

# Sur la modélisation et le contrôle des réseaux dynamiques conservatifs

Georges BASTIN<sup>1</sup>

<sup>1</sup>CESAME, Université Catholique de Louvain  
4, avenue G. Lemaître,  
1348 Louvain-la-Neuve, Belgique  
(bastin@inma.ucl.ac.be)

*Résumé*— Un premier objectif de cette communication est de présenter les principes généraux qui président à la mise en équation des modèles dynamiques des réseaux conservatifs, aussi bien dans le cas des modèles en dimension finie que dans celui des modèles en dimension infinie. Un deuxième objectif est de présenter deux questions relatives au contrôle en boucle fermée de ces réseaux : d'une part, le contrôle de congestion pour les modèles de réseaux en dimension finie ; d'autre part, la stabilisation en boucle fermée des états de régime permanent pour les modèles de réseaux en dimension infinie.

*Mots-clés*— Réseaux, lois de conservation, contrôle de congestion, stabilisation, compartiments.

## I. INTRODUCTION

Les réseaux dynamiques considérés dans cet article sont présents dans de très nombreuses applications actuelles de la technologie et de la science du contrôle. Les applications auxquelles je me suis particulièrement intéressé ces dernières années sont les réseaux de télécommunications ([20]), les réseaux de voies navigables ([9]), les réseaux de trafic routier ([21]), les réseaux métaboliques cellulaires ([19]) et les grands procédés industriels (réseaux de réactions chimiques et circuits de boyage ([18])).

On considère des réseaux constitués de réservoirs de stockage (réels ou virtuels) qui contiennent une certaine quantité d'une espèce matérielle ou immatérielle déterminée (masse, énergie, information ...). Ces réservoirs, dénommés « compartiments », sont interconnectés par des mécanismes de transfert (flux de matière, d'énergie ou d'information). La dynamique générale de ces réseaux est décrite par des systèmes de « lois de conservation » qui s'écrivent sous la forme d'équations différentielles ordinaires (modèles en dimension finie) ou d'équations aux dérivées partielles hyperboliques (modèles en dimension infinie).

Un premier objectif de cette communication est de présenter les principes généraux qui président à la mise en équation des modèles dynamiques des réseaux, aussi bien dans le cas des modèles en dimension finie (section II) que dans celui des modèles en dimension infinie (section V).

Les propriétés des modèles dynamiques en dimension finie de réseaux de compartiments avec des flux d'entrée constants ont été abondamment étudiés dans la littérature depuis plus d'une trentaine d'années (voir par exemple l'article de synthèse [28] et aussi, entre autres, [1], [8], [12], [13], [16], [23], [29], [31], [34], [36], [40]). Certaines de ces propriétés sont rappelées à la section III.

Un deuxième objectif de cette communication est de dis-

cuter de certains aspects du contrôle en boucle fermée des réseaux. Pour les modèles en dimension finie, la question de la stabilisation en boucle fermée est (très partiellement) étudiée dans quelques publications récentes (voir par exemple [5], [6], [11], [26], [27]). Ici, je discuterai plutôt d'une autre question intéressante : le contrôle de congestion. C'est un problème qui se pose dans les réseaux quand la demande de flux à l'entrée dépasse la capacité de transmission du réseau. On peut penser par exemple aux problèmes de congestion dans les réseaux de télécommunication, dans les réseaux routiers ou dans les circuits de broyage. On montrera (section IV) comment la congestion du réseau peut être automatiquement évitée par un contrôle en boucle fermée approprié.

D'autre part, pour les systèmes en dimension infinie, on présentera à la section VI une condition de stabilité des états de régime permanent et on verra comment cette propriété peut être mise à profit pour concevoir des algorithmes de contrôle en boucle fermée stabilisants.

## II. MODÉLISATION EN DIMENSION FINIE (RÉSEAUX À COMPARTIMENTS)

Les réseaux dynamiques conservatifs que nous considérons dans cet article ont une structure qui est représentée par un graphe orienté comme cela est illustré à la Fig.1. Chaque noeud du réseau représente un dispositif de stockage (appelé « compartiment ») qui contient une quantité variable d'une espèce matérielle ou immatérielle déterminée (masse, énergie, information ...). Chaque arc orienté  $i \rightarrow j$  représente un transfert (éventuellement accompagné d'une transformation) de l'espèce concernée entre deux compartiments. Le débit de transfert, que l'on appelle souvent « flot » ou « flux », est noté  $f_{ij}$ . Des arcs d'entrée et de sortie supplémentaires représentent les interactions du réseau avec son environnement : soit des flux d'entrée notés  $b_j$  injectés de l'extérieur dans certains noeuds du réseau, soit des flux de sortie  $e_j$  soutirés de certains noeuds vers l'extérieur.

Chaque noeud du réseau représente un réservoir contenant une quantité variable  $x_j(t)$ . Le vecteur  $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))$  est le vecteur d'état du système. Les flux de transfert sont des fonctions des variables d'état :  $f_{ij}(x(t))$ ,  $e_j(x(t))$ .

Les équations suivantes décrivent le bilan des flux autour

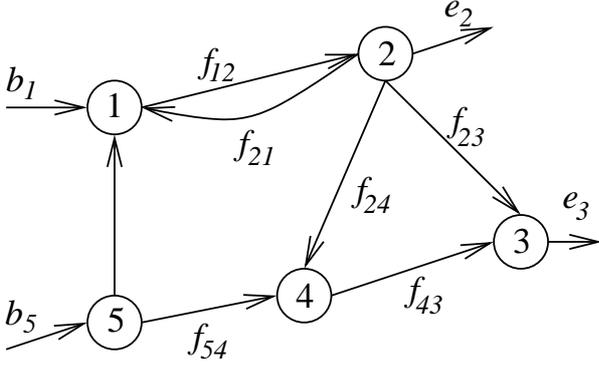


Fig. 1. Graphe d'un réseau à compartiments

de chacun des compartiments :

$$\dot{x}_j = \sum_{i \neq j} f_{ij}(x) - \sum_{k \neq j} f_{jk}(x) - e_j(x) + b_j \quad j = 1, \dots, n. \quad (1)$$

Ces équations sont souvent appelées « équations de continuité ». Elles expriment que, pour chaque compartiment, le taux d'accumulation (positif ou négatif) de la quantité  $x_j(t)$  est simplement la différence entre la somme des flux d'entrée  $f_{ij}$ ,  $b_j$  et la somme des flux de sortie  $f_{jk}$ ,  $e_j$ . Dans ces équations, seuls sont explicités les termes correspondant à des liens effectifs du réseau. En d'autres termes, les  $b_j$ ,  $e_j$  and  $f_{ij}$  correspondant à des liens inexistantes n'apparaissent pas dans les équations. Cet ensemble d'équations constitue le modèle d'état du système.

