
Étude du polynôme de HOMFLY-PT des entrelacs
au travers d'une représentation du groupe des
tresses dans un algèbre de Iwahori-Hecke

Grégoire Naisse

Promoteur : Pedro Vaz

Université Catholique de Louvain
Faculté des Sciences
École de Mathématique

2012–2013

Table des matières

1	Introduction	5
2	Le groupe des tresses	7
2.1	Définitions	7
2.2	Groupe des tresses d'Artin	9
2.3	Entrelacs et théorème d'Alexander	13
2.4	Mouvements de Markov	15
3	Algèbres de Hecke	21
3.1	Algèbres de Hecke	21
3.2	Traces d'Ocneanu	25
4	Polynôme de HOMFLY-PT	29
4.1	Polynôme de HOMFLY-PT	29
4.2	Exemple	34
5	Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke	37
5.1	Algèbre de Hecke diagrammatique	37
5.2	Le polynôme de HOMFLY-PT par un calcul graphique	41
6	Conclusion	45

1 Introduction

La théorie des tresses est un domaine de la topologie de basse dimension, c'est-à-dire l'étude des espaces et variétés de dimension plus petite ou égale à 4. Elle trouve des applications en mathématiques, dans la réalisation d'invariants pour la théorie des nœuds ou encore dans l'étude des difféomorphismes entre surfaces [KT], et en physique théorique, notamment en mécanique des fluides pour visualiser des mouvements de particules [K1] ou en théorie des supercordes de par ses applications en théorie des nœuds [EN]. Dans ce travail, nous étudions les tresses dans le cadre de la théorie des nœuds afin de déterminer un invariant pour les entrelacs.

La théorie des tresses a été officiellement introduite par Emil Artin dans les années 1920, mais nous pouvons déjà trouver ses prémices dans les travaux d'Adolf Hurwitz en 1891 [KT]. Cependant, il faudra attendre 1983 pour que Vaughan Jones découvre une nouvelle représentation du groupe des tresses menant au fameux polynôme invariant qui porte son nom, suivi par Lickorish et Millet, Freyd et Yetter, Ocneanu, et Hoste qui en font une généralisation en 1984, sous le nom de polynôme de HOMFLY-PT [FYH⁺], le PT venant du fait qu'il fut aussi découvert indépendamment par Przytycki et Traczyk [PT].

En plus des tresses, nous étudions l'algèbre de Iwahori-Hecke qui trouve des applications en géométrie et en théorie des représentations, comme nous le voyons au travers de ce travail. En effet, c'est par une représentation du groupe des tresses dans cette algèbre que nous pouvons construire le polynôme de HOMFLY-PT.

Ce travail est organisé en 4 parties. Dans un premier temps, nous étudions les tresses, en prouvant qu'elles forment un groupe et en voyant que les tresses et les entrelacs sont des notions proches grâce à l'opération de fermeture d'une tresse. Nous étudions ensuite une représentation de ce groupe dans une algèbre de Hecke et nous construisons une trace dans cette algèbre, appelée trace d'Ocneanu, qui nous permet dans la troisième partie de définir un polynôme invariant pour les entrelacs, le polynôme de HOMFLY-PT. Pour finir, nous voyons comment calculer cette trace dans une visualisation diagrammatique de l'algèbre de Hecke, utile pour simplifier les calculs.

2 Le groupe des tresses

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion de tresse et nous l'approchons de différentes façons, chacune possédant ses avantages et inconvénients, mais toutes étant équivalentes. Nous lions ensuite tresses et entrelacs par la notion de fermeture d'une tresse. Enfin, nous concluons par un exemple simple.

2.1 Définitions

Intuitivement, une *tresse à n brins* se compose de n points d'entrées et n points de sorties fixés et distincts qui sont reliés un à un par des brins qui ne peuvent ni revenir en arrière, ni s'intersecter, comme illustré en Figure 2.1.

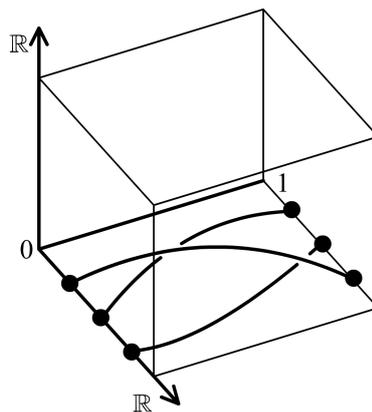


FIGURE 2.1: Exemple de tresse à 3 brins.

Définition 2.1. Une tresse à n brins est un plongement de n segments $p_i : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ dont les extrémités sont fixées :

$$\begin{aligned} p_i(0) &= (i, 0, 0) \\ p_i(1) &= (j, 0, 1) \end{aligned}$$

pour un $1 \leq j \leq n$ et avec en plus que, pour $0 \leq a < b \leq 1$ et x, y tels que $p_i(a) = (*, *, x)$ et $p_i(b) = (*, *, y)$, nous avons $x < y$.

Nous disons en plus que deux tresses sont *isotopes* si nous pouvons déplacer les brins de l'une de sorte à obtenir l'autre et ce de façon continue et en conservant la structure de tresse tout au long du mouvement. Pour un soucis de facilité, quand nous parlons d'une tresse, nous considérons souvent la classe d'équivalence d'une tresse par isotopie.

Définition 2.2. Les tresses à n brins α et α' , obtenues respectivement par les plongements p_α et $p_{\alpha'}$, sont isotopes s'il existe $H : [0, 1] \times [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ fonction continue telle

2. Le groupe des tresses

que pour tout $x \in [0, 1]^n$

$$H(0, x) = p_\alpha(x)$$

$$H(1, x) = p_{\alpha'}(x)$$

et que pour tout $t \in [0, 1]$, l'application $x \in [0, 1]^n \rightarrow H(t, x)$ forme une tresse.

