait que le nombre d'itérations que l'on observe en pratique lors de la résolution de problèmes semble presque indépendant de la taille du problème considéré, ce qui est en contradiction avec la borne théorique en \sqrt{n} .

Pour conclure, mentionnons le fait que, contrairement à l'algorithme simplexe, la plupart des méthodes de point intérieur peuvent être adaptées à la résolution de certains problèmes de programmation non linéaire. Mentionnons les deux domaines suivants :

- ◇ La *programmation semidéfinie* est une généralisation prometteuse de la programmation linéaire où la contrainte de positivité sur le vecteur des variables $x \geq 0$ est remplacée par une contrainte stipulant qu'une matrice symétrique de variables X est semidéfinie positive. Ce type de problème admet de nombreuses applications dans des domaines tels que l'automatique et le contrôle de systèmes, l'optimisation des structures, l'optimisation combinatoire (citons la borne de Goemans et Williamson garantissant la qualité de la relaxation semidéfinie du problème MAXCUT [9]), etc. (voir [23] pour un aperçu). Les méthodes que nous avons présentées peuvent être adaptées au cas de la programmation semidéfinie avec relativement peu d'efforts et plusieurs logiciels de résolution permettent de résoudre ces problèmes efficacement en pratique.
- ◇ Nesterov et Nemirovski présentent dans la monographie [17] une théorie complète décrivant une classe de méthodes de point intérieur applicables à l'ensemble des problèmes d'optimisation *convexes*. Ils démontrent le caractère polynomial de la complexité algorithmique de ces algorithmes et font le lien entre leur efficacité et l'existence d'un certain type de fonction barrière appelé fonction barrière *auto-concordante*.

CHAPITRE 5

Méthodes de point intérieur pour l'optimisation convexe

Cf. transparents sur icampus.

1. Principe des méthodes de point intérieur
2. Barrières auto-concordantes
3. Complexité algorithmique polynomiale
4. Algorithmes de type primal-dual

Optimisation non-linéaire

Cf. transparents sur icampus.

1. Optimisation sans contraintes

1.1. Conditions d'optimalité et minima.

1.2. Méthodes de recherche en ligne.

1.3. Méthodes de région de confiance.

2. Optimisation avec contraintes

2.1. Conditions d'optimalité.

2.2. Aperçu des méthodes.

2.3. Méthode de Nelder-Mead. Enfin, pour conclure, nous présentons la méthode du simplexe de Nelder-Mead applicable à un problème d'optimisation non linéaire sans contraintes (à ne pas confondre avec l'algorithme du simplexe pour l'optimisation linéaire, dû à Dantzig). Cette méthode ne dispose que de peu de propriétés théoriques (sa convergence n'est même pas assurée, à part dans quelques situations). Toutefois, cette méthode présente deux avantages : d'une part, elle ne nécessite pratiquement aucune information sur la fonction objectif à optimiser (pas besoin de connaître son gradient/sa matrice hessienne ou d'être différentiable), mais simplement la possibilité de pouvoir l'évaluer en différents points ; d'autre part, elle présente assez souvent des performances satisfaisantes en pratique (surtout pour des problèmes impliquant un petit nombre de variables et lorsqu'on est plus intéressé par une amélioration de la fonction objectif que par la recherche exacte de l'optimum).

Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ de n variables à minimiser. Cette méthode utilise la notion de simplexe dans \mathbb{R}^n , qui n'est autre qu'un ensemble de $n + 1$ points de \mathbb{R}^n (par exemple, pour $n = 2$, les sommets d'un triangle (éventuellement dégénéré) forment un simplexe). Après avoir choisi arbitrairement un simplexe de départ $\Delta^{(0)}$ (en choisissant simplement $n + 1$ points dans \mathbb{R}^n , aléatoirement ou en utilisant les informations disponibles sur le problème modélisé), la méthode met à jour ce simplexe à chaque itération à l'aide d'un ensemble de règles assez simples.

Pour fixer les idées, on suppose que le simplexe $\Delta^{(k)}$ à l'itération k consiste en les points $x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \dots, x_{n+1}^{(k)}$. Si on note $f_i^{(k)}$ la valeur de la fonction objectif au point $x_i^{(k)}$, on

supposera en outre que les points $x_i^{(k)}$ sont ordonnées par valeurs croissantes de la fonction objectif, c'est-à-dire $f_1^{(k)} \leq f_2^{(k)} \leq \dots, f_{n+1}^{(k)}$ ($x_1^{(k)}$ est donc le meilleur point disponible).