Le modèle (1) n'a de sens que si les variables d'état  $x_j(t)$  sont *non-négatives*<sup>1</sup> pour tout  $t$  :  $x_j(t) \in \mathbb{R}_+$ . Les fonctions de flux  $f_{ij}$  et  $e_j$  sont définies de manière à être non-négatives sur l'orthant non-négatif :  $f_{ij} : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ ,  $e_j : \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ . De manière similaire, les flux d'entrée  $b_j$  sont non-négatifs  $b_j(t) \in \mathbb{R}_+ \forall t$ . D'autre part, il ne peut y avoir de flux positif provenant d'un compartiment vide et donc :

$$x_j = 0 \implies f_{jk}(x) = 0 \quad \text{et} \quad e_j(x) = 0. \quad (2)$$

Sous la condition (2), si les fonctions  $f_{jk}(x)$  et  $e_j(x)$  sont différentiables, elles peuvent s'écrire sous la forme

$$f_{jk}(x) = r_{jk}(x)x_j \quad e_j(x) = q_j(x)x_j$$

avec les fonctions  $r_{jk}(x)$  and  $q_j(x)$  définies sur  $\mathbb{R}_+^n$ , non-négatives et au moins continues. Ces fonctions sont appelées *flux spécifiques*. Dans cet article, nous supposons que les flux spécifiques  $r_{jk}(x)$  and  $q_j(x)$  sont des fonctions continument différentiables et strictement positives de leurs arguments sur l'orthant non-négatif :

$$r_{jk}(x) > 0 \quad \text{et} \quad q_j(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^n.$$

En d'autres mots, nous supposons que les flux  $f_{jk}$  and  $e_j$  ne peuvent être nuls que si  $x_j = 0$ . C'est une hypothèse naturelle qui est satisfaite par de nombreux modèles physiques décrits par des réseaux à compartiments.

<sup>1</sup>**Notation.** L'ensemble des nombres réels non-négatifs est noté  $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R}, a \geq 0\}$ . Pour tout entier  $n$ , l'ensemble  $\mathbb{R}_+^n$  est appelé « orthant non-négatif ».

Avec ces définitions et notations, le système (1) s'écrit :

$$\dot{x}_j = \sum_{i \neq j} r_{ij}(x)x_i - \sum_{k \neq j} r_{jk}(x)x_j - q_j(x)x_j + b_j \quad j = 1, \dots, n \quad (3)$$

On rencontre des modèles d'état de cette forme dans de nombreuses applications. On peut citer par exemple les procédés industriels ( tels que les colonnes de distillation ([33]), les réacteurs chimiques, les circuits de broyage ([5], [18]), les échangeurs de chaleur, ...), mais aussi les réseaux de files d'attente, les réseaux de communications ([20]), les éco-systèmes ([28]), les procédés biologiques, les systèmes économiques, etc.

### III. PROPRIÉTÉS STRUCTURELLES DES RÉSEAUX À COMPARTIMENTS

Les réseaux à compartiments ont de nombreuses propriétés structurelles intéressantes et documentées dans la littérature scientifique. Certaines de ces propriétés sont présentées ci-dessous.

Tout d'abord, comme on peut s'y attendre, un réseau à compartiment est un système positif.

**Définition 1. Système positif (e.g.[35]).** Un système dynamique  $\dot{x} = f(x, t)$   $x \in \mathbb{R}^n$  est positif si

$$x(0) \in \mathbb{R}_+^n \implies x(t) \in \mathbb{R}_+^n \quad \forall t \geq 0.$$

■

**Propriété 1. Un réseau à compartiments est un système positif.** Le système (3) est un système *positif*. En effet, si  $x \in \mathbb{R}_+^n$  et  $x_j = 0$ , alors  $\dot{x}_j = \sum_{i \neq j} r_{ij}(x)x_i + b_j \geq 0$ . Ceci est suffisant pour garantir l'invariance de l'orthant non-négatif si les fonctions  $r_{ij}(x)$  et  $q_j(x)$  sont différentiables. ■

La quantité totale contenue dans le système est

$$M(x) = \sum_{i=1}^n x_i.$$

Un réseau à compartiments est *conservatif* en ce sens que la quantité totale contenue dans le système est conservée. On le vérifie facilement en considérant le cas particulier d'un réseau fermé sans flux d'entrée et de sortie.

**Propriété 2. Conservation.** Un modèle de réseau à compartiments (3) est dissipatif par rapport au taux d'alimentation (supply rate)  $w(t) = \sum_i b_i(t)$  avec la quantité totale  $M(x)$  comme fonction d'accumulation (storage function) dont la dynamique est donnée par l'équation suivante :

$$\frac{dM(x(t))}{dt} = \sum_i b_i(t) - \sum_i e_i(x(t)).$$

Dans le cas particulier d'un système fermé sans flux d'entrée ( $b_i = 0, \forall i$ ) et sans flux de sortie ( $e_i(x) = 0, \forall i$ ), on vérifie que  $dM(x)/dt = 0$ , ce qui montre que la quantité totale contenue dans le système est effectivement conservée. ■

Le système (3) peut s'écrire sous forme matricielle :

$$\dot{x} = A(x)x + b \quad (4)$$

où la matrice  $A(x)$  est appelée *matrice compartimentale* avec les propriétés suivantes :

1.  $A(x)$  est une matrice de *Metzler*, c-à-d une matrice ayant des éléments non-négatifs en dehors de la diagonale :

$$a_{ij}(x) = r_{ji}(x) \geq 0$$

(notez l'inversion des indices !)

2. Les éléments diagonaux de  $A(x)$  sont non-positifs :

$$a_{ii}(x) = -q_i(x) - \sum_{j \neq i} r_{ij}(x) \leq 0$$

3. La matrice  $A(x)$  est diagonalement dominante :

$$|a_{ii}(x)| \geq \sum_{j \neq i} a_{ji}(x)$$

L'invertibilité et la stabilité d'une matrice compartimentale est reliée à la notion de *connectivité* comme cela est indiqué dans la définition suivante.

**Définition 2. Réseau connecté aux entrées et aux sorties.** Un compartiment  $i$  est *connecté à une sortie* si il y a un chemin  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$  partant de ce compartiment et se terminant en un compartiment  $\ell$  à partir duquel il y a un flux de sortie  $q_\ell(x)$ . Le réseau est *complètement connecté aux sorties* (CCS) si chaque compartiment est connecté à une sortie.