Nous définissons ensuite une opération de composition interne entre deux tresses à n brins qui consiste naturellement à joindre les points de sortie de la première tresse aux points d'entrée de la seconde, en réduisant la taille des deux tresses de moitié, comme illustré sur la Figure 2.1. Nous obtenons alors une nouvelle tresse à n brins.

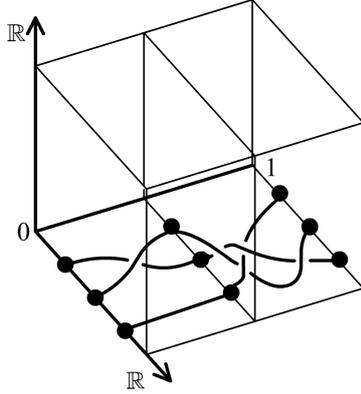


FIGURE 2.2: Composition de deux tresses à 3 brins

Définition 2.3. Le produit de deux tresses à n brins α et β , obtenues respectivement par les plongements p_α et p_β , est obtenu par le plongement $p_{\alpha\beta} : [0, 1]^n \rightarrow \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ tel que, pour $1 \leq i \leq n$ et pour j qui est la première composante de $p_{\alpha_i}(1)$, donc tel que $p_{\alpha_i}(1) = p_{\beta_j}(0)$,

$$p_{\alpha\beta_i}(x) = \begin{cases} p_{\alpha_i}(2x) & \text{si } x \leq 1/2 \\ p_{\beta_j}(2x - 1) & \text{si } x > 1/2. \end{cases}$$

Proposition 2.1. L'ensemble des tresses à n brins, à isotopie près, muni de cette opération de composition forme un groupe.

Démonstration. Cette opération est associative puisqu'il suffit de déplacer les brins par isotopie de sorte que chacune des tresses prenne un tiers de la place pour obtenir la même tresse, ce qui nous donne que pour toutes tresses à n brins α, β, γ

$$\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma.$$

La classe d'isotopie de la tresse qui consiste à relier chaque point d'entrée avec le point de sortie en face par une ligne droite est un élément neutre. En effet, il suffit de déplacer les brins le long des segments de droite qu'on aura ajouté avant ou après pour obtenir la tresse d'origine.

Enfin, chaque tresse admet un inverse que nous obtenons en prenant son image miroir relativement au plan $\{(x, y, 1/2) | x, y \in \mathbb{R}\}$, voir Figure 2.3. En effet, par isotopie, nous pouvons décaler nos brins de sorte à n'avoir qu'un nombre fini de croisements si nous

2.2. Groupe des tresses d'Artin

regardons la tresse depuis le dessus. Sinon, pour en avoir un nombre infini, il nous faudrait faire osciller un brin à une vitesse infinie et il ne serait plus un plongement de $[0, 1]$ dans \mathbb{R}^3 . En partant de la troisième coordonnée à $1/2$, nous parcourons la tresse de part et d'autre jusqu'à avoir un croisement. Par image miroir, nous avons un croisement de chaque côté, entre les mêmes brins, mais inversé. Il suffit alors de tordre les brins ensemble d'un demi tour pour annuler leurs croisements et obtenir des brins droits. Nous continuons ensuite comme ça jusqu'à avoir parcouru toute la tresse et nous obtenons l'élément neutre puisqu'il ne restera plus que des brins droits.

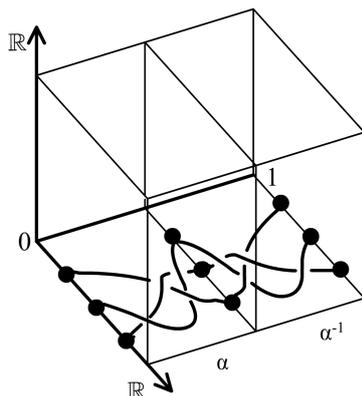


FIGURE 2.3: Tresse α et son inverse.

□

Le groupe de la Proposition 2.1 est appelé *groupe des tresses à n brins*.

2.2 Groupe des tresses d'Artin

Le *groupe des tresses d'Artin à n brins* est un groupe défini par des diagrammes et les relations de Reidemeister. Nous montrons dans cette section que ce groupe est isomorphe au groupe des tresses à n brins et qu'il apporte comme avantage d'être présenté par des générateurs et des relations.

Définition 2.4. Une projection régulière d'une tresse de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ est une projection telle qu'il n'y ait pas trois brins qui se croisent au même point et telle qu'il n'y ait pas deux brins qui se superposent en plus que des points isolés.

Un diagramme de tresse est une projection régulière d'une tresse de $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ dans $\mathbb{R} \times [0, 1]$ où nous indiquons si un brin passe au dessus d'un autre par une interruption du brin du dessous, comme illustré en Figure 2.4.

Nous avons en Figure 2.5 un contre-exemple de diagramme de tresse.

Définition 2.5. Un diagramme de tresse élémentaire à n brins, σ_i , pour $1 \leq i \leq n - 1$, est défini comme le diagramme de la tresse qui relie chaque point d'entrée avec le point d'en face, sauf pour le i -ème point qui est relié au $i + 1$ -ème point par un brin qui passe au dessus de celui qui va du $i + 1$ -ème au i -ème. Nous définissons de même σ_i^{-1} en échangeant l'ordre de superposition des brins, comme illustré en Figure 2.6.

Nous définissons la notion d'isotopie par un déplacement continu des brins sans créer de

2. Le groupe des tresses

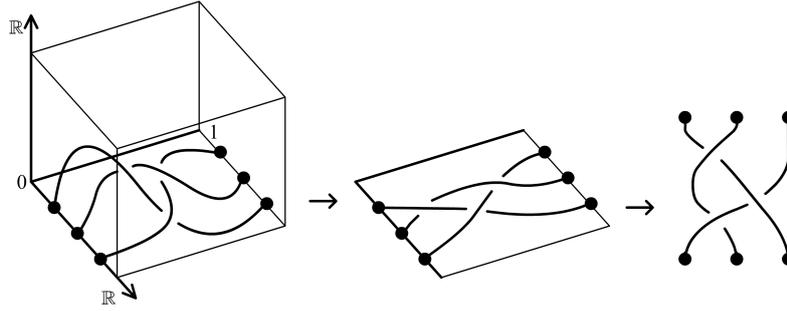


FIGURE 2.4: Projection d'une tresse sur un diagramme.