La méthode utilise quatre paramètres : ρ (coefficient de réflexion), χ (coefficient d'expansion), γ (coefficient de contraction) et σ (coefficient de rétrécissement), choisis de façon à satisfaire

$$\rho > 0, \chi > 1, \chi > \rho, 0 < \gamma < 1 \text{ et } 0 < \sigma < 1$$

Le choix le plus populaire en pratique consiste à prendre

$$\rho = 1, \chi = 2, \gamma = \frac{1}{2} \text{ et } \sigma = \frac{1}{2}$$

Plaçons-nous à l'itération k , étant donné le simplexe actuel $\Delta^{(k)}$, il s'agit de déterminer le simplexe suivant $\Delta^{(k+1)}$ ($\neq \Delta^{(k)}$). Afin d'alléger les notations, on omettra l'exposant (k) dans ce qui suit.

Appelons \bar{x} le point $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$ (il s'agit donc du centre de gravité des n meilleurs sommets du simplexe).

a. Réflexion. Calculer le point de réflexion x_r selon

$$x_r = \bar{x} + \rho(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho)\bar{x} - \rho x_{n+1}$$

et la valeur $f_r = f(x_r)$. Si $f_1 \leq f_r < f_n$, on *accepte* le point réfléchi et on termine l'itération.

Accepter un point signifie faire entrer ce point dans le simplexe et en retirer le plus mauvais, c'est-à-dire x_{n+1} (après quoi il faut réordonner les points en ordre croissant).

b. Expansion. Si $f_r < f_1$, calculer le point d'expansion x_e selon

$$x_e = \bar{x} + \chi(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \rho\chi(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\chi)\bar{x} - \rho\chi x_{n+1}$$

et la valeur $f_e = f(x_e)$. Si $f_e < f_r$, accepter x_e , sinon accepter x_r , et terminer l'itération.

c. Contraction. On se trouve forcément dans le cas $f_r \geq f_n$. On va effectuer une contraction entre \bar{x} et le meilleur des points x_{n+1} et x_r . Plus spécifiquement :

(a) Si $f_n \leq f_r < f_{n+1}$ (c'est-à-dire si x_r est strictement meilleur que x_{n+1}), effectuer une contraction extérieure : on calcule

$$x_c = \bar{x} + \gamma(x_r - \bar{x}) = \bar{x} + \gamma\rho(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 + \rho\gamma)\bar{x} - \rho\gamma x_{n+1}$$

et la valeur $f_c = f(x_c)$. Si $f_c \leq f_r$, on accepte x_c et on termine l'itération, sinon on passe directement à la dernière étape (rétrécissement).

(b) Si $f_r \geq f_{n+1}$, effectuer une contraction intérieure : on calcule

$$x_{cc} = \bar{x} - \gamma(\bar{x} - x_{n+1}) = (1 - \gamma)\bar{x} + \gamma x_{n+1}$$

et la valeur $f_{cc} = f(x_{cc})$. Si $f_{cc} < f_{n+1}$, accepter le point x_{cc} et terminer l'itération, sinon passer à l'étape suivante (rétrécissement).

d. Rétrécissement (en d'autres termes : le dernier recours). Evaluer f aux points $v_i = x_1 + \sigma(x_i - x_1)$ pour $i = 2, 3, \dots, n+1$. Le nouveau simplexe sera constitué des points $x_1, v_2, v_3, \dots, v_{n+1}$ (qu'il faudra généralement réordonner en ordre croissant).

Il n'est pas difficile d'interpréter de manière relativement intuitive et géométrique chacune de ces étapes et les décisions qui y sont prises. Il est également intéressant de constater qu'en pratique, les étapes de rétrécissement (les plus coûteuses puisque demandant n nouvelles évaluations de la fonction) surviennent extrêmement rarement.

Bien sûr, il n'existe pas de critère fiable pour déterminer quand on est proche d'un minimum, et on se contente généralement d'arrêter la méthode lorsque les sommets du simplexe semblent se stabiliser ou converger.

Pour conclure, nous citons les rares résultats connus à propos de la convergence de cette méthode (voir [11])

- ◇ Appliquée à une fonction strictement convexe à une variable, la méthode de Nelder-Mead converge vers un minimum (forcément global)
- ◇ Appliquée à une fonction strictement convexe à deux variables, la valeur de la fonction évaluée sur tous les sommets du simplexe converge vers la même valeur (mais ce n'est pas forcément la valeur optimale)
- ◇ Il existe une fonction strictement convexe à deux variables et une configuration de départ spécifique pour laquelle la méthode de Nelder-Mead converge vers un point qui n'est pas minimum