Un compartiment  $\ell$  est *connecté à une entrée* si il y a un chemin  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$  jusqu'à ce compartiment et partant d'un compartiment  $i$  dans lequel il y a un flux d'entrée  $b_i$ . Le réseau est *complètement connecté aux entrées* (CCE) si chaque compartiment est connecté à une entrée. ■

**Propriété 3. Invertibilité et stabilité d'une matrice compartimentale ([16],[28]).** La matrice compartimentale  $A(x)$  est régulière et stable  $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$  si et seulement si le réseaux à compartiments est CCS. Ceci indique que la régularité et la stabilité d'une matrice compartimentale peuvent être directement vérifiées par inspection de la structure du graphe du réseau. ■

La matrice Jacobienne du système (4) est définie comme

$$J(x) = \frac{\partial[A(x)x]}{\partial x}.$$

Lorsque la matrice Jacobienne possède elle-même une structure compartimentale, ses éléments non-diagonaux sont non-négatifs et le système est donc *coopératif* ([24], [25]) ou, ce qui est ici synonyme, *monotone* dans  $\mathbb{R}_+^n$  ([2], [42]). Nous avons alors l'intéressante propriété de stabilité suivante.

**Propriété 4. Stabilité des équilibres avec une matrice Jacobienne compartimentale.** Considérons le système (4) avec des flux d'entrée *constants* :  $b_i = \text{constante}$   $\forall i$ .

- a) Si  $J(x)$  est une matrice compartimentale  $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ , alors toutes les trajectoires bornées tendent vers un équilibre dans  $\mathbb{R}_+^n$ .
- b) Si il existe un compact convexe  $D \subset \mathbb{R}_+^n$  qui est *invariant* et si  $J(x)$  est une matrice compartimentale *régulière*  $\forall x \in D$ , alors le système (4) possède un équilibre *unique*  $\bar{x} \in D$  qui est globalement asymptotiquement stable (GAS) dans  $D$ . ■

On trouve une démonstration de a) dans [28], Annexe 4 (voir aussi [17],[24], [30]). La partie b) est une reformulation concise du théorème de Rosenbrock [38] (voir aussi [40]). On trouvera aussi dans [2] une généralisation de cette propriété à certains réseaux qui ne sont *pas* coopératifs, mais qui sont formés de sous-réseaux coopératifs interconnectés (voir aussi [14]).

La propriété 4 impose que la matrice Jacobienne compartimentale soit inversible pour qu'il y ait un équilibre unique et GAS. Une telle condition n'est évidemment pas satisfaite pour un système *fermé* (sans flux d'entrée ni de sortie) qui possède nécessairement une matrice Jacobienne *singulière*. Cependant, l'unicité de l'équilibre est préservée pour des systèmes fermés qui sont fortement connexes.

**Propriété 5. Unicité de l'équilibre pour des systèmes fermés fortement connexes.** Si un système fermé avec une matrice Jacobienne compartimentale est fortement connexe (c-à-d qu'il y a un chemin orienté  $i \rightarrow j \rightarrow k \rightarrow \dots \rightarrow \ell$  reliant tout compartiment  $i$  à tout compartiment  $\ell$ ), alors, pour toute constante  $M_0 > 0$ , l'hyperplan  $H = \{x \in \mathbb{R}_+^n : M(x) = M_0 > 0\}$  est invariant et contient un unique équilibre GAS. ■

Cette propriété est une extension immédiate du Théorème 6 de [36].

#### IV. CONTRÔLE DE CONGESTION DANS LES RÉSEAUX À COMPARTIMENTS

Le problème de congestion survient dans un réseau quand la demande de flux à l'entrée du réseau dépasse la capacité de transfert du réseau. L'objectif de cette section est de montrer comment la congestion du réseau peut être automatiquement évitée par un contrôle en boucle fermée.

Le problème de contrôle de congestion est formulé de la manière suivante. Nous considérons un réseau comportant  $n$  compartiments,  $m$  flux d'entrée et  $p$  flux de sortie. Nous supposons en outre que :

1. Le réseau est CCE et CCS (chaque compartiment est connecté à une entrée et une sortie au moins).
2. Les liens du réseau ont une capacité maximale de transfert :  $0 \leq f_{ij}(x) \leq f_{ij}^{max}$  et  $0 \leq e_i(x) \leq e_i^{max}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}_+^n$ .
3. Les compartiments du réseau ont une capacité maximum :  $x_i^{max}$ ,  $i = 1, \dots, n$ .
4. Il y a un flux d'entrée demandé  $d_i$  sur chaque entrée du réseau : c'est le flux d'entrée que l'utilisateur voudrait injecter dans le réseau ou, autrement dit, que l'utilisateur voudrait assigner au débit d'entrée  $b_i$ .

Alors la congestion se produit dans le réseau quand la demande totale dépasse la capacité maximale de transfert réalisable par le réseau. Celle-ci est forcément limitée car elle

dépend des capacités maximales de transfert des liens du réseau. Quand la congestion se produit, certains liens du réseau sont saturés avec la conséquence indésirable d'un débordement des compartiments qui alimentent les liens saturés.

Nous examinerons deux solutions : le contrôle « de proche en proche » d'une part, le contrôle « de bout en bout » d'autre part. Dans la pratique, ces deux formes de contrôle peuvent être combinées.

#### A. Contrôle de proche en proche

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, les flux d'entrée  $b_i$  sont idéalement assignés aux valeurs demandées  $d_i(t)$ . Cependant, dans le but d'éviter la congestion du réseau, on suppose que les flux d'entrée  $b_i$  peuvent être momentanément ralentis et inférieurs à la demande. Cela s'exprime comme ceci :

$$b_i(t) = u_{oi}(t)d_i(t) \quad 0 \leq u_i(t) \leq 1$$

où  $u_{oi}(t)$  représente la fraction de la demande  $d_i(t)$  qui peut, en réalité, être envoyée dans le réseau. Dans le cas du contrôle de proche en proche, on suppose en outre que tous les flux internes du réseau sont aussi munis d'un dispositif de contrôle. Ceci s'exprime en munissant les flux  $f_{ij}$  d'un facteur multiplicatif de commande  $u_{ij}$  comme suit :

$$f_{ij}(t) = u_{ij}(t)r_{ij}(x(t))x_i(t) \quad 0 \leq u_{ij}(t) \leq 1.$$

Avec ces définitions et notations, le modèle d'état du système (3) avec le contrôle se réécrit :

$$\dot{x}_j = \sum_{i \neq j} u_{ij}r_{ij}(x)x_i - \sum_{k \neq j} u_{jk}r_{jk}(x)x_j - q_j(x)x_j + u_{oj}d_j \quad j = 1, \dots, n \quad (5)$$

Le principe de base du contrôle de proche en proche est que la commande  $u_{ij}$  qui module le flux de sortie du compartiment  $i$  est utilisée pour empêcher le débordement du compartiment  $j$  situé immédiatement en aval (voir l'illustration de la Fig. 2). Le contrôle est réalisé par des fonctions de rétroaction statique  $u_{ij}(x_j) : [0, \sigma_j] \rightarrow \mathbb{R}_+$  telles que :

$$u_{ij}(0) = 0 \quad u_{ij}(\sigma_j) = 1 \quad \frac{\partial u_{ij}}{\partial x_j} < 0 \quad \forall x_j \in [0, \sigma_j] \quad (6)$$

où  $\sigma_j > 0$  est un paramètre dont la valeur est la taille maximum acceptée pour le compartiment  $j$  et inférieure à la capacité maximale  $x_j^{max}$ . Un exemple typique d'une telle fonction est donné par l'expression suivante :

$$u_{ij}(x_j) = \frac{\sigma_j - x_j}{\sigma_j - (1 - \varepsilon)x_j}$$

où  $\varepsilon$  est une petite constante positive arbitraire.