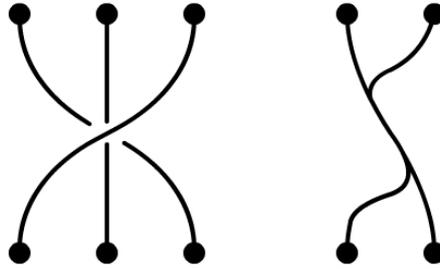


FIGURE 2.5: Ce ne sont pas des diagrammes.

nouveau croisement et en conservant la structure de diagramme de tresse.

A_n est défini comme l'ensemble des diagrammes de tresses à n brins engendrés par les mots de σ_i et σ_i^{-1} à isotopie près, avec le mot vide noté 1.

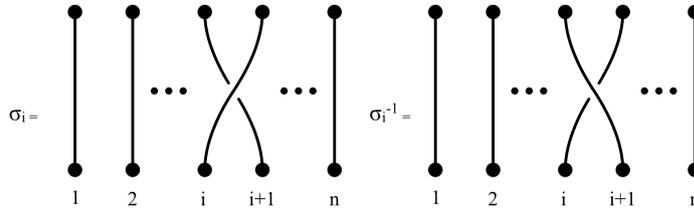


FIGURE 2.6: i -ème tresse élémentaire et son inverse : σ_i et σ_i^{-1}

Définition 2.6. Nous définissons le mouvement de Reidemeister de type 2¹ par l'opération qui envoie $\sigma_i \sigma_i^{-1}$ et $\sigma_i^{-1} \sigma_i$ vers l'identité, comme illustré en Figure 2.7, et inversement. Nous définissons le mouvement de Reidemeister de type 3 par l'opération qui envoie $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i$ vers $\sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$, comme illustré en Figure 2.8, et inversement.

Proposition 2.2. L'ensemble A_n quotienté par l'équivalence entre deux diagrammes de tresse dont nous pouvons obtenir l'une à partir de l'autre par un mouvement de Reidemeister de type 2 ou 3 forme un groupe pour l'opération de concaténation.

Démonstration. La concaténation est clairement associative et le neutre est donné par le mot vide.

1. La terminologie de mouvement de Reidemeister de type 2 et 3 vient de la théorie des nœuds. Le mouvement de Reidemeister de type 1 apparaîtra plus loin dans ce travail.

2.2. Groupe des tresses d'Artin

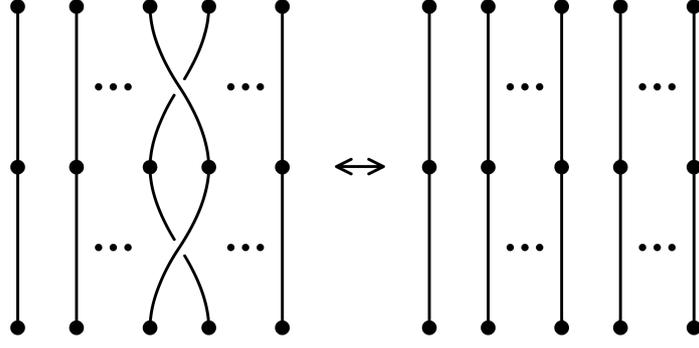


FIGURE 2.7: Mouvement de Reidemeister de type 2 : $\sigma_i \sigma_i^{-1} \leftrightarrow 1$

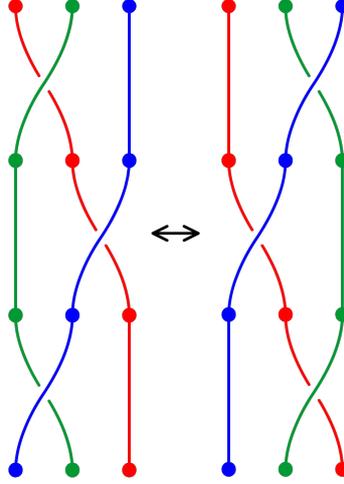


FIGURE 2.8: Mouvement de Reidemeister de type 3 : $\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i \leftrightarrow \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}$

En outre, puisque tout élément de A_n se trouve sous la forme

$$\sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k}$$

pour $j_1, \dots, j_k \in \{-1, 1\}$ et $i_1, \dots, i_k \in \{0, \dots, n-1\}$, toute tresse admet donc un inverse donné par

$$\sigma_{i_k}^{-j_k} \dots \sigma_{i_1}^{-j_1}.$$

En effet, nous obtenons par des mouvements de Reidemeister de type 2 $\sigma_{i_l}^{j_l} \sigma_{i_l}^{-j_l} = 1$ et donc

$$\sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k} \sigma_{i_k}^{-j_k} \dots \sigma_{i_1}^{-j_1} = \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_{k-1}}^{j_{k-1}} \sigma_{i_{k-1}}^{-j_{k-1}} \dots \sigma_{i_1}^{-j_1} = 1.$$

et le raisonnement est similaire pour $\sigma_{i_k}^{-j_k} \dots \sigma_{i_1}^{-j_1} \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k} = 1$. \square

Ce groupe est nommé *groupe des tresses d'Artin à n brins*.