Références

- [1] E. D. Andersen, J. Gondzio, Cs. Mészáros, and X. Xu. Implementation of interior-point methods for large scale linear programs. In T. Terlaky, editor, *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, volume 5 of *Applied Optimization*, pages 189–252. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [2] K. M. Anstreicher. On long step path following and SUMT for linear and quadratic programming. Technical report, Yale School of Management, Yale University, New Haven, CT, 1990.
- [3] K. M. Anstreicher. Potential reduction algorithms. In T. Terlaky, editor, *Interior Point Methods of Mathematical Programming*, volume 5 of *Applied Optimization*, pages 125–158. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [4] V. Blondel. *INMA2702 - Mathématiques appliquées : optimisation*.
- [5] G. B. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1963.
- [6] I. I. Dikin. Iterative solution of problems of linear and quadratic programming. *Doklady Akademii Nauk SSSR*, 174:747–748, 1967.
- [7] A. V. Fiacco and G. P. McCormick. *Nonlinear Programming: Sequential Unconstrained Minimization Techniques*. John Wiley & Sons, New York, 1968. Reprinted in *SIAM Classics in Applied Mathematics*, SIAM Publications, 1990.
- [8] K. R. Frisch. The logarithmic potential method of convex programming. Technical report, University Institute of Economics, Oslo, Norway, 1955.
- [9] M. X. Goemans and D. P. Williamson. Improved approximation algorithms for maximum cut and satisfiability problems using semidefinite programming. *Journal of Association for Computing Machinery*, 42(6):1115–1145, November 1995.
- [10] P. Huard. Resolution of mathematical programming with nonlinear constraints by the method of centers. In J. Abadie, editor, *Nonlinear Programming*, pages 207–219. North Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1967.
- [11] M. H. Wright P. E. Wright J. C. Lagarias, J. A. Reeds. Convergence properties of the Nelder-Mead simplex method in low dimensions. *SIAM Journal on Optimization*, 9(1):112–147, 1998.
- [12] N. K. Karmarkar. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4:373–395, 1984.
- [13] L. G. Khachiyan. A polynomial algorithm in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, 20:191–194, 1979.
- [14] V. Klee and G. J. Minty. *How good is the simplex algorithm ?*, pages 159–175. Inequalities, O. Shisha ed. Academic Press, New York, 1972.
- [15] W. F. Mascarenhas. The affine scaling algorithm fails for $\lambda = 0.999$. Technical report, Universidade Estadual de Campinas, Campinas S. P., Brazil, October 1993.
- [16] S. Mehrotra. On the implementation of a primal-dual interior point method. *SIAM Journal on Optimization*, 2:575–601, 1992.
- [17] Y. E. Nesterov and A. S. Nemirovski. *Interior-point polynomial methods in convex programming*. SIAM Studies in Applied Mathematics. SIAM Publications, Philadelphia, 1994.
- [18] R. T. Rockafellar. *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1970.

- [19] C. Roos, T. Terlaky, and J.-Ph. Vial. *Theory and Algorithms for Linear Optimization. An Interior Point Approach*. Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- [20] A. Schrijver. *Theory of Linear and Integer Programming*. Wiley-Interscience series in discrete mathematics. John Wiley & sons, 1986.
- [21] N. Z. Shor. Utilization of the operation of space dilatation in the minimization of convex functions. *Kibernetika*, 1:6–12, 1970.
- [22] Y. Smeers. *INMA2473 - Recherche opérationnelle : méthodes stochastique et dynamiques*.
- [23] L. Vandenberghe and S. Boyd. Semidefinite programming. *SIAM Review*, 38:49–95, 1996.
- [24] L. Wolsey. *INMA2450 - Optimisation : programmation combinatoire*.
- [25] S. J. Wright. *Primal-Dual Interior-Point Methods*. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 1997.
- [26] Y. Ye. *Interior Point Algorithms, Theory and Analysis*. John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1997.
- [27] Y. Ye, M. J. Todd, and S. Mizuno. An $O(\sqrt{n}L)$ -iteration homogeneous and self-dual linear programming algorithm. *Mathematics of Operations Research*, 19:53–67, 1994.

Table des matières

Avant propos	2
Evaluation	2
Plan (provisoire) du cours	2
Partie 1. Modèles	3
Introduction	5
Chapitre 1. Optimisation linéaire	9
1. Introduction	9
2. Dualité pour l'optimisation linéaire	9
Chapitre 2. Optimisation convexe	13
1. Introduction	13
2. Ensembles et fonctions convexes	13
Chapitre 3. Optimisation conique	17
1. Des cônes pour l'optimisation	17
2. Dualité pour l'optimisation conique	23
3. Ensembles et fonctions SQL-représentables	26
Partie 2. Méthodes	29
Chapitre 4. Méthodes de point intérieur pour l'optimisation linéaire	31
1. Introduction	31
2. Concepts de base	34
3. Méthodes de point intérieur	40
4. Améliorations	52
5. Implémentation	58
6. Remarques finales	60
Chapitre 5. Méthodes de point intérieur pour l'optimisation convexe	63
1. Principe des méthodes de point intérieur	63
2. Barrières auto-concordantes	63
3. Complexité algorithmique polynomiale	63
4. Algorithmes de type primal-dual	63
Chapitre 6. Optimisation non-linéaire	65

1. Optimisation sans contraintes	65
2. Optimisation avec contraintes	65
Références	69