**Propriété 6. Contrôle de congestion de proche en proche.** Le système en boucle fermée constitué du réseau à compartiments (5) avec des lois de contrôle  $u_{ij}(x_i)$  satisfaisant les conditions (6), possède les propriétés suivantes :

1. Le système en boucle fermée est un réseau à compartiments. C'est donc un système positif (Propriété 1) et conservatif (Propriété 2).

2. L'ensemble  $\Omega = \{x : 0 \leq x_k \leq \sigma_k\}$  est invariant.

3. Si la Jacobienne du réseau en boucle ouverte est compartimentale et régulière dans  $\Omega$ , alors la Jacobienne du système en boucle fermée est aussi compartimentale et régulière et le système possède, pour une demande constante, un équilibre unique GAS dans  $\Omega$  (Propriété 4). ■

En d'autres termes, le contenu  $x_j$  de chaque compartiment du réseau reste borné à tout instant, en deça de la capacité maximale, et tout risque de congestion est ainsi automatiquement évité. La preuve de cette propriété est simplement établie en observant que :

$$x_j = 0 \implies \dot{x}_j \geq 0 \quad x_j = \sigma_j \implies \dot{x}_j \leq 0$$

et en suivant un raisonnement similaire à celui utilisé dans la section VII de [43].

#### B. Contrôle de bout en bout

Dans le cas du contrôle de bout en bout, on suppose que, dans le but d'éviter la congestion, *seuls* les flux d'entrée  $b_i$  peuvent être modulés à des valeurs inférieures à la demande :

$$b_i(t) = u_{oi}(t)d_i(t) \quad 0 \leq u_i(t) \leq 1$$

On suppose d'autre part que les seules mesures disponibles pour un contrôle en rétroaction sont les flux de sortie  $e_i(x(t)) \triangleq y_i(t)$ . Autrement dit, on suppose qu'il n'y a aucun moyen de contrôle ni aucune mesure disponible à l'intérieur du réseau (voir l'illustration de la Fig. 3). Le modèle d'état s'écrit de la manière suivante sous forme matricielle :

$$\dot{x} = A(x)x + B(d)u \quad (7a)$$

$$y = C(x)x \quad (7b)$$

avec des définition évidentes des matrices  $B(d), C(x)$  et des vecteurs  $d, u, y$ .

Pour éviter la congestion, on utilise un contrôle dynamique de la forme suivante (voir [4]) :

$$\dot{z}_i = y_i - \phi(z_i) \sum_{k \in Q_i} \alpha_{ki} d_k \quad (i \in \mathcal{I}_{out})$$

$$u_j(z) = \sum_{k \in P_j} \alpha_{jk} \phi(z_k) \quad (j \in \mathcal{I}_{in})$$

avec les définitions et les notations suivantes :

- (a)  $\mathcal{I}_{in}$  est l'index des compartiments d'entrée ( $|\mathcal{I}_{in}| = m$ );
- (b)  $\mathcal{I}_{out}$  est l'index des compartiments de sortie ( $|\mathcal{I}_{out}| = p$ );
- (c)  $\mathcal{R}$  est l'ensemble des paires de compartiments  $(j, k)$  (avec  $j \in \mathcal{I}_{in}$  and  $k \in \mathcal{I}_{out}$ ) telles qu'il y a un chemin orienté dans le réseau du compartiment d'entrée  $j$  au compartiment de sortie  $k$ ;
- (d)  $P_j = \{k : (j, k) \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{I}_{out}$  est l'index des compartiments de sortie qui sont atteignables à partir du compartiment d'entrée  $j$ ;
- (e)  $Q_i = \{k : (k, i) \in \mathcal{R}\} \subset \mathcal{I}_{in}$  est l'index des compartiments d'entrée à partir desquels le compartiment de sortie  $i$  est atteignable;

- (f)  $\alpha_{jk}$  (with  $(j, k) \in \mathcal{R}$ ) sont des paramètres de synthèse tels que  $0 \leq \alpha_{jk} \leq 1$  et  $\sum_{k \in P_j} \alpha_{jk} = 1$  ;  
 (g)  $\phi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction monotone croissante telle que  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(+\infty) = 1$ .

La rationalité sous-jacente à la construction de cette loi de contrôle est illustrée à la Fig.2. Le contrôleur possède

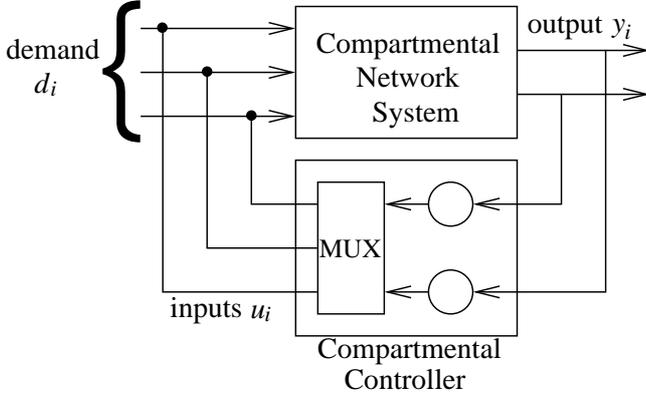


Fig. 2. Structure du système en boucle fermée

lui-même une structure de réseau à compartiments, avec autant de compartiments qu'il y a de sorties  $y_i$  au réseau à contrôler. Chaque compartiment du contrôleur est virtuellement alimenté avec une copie de l'un des flux de sortie. Les flux sortant du contrôleur sont distribués entre les entrées de contrôle  $u_j$  (comme cela est représenté par un multiplexeur à la Fig.2) de telle manière qu'il y ait exactement une connection entre chaque sortie  $k$  du réseau et chaque entrée  $j$  à travers le contrôleur pour toutes les paires  $(j, k) \in \mathcal{R}$  (c-à-d pour toutes les connections inverses existant à travers le réseau entre les entrées  $j$  et les sorties  $k$ ). Sous forme matricielle, cette loi de contrôle s'écrit :

$$\dot{z} = G(d)F(z)z + y \quad (8a)$$

$$u = K(z)z \quad (8b)$$

avec  $G(d) = \text{diag}\{\sum_{k \in Q_i} (-\alpha_{ki}d_k), i \in \mathcal{I}_{out}\}$  et des définitions évidentes du vecteur  $z$  et des matrices  $F(z)$  et  $K(z)$ . Il s'en déduit que le système en boucle fermée obtenu en combinant le réseau (7) avec le contrôleur (8) s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(x) & B(d)K(z) \\ C(x) & G(d)F(z) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \triangleq L(x, z) \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \quad (9)$$