Proposition 2.3. *Le groupe des tresses à n brins et le groupe des tresses d'Artin à n brins sont isomorphes.*

Démonstration. Toute tresse du groupe d'Artin peut être envoyée vers un élément du groupe des tresses. Il suffit d'appliquer une homothétie sur le diagramme de sorte à normaliser sa taille et de donner une hauteur aux brins de sorte à respecter le diagramme

2. Le groupe des tresses

et éviter les intersections. Puisque nous travaillons avec des mots de σ_i à isotopie près, il suffit de montrer que nous pouvons le faire pour σ_i et σ_i^{-1} , par morphisme de groupe la définition sera forcée. Posons pour $1 \leq j \leq n$ et $i \neq j \neq i+1$, pour tout $t \in [0, 1]$,

$$p_j(t) = (j, 0, t)$$

et

$$p_i(t) = \begin{cases} (i+t, t, t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (i+t, 1-t, t) & \text{si } t > 1/2 \end{cases}$$

$$p_{i+1}(t) = \begin{cases} (i+1-t, -t, t) & \text{si } t \leq 1/2 \\ (i+1-t, t-1, t) & \text{si } t > 1/2. \end{cases}$$

Nous obtenons alors un plongement de n brins qui est une tresse dont le diagramme est σ_i et la définition est similaire pour σ_i^{-1} . Par propriété d'isotopie des tresses, les mouvements de Reidemeister donnent la même classe d'équivalence de tresse et donc cet homomorphisme est bien défini. Nous l'appelons ϕ .

Pour montrer la surjectivité, il suffit de décaler par isotopie les brins de sorte à avoir un nombre fini de croisements et de sorte à ne pas en avoir deux au même niveau, ce qui est faisable par la preuve de la Proposition 2.1. Nous regardons ensuite la tresse depuis le dessus et nous la découpons entre chacun de ses croisements. Cela nous donne un nombre fini de tresses ne possédant qu'un seul croisement et pouvant donc être associées à des diagrammes de tresses élémentaires.

Par le théorème de Reidemeister appliqué aux tresses [KT], les mouvements de Reidemeister et l'isotopie dans le groupe d'Artin permettent de caractériser entièrement la notion d'isotopie dans le groupe des tresses et donc notre épimorphisme est injectif.

Nous en concluons que ϕ est un isomorphisme. \square

À partir de maintenant, nous arrêtons de parler de diagrammes et de classe d'isotopie de tresse et nous appelons tresses les éléments du groupe des tresses d'Artin.

Proposition 2.4. *L'ordre de B_n , pour $n \geq 2$, est infini.*

Démonstration. Il suffit de remarquer que σ_1^n est différent de σ_1^k pour tout $1 \leq k \leq n-1$. \square

Il ne nous reste plus qu'un pas à faire pour obtenir une définition algébrique du groupe des tresses : définir des relations sur les générateurs afin de se libérer de la notion d'isotopie qui est purement topologique.

Nous observons que $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i-j| \geq 2$, puisque nous tordons des brins différents et que nous pouvons donc les décaler par isotopie, comme illustré en Figure 2.9. Cela nous mène à la définition algébrique du groupe des tresses d'Artin.

Définition 2.7. *Le groupe B_n est défini par $n-1$ générateurs, $\tilde{\sigma}_1, \dots, \tilde{\sigma}_{n-1}$, respectant les relations*

$$\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i = \tilde{\sigma}_{i+1} \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \quad (2.1)$$

$$\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j = \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ si } |i-j| \geq 2. \quad (2.2)$$

Proposition 2.5. *Le groupe B_n est isomorphe au groupe des tresses d'Artin à n brins.*

2.3. Entrelacs et théorème d'Alexander

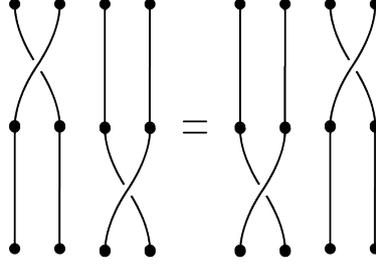


FIGURE 2.9: $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$ si $|i - j| \geq 2$

Démonstration. De par notre observation et les mouvements de Reidemeister, nous avons un épimorphisme de B_n vers le groupe des tresses d'Artin en envoyant $\tilde{\sigma}_i$ vers σ_i . Pour montrer l'injectivité, si nous avons deux tresses équivalentes par mouvements de Reidemeister, elles proviennent du même élément de B_n de par (2.1) et de définition de groupe. Une isotopie ne changeant pas l'ordre des croisements donne aussi le même élément de B_n en se ramenant à sa forme de mot de tresses élémentaires. Enfin, il est clair que si nous changeons l'ordre, nous ne pouvons le faire que pour des croisements ne partageant pas de même brin, sans quoi la tresse devrait faire une boucle à un moment, et donc cela revient à montrer que, pour $|i - j| \geq 2$,

$$\begin{aligned}\tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j &= \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\sigma}_j &= \tilde{\sigma}_j \tilde{\sigma}_i^{-1} \\ \tilde{\sigma}_i \tilde{\sigma}_j^{-1} &= \tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\sigma}_i \\ \tilde{\sigma}_i^{-1} \tilde{\sigma}_j^{-1} &= \tilde{\sigma}_j^{-1} \tilde{\sigma}_i^{-1}\end{aligned}$$

que nous obtenons par (2.2) et en multipliant à gauche et à droite par des $\tilde{\sigma}_i^{-1}$ ou des $\tilde{\sigma}_j^{-1}$. \square

À partir de maintenant, nous confondons σ_i et $\tilde{\sigma}_i$ grâce à cet important résultat.

Remarque 2.1. Nous pouvons plonger B_n dans B_{n+1} par un monomorphisme de groupe. Il suffit d'envoyer $\sigma_i \in B_n$ vers $\sigma_i \in B_{n+1}$. En termes de tresses, cela correspond à ajouter une entrée et une sortie à la droite du diagramme, que nous relierons par un brin vertical qui n'interfère donc pas avec les autres déjà présents.

2.3 Entrelacs et théorème d'Alexander

Nous pouvons fermer une tresse en la plongeant dans \mathbb{R}^3 et en reliant les points d'entrée avec leur point de sortie respectif, comme illustré en Figure 2.10. Nous obtenons alors un entrelacs (voir [K1] pour un traitement approfondi des entrelacs).