**Propriété 7. Contrôle de congestion de bout en bout.** Le système en boucle fermée (9) possède les propriétés suivantes :

1. La matrice  $L(x, z)$  dans (9) est une matrice compartimentale paramétrée par  $d$ . La boucle fermée (9) est donc un système positif (Propriété 1). En outre c'est un réseau *fermé* pour lequel la fonction d'accumulation

$$M(x, z) = \sum_{i=1}^n x_i + \sum_{j=1}^p z_j$$

est invariante (Propriété 2) et dont les trajectoires d'état, avec des conditions initiales non-négatives, sont confinées dans l'ensemble invariant :

$$H = \{(x, z) \in \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{R}_+^p : M(x, z) = M(x(0), z(0)) = \sigma > 0\}.$$

Il s'en déduit immédiatement que les variables d'état sont bornées :

$$0 \leq x_i(t) \leq \sigma \quad (i = 1, n) \quad \text{and} \quad 0 \leq z_j(t) \leq \sigma \quad (j \in \mathcal{I}_{out}).$$

2. Les contrôles  $u_j(z)$  (c-à-d les fractions de la demande d'entrée qui sont effectivement réalisées par le contrôle) sont bien confinés dans l'intervalle  $[0, 1]$ . En effet, sous la condition (g) ci-dessus on a  $0 \leq \phi(z_k) \leq 1 \quad \forall z_k \in \mathbb{R}_+$  ce qui, avec la condition (f), implique :

$$0 \leq u_j(z) = \sum_{k \in P_j} \alpha_{jk} \phi(z_k) \leq \sum_{k \in P_j} \alpha_{jk} = 1.$$

3. Le réseau étant CCE et CCS par hypothèse, la structure choisie pour le contrôleur implique que le réseau en boucle fermée (9) est nécessairement un réseau *fortement connexe*. Dès lors, si la Jacobienne du réseau en boucle ouverte est compartimentale et régulière dans  $H$ , alors la Jacobienne du système en boucle fermée est aussi compartimentale et, pour une demande constante  $d$ , le système possède un équilibre unique GAS dans  $H$  (Propriété 5). ■

Par cette propriété, on peut donc observer comment la congestion du réseau est automatiquement évitée grâce au contrôle : en effet, pourvu que  $\sigma$  soit inférieur à la capacité maximale  $x_j^{max}$  des compartiments, on a la garantie qu'il n'y aura pas de débordement des compartiments ni de saturation des flux. Dans la majorité des applications, il est naturel de démarrer le système avec des compartiments vides ( $x_j(0) = 0$ ). Dans ce cas la valeur de  $\sigma = \sum_{j=1}^p z_j(0)$  est librement fixée par l'utilisateur en choisissant les conditions initiales  $z_j(0)$  des variables d'état du contrôleur.

## V. MODÉLISATION EN DIMENSION INFINIE (RÉSEAUX DE LOIS DE CONSERVATION)

On considère maintenant le cas où les noeuds du réseau (Fig.1) représentent des réservoirs dont le contenu n'est pas homogène et dont la dimension spatiale doit être prise en compte. On se limite au cas où une seule dimension spatiale est significative<sup>2</sup>. Les variables d'état représentant

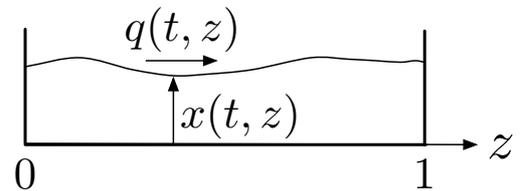


Fig. 3. Illustration de la modélisation d'un compartiment en dimension infinie

les quantités accumulées dans les compartiments sont alors spatialement distribuées. Elles sont notées  $x_j(t, z)$  où les deux variables indépendantes sont la variable temporelle

<sup>2</sup>C'est le cas de nombreuses applications concrètes comme par exemple les canaux hydrauliques, les pipelines, les routes, les échangeurs de chaleur ou les réacteurs chimiques de type « piston ».

$t \in [0, +\infty)$  et la variable spatiale  $z \in [0, 1]$  sur un intervalle fini représentant la taille (normalisée) du compartiment (voir Fig.3). La dynamique de chaque compartiment est décrite par une équation de la forme :

$$\partial_t x_j(t, z) + \partial_z q_j(t, z) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (10)$$

où  $q_j(t, z)$  est le flux. Chacune de ces  $n$  équations aux dérivées partielles (EDP) est simplement une équation de continuité interne à chaque compartiment qui exprime que le taux d'accumulation de la quantité  $x_i(t, z)$  sur l'intervalle  $[z, z + dz]$  est la différence entre le flux d'entrée  $q_i(t, z)$  et le flux de sortie  $q_i(t, z + dz)$ . Il faut évidemment préciser comment le flux dépend de l'état du système. Dans les cas les plus simples, on suppose que le flux dans chaque compartiment est une fonction statique de l'état dans le même compartiment :

$$q_j = h_j(x_j(t, z))$$

de sorte que le modèle d'état (10) s'écrit :

$$\partial_t x_j(t, z) + \partial_z h_j(x_j(t, z)) = 0 \quad j = 1, \dots, n. \quad (11)$$

Les équations d'état (11) de cette forme sont généralement appelées « lois de conservation » dans la littérature (voir par exemple les ouvrages de référence [7], [32], [41]). On rencontre ce type d'équations par exemple dans les modèles fluides de trafic sur les réseaux routiers ([21]) ou dans les modèles cinématiques d'écoulement dans les réseaux hydrauliques.

Sous l'hypothèse que les fonctions  $h_j(x_j)$  sont dérivables, le modèle d'état s'écrit alors aussi :

$$\partial_t x_j(t, z) + \lambda_j(x_j(t, z)) \partial_z x_j(t, z) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (12)$$

où chaque fonction  $\lambda_j(x_j)$  est la dérivée de  $h_j$  par rapport à  $x_j$ . Ce modèle s'écrit sous forme matricielle :

$$\partial_t x(t, z) + \Lambda(x(t, z)) \partial_z x(t, z) = 0 \quad (13)$$

avec le vecteur  $x(t, z) = (x_1(t, z), \dots, x_n(t, z))$  et la matrice diagonale  $\Lambda(x(t, z)) = (\text{diag } \lambda_j(x_j(t, z)))$ .

Si les fonctions  $h_j$  sont en outre strictement monotones croissantes et donc inversibles  $x_j = h_j^{-1}(q_j)$ , on peut tout aussi bien choisir les flux comme variables d'état. Dans ce cas le modèle se réécrit :

$$\partial_t q_j(t, z) + \delta_j(q_j(t, z)) \partial_z q_j(t, z) = 0 \quad j = 1, \dots, n \quad (14)$$

avec :

$$\delta_j(q_j(t, z)) = \frac{\partial h_j^{-1}(q_j)}{\partial q_j}(t, z) \lambda_j(h_j^{-1}(q_j(t, z))).$$

On observe que ces équations sont exactement de la même forme que les équations (12). Ce sont donc aussi des lois de conservation. Sous forme matricielle, le modèle (14) s'écrit :

$$\partial_t q(t, z) + \Delta(q(t, z)) \partial_z q(t, z) = 0 \quad (15)$$

avec le vecteur  $q(t, z) = (q_1(t, z), \dots, q_n(t, z))$  et la matrice diagonale  $\Delta(x(t, z)) = (\text{diag } \delta_j(q_j(t, z)))$ .

Le modèle est complété par des conditions aux bords qui modélisent les bilans de flux entre les compartiments (voir Fig. 1) :

$$q_j(t, 0) = \sum_{i \neq j} f_{ij}(q_i(t, 1)) + b_j(t) \quad (16a)$$

$$q_j(t, 1) = \sum_{k \neq j} f_{jk}(q_k(t, 1)) + e_j(q_j(t, 1)) \quad (16b)$$

$$j = 1, \dots, n$$

On adopte ici la modélisation la plus simple où les flux  $f_{jk}$  et  $e_j$  sortant du compartiment  $j$  sont des fonctions de classe  $C^1$  qui ne dépendent que de la valeur du flux  $q_j(t, 1)$  à l'extrémité  $z = 1$ . La deuxième relation (16b) est simplement une contrainte qui doit être satisfaite par les fonctions  $f_{jk}$  et  $e_j$  pour garantir la cohérence du modèle. Seule la première relation (16a) doit être prise en compte comme condition au bord pour le calcul des solutions du système d'EDP (15).

## VI. COMMANDE EN BOUCLE FERMÉE DES RÉSEAUX DE LOIS DE CONSERVATION

Comme dans le cas des modèles en dimension finie, nous supposons que les flux d'entrée  $b_j$  et certains flux de transfert  $f_{jk}$  peuvent être modulés par des actionneurs appropriés. Cela revient à dire que nous considérons maintenant le système (15) sous des conditions aux bords (16a) qui dépendent des actions de contrôle et qui sont réécrites :

$$q_j(t, 0) = \sum_{i \neq j} f_{ij}(q_i(t, 1), u_{ij}(t)) + b_j(u_{oj}(t)) \quad (17)$$

avec les notations  $u_{ij}$  et  $u_{oj}$  pour les grandeurs de commande (les commandes  $u_{ij}$  ne sont pas nécessairement présentes dans tous les arcs du réseau).

**Définition 3. Régime permanent.** Pour des commandes constantes  $u_{ij}(t) = \bar{u}_{ij}$  et  $u_{oj}(t) = \bar{u}_{oj}$ , une solution de régime permanent (ou d'équilibre) est une solution constante  $q(t, z) = \bar{q} \forall t \in [0, +\infty), \forall z \in [0, 1]$  qui vérifie (15) et les conditions aux bords  $\bar{q}_j = \sum_{i \neq j} f_{ij}(\bar{q}_i, \bar{u}_{ij}) + b_j(\bar{u}_{oj})$ . ■

On s'intéresse ici aux solutions régulières du problème de Cauchy pour le système (15) avec les conditions aux bords (17) sous une condition initiale  $q(0, z) = Q(z) \quad z \in [0, 1]$ . En désignant par le vecteur  $u(t)$  l'ensemble des commandes disponibles, le problème de contrôle en boucle fermée est le problème de définir une loi de rétroaction statique  $u(t) = \varphi(q(t, 1))$  telle que le problème de Cauchy pour le système (15) avec les conditions aux bords (17) possède une solution unique dans  $C^1([0, +\infty) \times [0, 1])$  qui converge exponentiellement vers un état de régime permanent désiré.

Avec la loi de commande  $u(t) = \varphi(q(t, 1))$ , nous écrivons les conditions aux bords (17) sous la forme vectorielle :

$$q(t, 0) = F(q(t, 1)) \quad (18)$$

**Définition 4. Conditions de compatibilité.** La condition initiale

$$q(0, z) = Q(z) \in C^1([0, 1]) \quad (19)$$

vérifie les « conditions de compatibilité » au bord si elles satisfont les conditions suivantes :

$$Q(0) = F(Q(1)) \quad (20a)$$

$$\Delta(Q(0))Q'(0) = \nabla_q F(Q(1))\Delta(Q(1))Q'(1) \quad (20b)$$

La première relation est la condition aux bords (18) à l'instant initial. La deuxième relation est obtenue en dérivant (18) par rapport au temps, en utilisant (15) et en évaluant le résultat à l'instant initial ( $\nabla_q F$  désigne la Jacobienne de  $F$  par rapport à  $q$ ). ■

**Propriété 8. Stabilité de la solution de régime permanent du système en boucle fermée.** Si le rayon spectral de la matrice<sup>3</sup>  $|\nabla_q F(\bar{q})|$  est strictement inférieur à 1, alors il existe une constante  $\varepsilon > 0$ , telle que, pour toute fonction  $Q(z)$  satisfaisant les conditions de compatibilités (20) et telle que

$$|Q(z) - \bar{q}|_{C^1([0,1])} \leq \varepsilon,$$

il existe une et une seule solution  $q(t, z) \in C^1([0, +\infty) \times [0, 1])$  vérifiant les équations du système (15)-(18) et la condition initiale  $q(0, z) = Q(z) \forall z \in [0, 1]$ . De plus, cette solution converge exponentiellement vers l'état de régime permanent car il existe deux constantes strictement positives  $\mu$  et  $M$  telles que :

$$|q(t, z) - \bar{q}|_{C^1([0,1])} \leq M \exp^{-\mu t} |Q(z) - \bar{q}|_{C^1([0,1])} \quad \forall t \geq 0$$

■

Cette propriété est un cas particulier du Théorème 6 dans [9]. Elle nous indique que la stabilité exponentielle (locale) de l'état de régime permanent de la boucle fermée est essentiellement dictée par la structure de la condition au bord : il suffit de choisir la loi de contrôle  $\varphi$  pour que le rayon spectral de la norme de la matrice Jacobienne de l'application  $F$  (définissant les conditions aux bords) soit inférieur à 1.