Définition 2.8. Un entrelacs est un plongement d'une collection de cercles S^1 dans \mathbb{R}^3 , chaque plongement de cercle est appelée composante de l'entrelacs.

Un nœud est un entrelacs à une composante.

Deux entrelacs sont isotopes s'il existe une déformation continue conservant la structure d'entrelacs menant du premier au second.

Dès lors, la fermeture de la classe d'équivalence par isotopie d'une tresse est bien définie et donne la classe d'équivalence par isotopie d'un entrelacs.

2. Le groupe des tresses

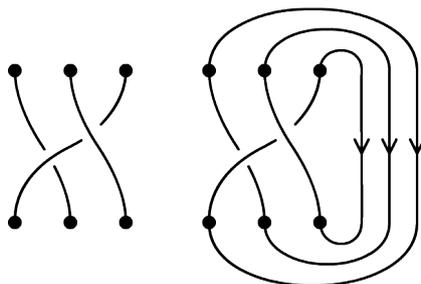


FIGURE 2.10: Fermeture d'une tresse : nous obtenons un entrelacs

Tout comme pour les tresses, nous définissons aussi une notion de diagramme d'entrelacs par projection régulière dans \mathbb{R}^2 . La classe d'isotopie d'un diagramme d'entrelacs est obtenue en quotientant par l'isotopie sur diagramme et les mouvements de Reidemeister auxquels nous ajoutons un troisième mouvement, dit de type 1.

Définition 2.9. *Nous définissons le mouvement de Reidemeister de type 1 par l'équivalence locale entre les diagrammes représentés en Figure 2.11.*

Définition 2.10. *Un diagramme d'un entrelacs est la projection régulière de cet entrelacs sur \mathbb{R}^2 où nous indiquons à chaque croisement quel segment passe au dessus de l'autre par une interruption de celui-ci du dessous.*

Deux diagrammes d'entrelacs sont isotopes s'il existe une déformation continue conservant la structure de diagramme menant du premier au second.

Le théorème de Reidemeister [K1] nous dit alors que deux diagrammes proviennent du même entrelacs si nous pouvons obtenir l'un à partir de l'autre par des mouvements de Reidemeister.

Théorème 2.6. (Théorème de Reidemeister) *Deux diagrammes d'entrelacs sont la projection régulière d'un même entrelacs à isotopie près si et seulement si ils appartiennent à la même classe d'équivalence donnée par l'isotopie sur diagramme et les 3 mouvements de Reidemeister.*

Nous remarquons en outre que nous pouvons orienter chaque composante de l'entrelacs dans un sens ou dans l'autre suivant comment nous la parcourons. Il est alors possible de définir des mouvements caractérisant la classe d'isotopie d'un diagramme d'un entrelacs orienté avec des mouvements similaires au mouvements de Reidemeister [O].

De même, nous pouvons orienter une tresse en orientant chacun de ses brins. Par convention, nous orientons les diagrammes de tresses de bas en haut ou de gauche à droite et donc la fermeture d'une tresse donne un entrelacs orienté.

Nous avons vu qu'à toute tresse nous pouvons associer un entrelacs, mais un résultat important dans la théorie des tresses et la théorie des nœuds, le théorème d'Alexander, nous dit que l'inverse est vrai aussi : à tout entrelacs nous pouvons associer une tresse.

Théorème 2.7. (Théorème d'Alexander) *Tout entrelacs orienté est isotope à la fermeture d'une tresse.*

C'est-à-dire qu'il est toujours possible de manipuler un entrelacs de sorte à le déformer en une tresse fermée, mais cette tresse n'est pas pour autant unique. La preuve de ce théorème [KT] est trop technique pour le cadre de ce travail. Dès lors, nous n'en donnons qu'une

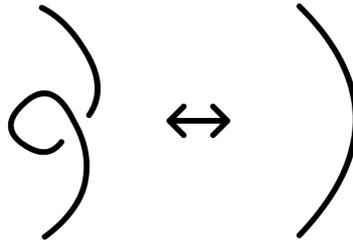


FIGURE 2.11: Mouvement de Reidemeister de type 1

idée intuitive inspirée de la démarche utilisée dans [K1], livrant les clés de l'algorithme permettant de construire la tresse à partir de l'entrelacs.

Démonstration. (Idée) Considérons un entrelacs orienté et fixons un point d'origine ainsi qu'un sens pour tourner autour. Pour chacune des composantes de l'entrelacs, nous choisissons un point de départ dedans et nous déplaçons la composante de sorte qu'elle soit bien orientée localement autour de ce point par rapport au sens de rotation choisis autour du point d'origine (c'est-à-dire qu'en se déplaçant le long nous tournons dans le bon sens autour de l'origine). Nous parcourons la composante dans le sens de son orientation et tant que nous allons dans le même sens autour de l'origine, nous continuons. Quand l'orientation par rapport à l'origine change, nous trouvons le prochain point où elle change à nouveau et nous rabattons ce segment de l'autre côté de l'origine de sorte à rétablir l'orientation. Une fois chacune des composantes complètement parcourues, nous obtenons, à isotopie près, une tresse fermée puisque que nous n'avons plus de retour en arrière.

Cet algorithme est illustré en Figure 2.12 : nous fixons une origine et un sens, en rouge, et parcourons le nœud dans le sens de la flèche en partant du point noir, comme dans la Figure 2.12 a). Dans la Figure 2.12 b), nous avons en rouge l'ancienne forme du nœud et en pointillés la nouvelle après avoir rabattu les segments de part et d'autre de l'axe. Enfin, en Figure 2.12 c), nous coupons le nœud à un endroit sans croisement pour pouvoir défaire une tresse illustrée en Figure 2.12 d).

□

Remarque 2.2. Il existe une infinité de tresses différentes représentant un même entrelacs. Quand nous en avons une, il suffit d'ajouter une boucle dans une de ses composantes et de l'enrouler autour de l'origine choisie, ce qui a pour effet d'ajouter un σ_n à la tresse, comme dans la Figure 2.14.