Cependant, l'hypothèse que le flux  $q_j$  est une fonction statique de  $x_j$  est assez simpliste et ne correspond pas toujours à la réalité expérimentale. Il est donc important de voir comment cette méthode de conception peut être généralisée aux cas où cette hypothèse n'est pas satisfaisante. Dans ce cas, il est approprié de considérer que le flux  $q_j$  est lui-même une variable d'état du système obéissant à une loi de conservation de la quantité de mouvement. La dynamique de chaque compartiment est alors modélisée par deux lois de conservation (ici on substitue la notation  $y_j$  à la notation  $x_j$ ) :

$$\begin{cases} \partial_t y_j(t, z) + \partial_z q_j(t, z) = 0 \\ \partial_t q_j(t, z) + \partial_z g_j(y_j(t, z), q_j(t, z)) = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n \quad (21)$$

Pour autant que la fonction  $g$  soit de classe  $C^1$ , ce modèle (21) s'écrit aussi :

$$\partial_t \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix} + A_j(y_j, q_j) \partial_z \begin{pmatrix} y_j \\ q_j \end{pmatrix} = 0 \quad j = 1, \dots, n$$

<sup>3</sup> $|A|$  désigne une matrice dont les éléments sont les valeurs absolues des éléments de la matrice  $A$ .

avec la matrice :

$$A_j(y_j, q_j) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial g_j / \partial y_j & \partial g_j / \partial q_j \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n$$

Considérons le cas hyperbolique où les matrices  $A_j$  possèdent deux valeurs propres réelles et distinctes notées  $\lambda_{n+j}(y_j, q_j)$  et  $\lambda_j(y_j, q_j)$  ( $j = 1, \dots, n$ ).

**Propriété 9. Invariants de Riemann.** Il existe une transformation d'état :

$$\begin{pmatrix} x_j(t, z) \\ x_{n+j}(t, z) \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} y_j(t, z) \\ q_j(t, z) \end{pmatrix} \quad j = 1, \dots, n$$

telle que, dans ces nouvelles coordonnées, le système (21) s'écrit sous une forme diagonalisée :

$$\begin{cases} \partial_t x_j + \lambda_j(x_j, x_{n+j}) \partial_z x_j = 0 \\ \partial_t x_{n+j} + \lambda_{n+j}(x_j, x_{n+j}) \partial_z x_{n+j} = 0 \end{cases} \quad j = 1, \dots, n$$

ou, sous forme matricielle :

$$\partial_t x(t, z) + \Lambda(x(t, z)) \partial_z x(t, z) = 0 \quad (22)$$

avec le vecteur  $x(t, z) = (x_1(t, z), \dots, x_{2n}(t, z))$  et la matrice diagonale  $\Lambda(x(t, z)) = (\text{diag } \lambda_j(x_j(t, z)), j = 1, \dots, 2n)$ . Les variables  $x_j(t, z)$  sont appelées *invariants de Riemann* parcequ'elles sont constantes le long des courbes caractéristiques dans le plan  $(t, z)$ . ■

Cette propriété est démontrée dans la plupart des ouvrages de base sur les systèmes de lois de conservation (voir par exemple [32], [41]).

Le point important est que, par ce changement de coordonnées, le système (22) est écrit dans une forme qui est tout à fait semblable à la forme précédente (13), à ceci près que la dimension du vecteur d'état  $x(t, z)$  est  $2n$  au lieu de  $n$ . Pour résoudre ce système il faut donc prendre en compte l'ensemble des  $2n$  conditions aux bords (16). Etant donné cette similarité de forme, la propriété 8 se généralise directement au système (22) (voir le Théorème 6 dans [9]) : la stabilité locale exponentielle des états de régime permanent dépend de façon simple de la structure des conditions aux bords exprimées évidemment dans les nouvelles coordonnées. Cette propriété peut alors être utilisée de la même manière pour concevoir des lois de contrôle frontière en boucle fermée stabilisantes. Une telle approche est utilisée par exemple pour concevoir des algorithmes de contrôle de niveau et de débit dans les réseaux de canaux à surface libre (par exemple des réseaux de voies navigables) dans les références [9], [10], [22], [37].

## VII. CONCLUSION

Cette communication est évidemment loin d'avoir épuisé le sujet de la modélisation et du contrôle des réseaux dynamiques conservatifs. Il y a, dans la littérature, de nombreuses questions ouvertes à explorer. Le lecteur intéressé pourra consulter les références indiquées dans la bibliographie. Pour terminer, je voudrais aussi adresser mes remerciements à tous ceux avec lesquels j'ai eu le plaisir de travailler sur ce sujet depuis une vingtaine d'années. Je voudrais citer en particulier les professeurs Brigitte d'Andréa-Novet, Jean-Michel Coron, Laurent Praly, Yacine Chitour,

Joseph Winkin, Paul Van Dooren, et les chercheurs Libei Chen, Fabrice Jadot, Nathalie Dautrebande, Frédéric Grogard, Jonathan de Halleux, Mariama Ndiaye, Christophe Prieur, Vincent Guffens, Agnès Provost, Bertrand Haut, Valérie Dos Santos.