2.4 Mouvements de Markov

Un autre résultat important dans l'étude des entrelacs formés par fermeture d'une tresse est le théorème de Markov qui nous permet de montrer que deux tresses ont des fermetures isotopes. Pour ce faire, nous devons définir les mouvements de Markov.

Définition 2.11. Soit $\alpha \in B_n$. Nous définissons :

Mouvement de Markov de type 1 : α est envoyé vers $\beta\alpha\beta^{-1}$ pour n'importe quel $\beta \in B_n$.

Mouvement de Markov de type 2 : α est envoyé vers $\alpha\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$ et inversement.

Proposition 2.8. Appliquer un mouvement de Markov à une tresse ne modifie pas l'entrelacs obtenu par fermeture, à isotopie près.

2. Le groupe des tresses

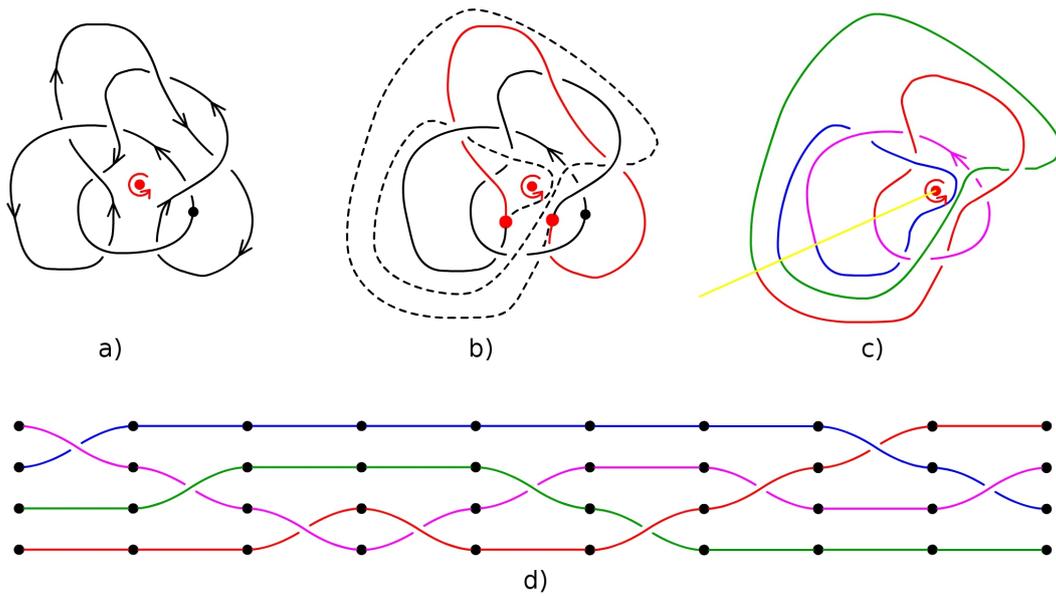


FIGURE 2.12: Entrelacs, algorithme du théorème d'Alexander et une tresse le représentant.

Démonstration. Appelons $F : B_n \rightarrow \{\text{diagrammes d'entrelacs}\}$ l'opération de fermeture. Puisque nous fermons la tresse, nous avons que $F(\alpha\beta) = F(\beta\alpha)$ pour tout $\alpha, \beta \in B_n$. En effet, nous pouvons déformer l'entrelacs par isotopie de sorte à ramener la partie supérieure de la tresse en dessous de l'autre, en lui appliquant une rotation d'un tour complet, comme illustré en Figure 2.13.

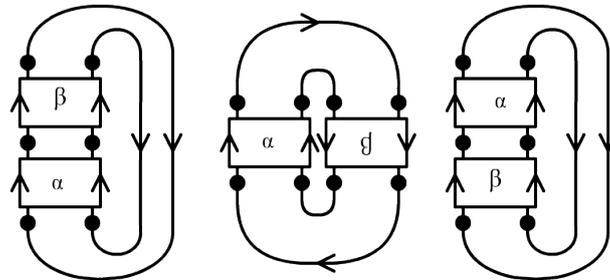


FIGURE 2.13: $F(\alpha\beta) = F(\beta\alpha)$

Nous obtenons alors que

$$F(\beta\alpha\beta^{-1}) = F(\beta^{-1}\beta\alpha) = F(\alpha).$$

Par ailleurs, comme le montre la Figure 2.14, composer avec σ_n donne une boucle que nous pouvons tordre sans modifier l'entrelacs par un mouvement de Reidemeister de type 1 et il en va de même pour σ_n^{-1} . Nous avons donc que

$$F(\alpha\sigma_n) = F(\alpha) = F(\alpha\sigma_n^{-1}).$$

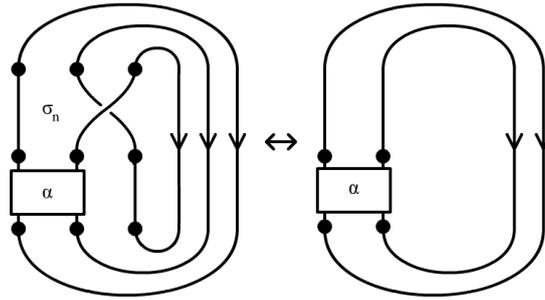


FIGURE 2.14: Mouvement de Markov de type 2 sur une tresse α .

□

Markov a prouvé [B] en plus que ces mouvements permettent d'obtenir toutes les tresses qui composent la classe d'équivalence donnée par isotopie sur la fermeture.