## RÉFÉRENCES

- [1] D.H. Anderson, T. Roller, "Equilibrium Points for Nonlinear Compartmental Models", *Mathematical Biosciences*, vol. 103, pp. 159-201, 1991.
- [2] D. Angeli et E.D. Sontag, "Monotone control systems", *IEEE Transactions on Automatic Control*, Vol. 48, pp. 1684 - 1698, 2003.
- [3] G. Bastin, J-M. Coron, B. d'Andréa-Novel, L. Moens, "Boundary control for exact cancellation of boundary disturbances in hyperbolic systems of conservation laws", *Proceedings of the 44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference 2005 (ECC-CDC'05)*, Seville, Spain, 12-15 December 2005, pp. 1086 - 1089.
- [4] G. Bastin and V. Guffens, "Congestion control in compartmental network systems", *Systems and Control Letters*, 2006, in press.
- [5] G. Bastin and L. Praly, "Feedback stabilisation with positive control of a class of mass-balance systems", Paper C-2a-03-2 CD-Rom Proceedings IFAC World Congress, Beijing, China, July 1999.
- [6] G. Bastin and A. Provost, "Feedback stabilisation with positive control of dissipative compartmental systems", 5th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems MTNS 2002, CD Rom Proceedings Paper 14900-3 in Session MA5, Notre-Dame, USA, August 2002.
- [7] A. Bressan, "Hyperbolic Systems of Conservation Laws : The One-Dimensional Cauchy Problem", Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, Oxford University Press, 2000
- [8] M.J. Chapman, K.R. Godfrey, S. Vajda, "Indistinguishability for a class of nonlinear compartmental models", *Mathematical Biosciences*, 119(1), pp. 77 - 95, 1994.
- [9] J. de Halleux, C. Prieur, J-M. Coron, B. d'Andréa-Novel, G. Bastin, "Boundary feedback control in networks of open channels", *Automatica*, 39, pp. 1365 - 1376, 2003
- [10] J. de Halleux, G. Bastin, "Stabilization of St Venant equations using Riemann invariants : Application to waterways with mobile spillways ", Session T-Th-E08 in CD Rom Proceedings, 15th IFAC World Congress, Barcelona, Spain, July 2002, pp. 2151-2156.
- [11] P. De Leenheer and D. Aeyels, "Stabilization of positive systems with first integrals", *Automatica*, 38(9), pp. 1583 - 1589.
- [12] J. Eisenfeld, "On Washout in Nonlinear Compartmental Systems", *Mathematical Biosciences*, 58, pp. 259-275, 1982.
- [13] J. Eisenfeld, "Partial identification of undetermined compartmental models : a method based on positive linear Lyapunov functions", *Mathematical Biosciences*, 132(2), pp. 111 - 140, 1996.
- [14] J.G.A. Enciso, H.L. Smith, E.D. Sontag, "Non-monotone systems decomposable into monotone systems with negative feedback," *J. of Differential Equations* (2006) : to appear.
- [15] L. Farina and S. Rinaldi, "Positive Linear Systems - Theory and Applications", Wiley, 2000.
- [16] D. Fife, "Which linear compartmental systems contain traps?", *Mathematical Biosciences*, 14, pp. 311 - 315, 1972.
- [17] J.L. Gouzé, "Positive and negative circuits in dynamical systems", *Journal of Biological Systems*, 6(1), pp. 11-15, 1998.
- [18] F. Grogard, F. Jadot, L. Magni, G. Bastin, R. Sepulchre, V. Wertz, "Robust global state feedback stabilisation of cement mills", *IEEE Transactions on Automatic Control*, 46(4), pp. 618 - 623, 2001.
- [19] F. Grogard, Y. Chitour, G. Bastin, "Equilibria and stability analysis of a branched metabolic network with feedback inhibition ", *AIMS Journal on Networks and Heterogeneous Media*, Vol 1(1), pp. 219 - 239, 2006.
- [20] V. Guffens and G. Bastin, "Using token leaky buckets for congestion feedback control in packet switched networks with guaranteed boundedness of buffer queues", Paper 175 in CD-Rom Proceedings European Control Conference ECC 03, Cambridge (UK), September 2003.
- [21] B. Haut, G. Bastin, "A second order model for road traffic networks" Paper WA6.2 in CD-Rom Proceedings of 8th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (IEEE-ITSC'05), Vienna, Austria, 13-16 September 2005, pp. 178 - 184.
- [22] B. Haut, G. Bastin, P. Van Dooren, "Maximal nonnegative perturbation of a nonnegative matrix", submitted to 2nd International Symposium on Positive Systems POSTA 06, Grenoble, France, 30 August - 2 September 2006.
- [23] J.Z. Hearon, "A Monotonicity Theorem for Compartmental Systems", *Mathematical Biosciences*, 46, pp. 293-300, 1979.
- [24] M.W. Hirsch, "Systems of differential equations that are competitive or cooperative : II. Convergence almost everywhere", *SIAM Journal of Mathematical Analysis*, 16, pp. 423 - 439, 1985.
- [25] M.W. Hirsch and H.L. Smith, "Competitive and cooperative systems : a mini review", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 294, pp. 183 - 190, 2003.
- [26] L. Imsland, B.A. Foss, "A state feedback controller for a class of positive systems : application to gas lift stabilisation", Paper 422 CD-Rom Proceedings European Control Conference 2003, Cambridge (U-K), 1-4 September 2003.
- [27] L. Imsland, B.A. Foss, "State feedback set stabilization for a class of nonlinear systems", *Lecture Notes in Control and Information Sciences*, 294, pp. 337 - 344, 2003.
- [28] J.A. Jacquez, C.P. Simon, "Qualitative Theory of Compartmental Systems", *SIAM Review*, vol. 35, no 1, pp. 43-79, March 1993.
- [29] J.A. Jacquez, C.P. Simon, "Qualitative Theory of Compartmental Systems with Lags", *Mathematical Biosciences*, vol. 180, pp. 329 - 362, 2002.
- [30] J.F. Jiang, "On the global stability of cooperative systems", *Bull. London Math. Soc.*, vol. 26, pp. 455 - 458, 1994.
- [31] G.S. Ladde, "Cellular Systems - II. Stability of Compartmental Systems", *Mathematical Biosciences*, 30, pp. 1-21, 1976.
- [32] P.D. Lax, "Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves", *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 11*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa., 1973.
- [33] J. Lévine and P. Rouchon, "Quality control of binary distillation columns based on nonlinear aggregated models", *Automatica*, Vol. 27, pp. 463-480, 1991.
- [34] R.M. Lewis, B.D.O. Anderson, "Insensitivity of a class of nonlinear compartmental systems to the introduction of arbitrary time delays, *IEEE Transactions in Circuits and Systems*, CAS-27, pp. 604, 1980.
- [35] D. Luenberger, "Dynamic systems, Theory and Applications", Wiley, 1979.
- [36] H. Maeda, S. Kodama, Y. Ohta, "Asymptotic Behavior of Non-linear Compartmental Systems : Nonoscillation and Stability", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS-25(6), pp. 372-378, June 1978.
- [37] C. Prieur, G. Bastin, J. Winkin, "Boundary control of nonhomogeneous systems of conservation laws", *Proceedings of the joint 44th IEEE Conference on Decision and Control and European Control Conference 2005 (ECC-CDC'05)*, Seville, Spain, 12-15 December 2005, pp. 1899 - 1904.
- [38] H. Rosenbrock, "A Lyapunov function with applications to some nonlinear physical problems", *Automatica*, 1, pp. 31 - 53, 1962.
- [39] P. Rouchon, "Remarks on some applications of nonlinear control techniques to chemical processes", *Proc. IFAC-Symposium NOLCOS'92, Bordeaux*, pages 569-575, 1992.
- [40] I.W. Sandberg, "On the Mathematical Foundations of Compartmental Analysis in Biology, Medicine, and Ecology", *IEEE Transactions on Circuits and Systems*, CAS25(5), pp. 273-279, 1978.
- [41] D. Serre, "Systèmes de lois de conservation", Diderot Editeur, Arts et Sciences, Paris, 1996.
- [42] H.L. Smith, "Monotone Dynamical Systems", AMS, Providence, 1995.
- [43] E. Sontag, "Structure and stability of certain chemical networks and applications to the kinetic proofreading model of T-cell receptor signal transduction", *IEEE Trans. Autom. Control*, 46(7), pp. 1028-1047, 2001.