Théorème 2.9. (Théorème de Markov) *Deux tresses α et β ont des fermetures orientées isotopes si et seulement si il existe une séquence finie de mouvements de Markov et de mouvements de Reidemeister de type 2 et 3 permettant d'obtenir l'une à partir de l'autre.*

Ce théorème requiert une preuve trop technique [B] pour ce travail mais se justifie intuitivement assez facilement puisque les propriétés d'isotopie des tresses permettent de couvrir une bonne partie des cas d'isotopie entre entrelacs. En outre, nous retrouvons les mouvements de Reidemeister de type 2 et 3 dans B_n . Il ne reste donc plus qu'à vérifier pour un mouvement de Reidemeister de type 1, qui ajoute une boucle à l'entrelacs. Mais puisque c'est une fermeture de tresse, cela revient à ajouter une boucle autour de l'axe choisi dans l'algorithme du théorème d'Alexander et donc d'ajouter un $\sigma_n^{\pm 1}$ à la tresse, ce qui est un mouvement de Markov de type 2. Une dernière possibilité consiste à prendre un autre point de départ pour la tresse, c'est à dire montrer que $F(\alpha\beta) = F(\beta\alpha)$. Ce qui est vrai puisque $F(\alpha\beta) = F(\beta\alpha\beta^{-1})$ par un mouvement de Markov de type 1.

Cependant, cette explication n'est pas suffisante pour être une preuve car nous ne pouvons pas savoir a priori s'il est possible de déplacer les brins par isotopie de sorte à casser la structure de fermeture de tresse, tout en restant un entrelacs, pour au final se ramener à la fermeture d'une autre tresse.

En outre, nous pouvons retirer les mouvements de Reidemeister dans l'énoncé du théorème puisque nous avons déjà quotienté par ceux-ci dans la définition de B_n .

Remarque 2.3. Il est important de noter que le théorème de Markov n'est valable que pour des entrelacs orientés. Deux tresses peuvent avoir des fermetures isotopes si nous ne considérons pas l'orientation et nous ne pouvons pas pour autant aller de l'une à l'autre par des mouvements de Markov.

Hélas, trouver la séquence de mouvements pour passer d'une tresse à l'autre n'est pas complètement évident à la vue. Il est d'autant plus difficile de montrer que deux tresses n'ont pas une fermeture isotope. Nous avons besoin d'autres outils pour caractériser la classe d'isotopie de la fermeture d'une tresse. Un de ces outils est le sujet du chapitre 4.

Exemple 2.1. Le nœud en huit est un entrelacs à une seule composante défini par la classe d'équivalence du diagramme représenté ci-dessous, en Figure 2.15.

2. Le groupe des tresses

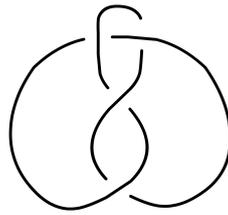
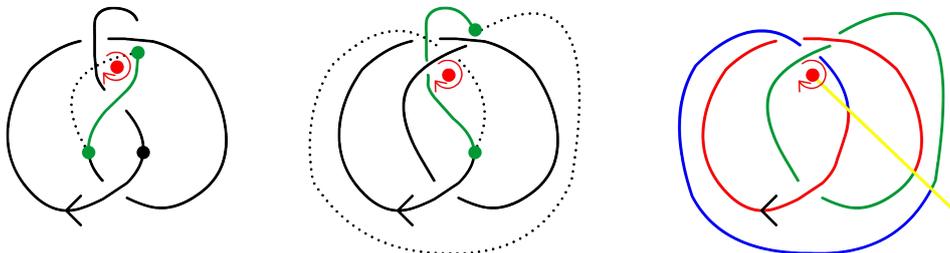
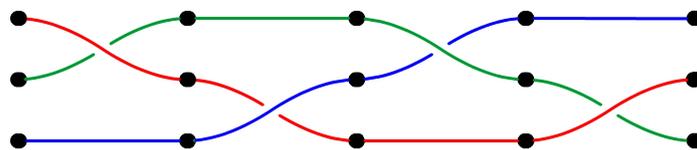


FIGURE 2.15: Un diagramme du noeud en huit.

Tout d'abord, nous lui donnons une orientation et nous lui appliquons l'algorithme de la preuve du théorème d'Alexander 2.7 afin de le transformer en fermeture d'une tresse. Nous choisissons un point de départ pour parcourir le noeud (en noir) et nous plaçons une origine autour de laquelle nous tournerons dans un sens qui conserve l'orientation. Pour les deux premières étapes, nous avons en vert l'ancienne position du noeud et en pointillé la nouvelle. Par exemple, sur la première étape, nous voyons que la partie en vert commence à ne plus suivre l'orientation, nous la déformons donc pour la faire passer de l'autre côté de l'axe en rouge, en prenant garde à ne pas créer d'intersection pendant le mouvement, et nous obtenons alors la partie en pointillés.

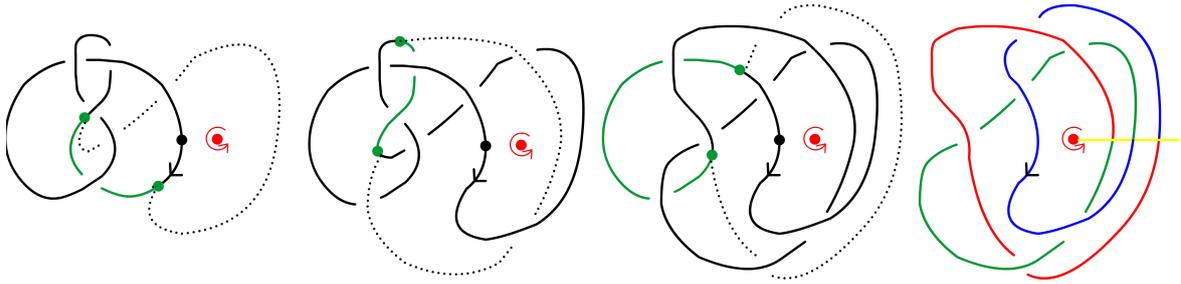


Ce qui nous donne la tresse $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$.

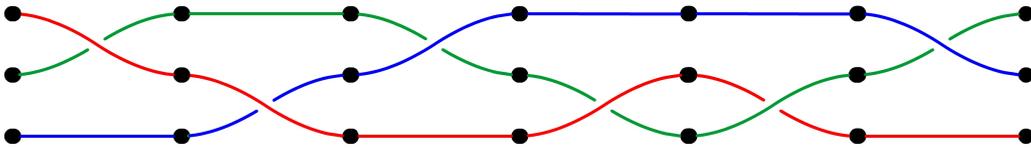


Nous lui appliquons ensuite l'algorithme d'une autre façon, en choisissant une autre origine. Nous devons dès lors tourner autour dans l'autre sens pour conserver l'orientation du noeud.

2.4. Mouvements de Markov



Puisque fermer le diagramme à gauche ou à droite est équivalent (il suffit de rabattre les brins d'un côté ou de l'autre), cela nous donne la tresse $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$.



Par un calcul, nous obtenons que

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1} = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2$$

et donc

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1 = \sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1.$$

En fermant la tresse et en appliquant un mouvement de Markov de type 1 avec $\beta = \sigma_1$, nous obtenons

$$F(\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1) = F(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1})$$

ce qui respecte bien ce que nous avons affirmé avant.

3 Algèbres de Hecke

Dans ce chapitre, nous introduisons la notion d'algèbre de Hecke qui est importante en mathématiques et qui trouve des applications en géométrie et en théorie des représentations. Nous construisons une représentation du groupe des tresses dans une algèbre de Hecke et nous construisons une trace d'un type spécial de cette représentation, appelée trace d'Ocneanu, qui nous sera utile pour le chapitre suivant.

3.1 Algèbres de Hecke

Définition 3.1. Soit R un anneau commutatif contenant un élément $q \in R^\times$, où R^\times sont les éléments inversibles de R . Fixons aussi $n \geq 1$. L'algèbre de Iwahori-Hecke $H_n^R(q)$ est le R -algèbre associatif unitaire engendré par les éléments T_1, \dots, T_{n-1} et les relations

$$T_i T_j = T_j T_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| \geq 2, \quad (3.1)$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1} \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \quad (3.2)$$

$$T_i^2 = (q-1)T_i + q \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1. \quad (3.3)$$

Pour plus de facilité, nous notons $H_n = H_n^R(q)$, en supposant que R et q sont fixés. Afin d'éviter toute confusion, si ce n'est pas clair du contexte, nous notons aussi $T_0 = 1_{H_{n+1}}$, c'est-à-dire le mot vide, qui est différent du neutre de R , noté 1 ou 1_R . Avec ces notations, la relation (3.3) s'écrit alors $1_R T_i^2 = (q-1)T_i + qT_0$.

Nous introduisons quelques résultats intéressants dont les preuves sont inspirées de [KT] pour étudier la structure de cette algèbre et qui nous seront utiles par la suite.

Proposition 3.1. L'élément $T_i \in H_n$ est inversible et d'inverse $T_i^{-1} = q^{-1}(T_i - q + 1)$.

Démonstration. En effet, cela donne par (3.3)

$$\begin{aligned} T_i T_i^{-1} &= T_i q^{-1}(T_i - q + 1) = q^{-1} T_i^2 - T_i + q^{-1} T_i = q^{-1}((q-1)T_i + q) - T_i + q^{-1} T_i \\ &= T_i - q^{-1} T_i + 1 - T_i + q^{-1} T_i = 1. \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour $T_i^{-1} T_i$. □

Remarque 3.1. Tout comme nous avons plongé B_n dans B_{n+1} , nous pouvons plonger H_n dans H_{n+1} par un monomorphisme qui envoie $T_i \in H_n$ sur $T_i \in H_{n+1}$.

Proposition 3.2. La dimension du R -module libre à gauche engendré par H_n est $n!$.

Démonstration. De par la définition de H_n , c'est un R -module à gauche.

Observons en plus que le groupe symétrique S_n est un groupe généré par $n-1$ générateurs s_1, \dots, s_{n-1} et par les relations

$$\begin{aligned} s_i s_j &= s_j s_i && \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| \geq 2, \\ s_i s_{i+1} s_i &= s_{i+1} s_i s_{i+1} && \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \\ s_i^2 &= 1 && \text{pour } 1 \leq i \leq n-1. \end{aligned}$$

3. Algèbres de Hecke

Nous construisons alors une application d'ensembles

$$S : S_n \rightarrow H_n$$

en envoyant $w \in S_n$, qui admet une expression réduite $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$, vers $T_{i_1} \dots T_{i_r} \in H_n$. Cette opération est bien définie puisque si un élément de S_n admet deux expressions réduites, nous savons qu'alors elles diffèrent par des opérations du type $s_i s_j \leftrightarrow s_j s_i$ ou $s_i s_{i+1} s_i \leftrightarrow s_{i+1} s_i s_{i+1}$ [KT] et que nous avons quotienté par ces relations dans notre définition d'algèbre de Hecke. De plus, nous ne pouvons pas avoir deux T_i consécutifs, même après avoir appliqué dessus (3.1) ou (3.2) car sinon nous pourrions avoir s_i^2 qui se réduit en 1 et $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ ne serait pas une forme réduite. En outre, puisque nous ne pouvons pas avoir de T_i^2 dans notre expression, cela signifie que $S(w)$ ne peut pas s'écrire sous forme d'une combinaison linéaire d'éléments de H_n autre que $T_{i_1} \dots T_{i_r}$, ce qui montre l'indépendance linéaire de ces éléments. Et donc, puisque l'ordre de S_n est $n!$ [KT], nous obtenons

$$\dim(H_n) \geq n!.$$

Par ailleurs, tout élément de H_n s'écrit sous forme de

$$x_1 T_{i_{1,1}} \dots T_{i_{1,r_1}} + \dots + x_k T_{i_{k,1}} \dots T_{i_{k,r_k}}$$

où $x_j \in R$ et où nous n'avons jamais deux T_i consécutifs, sinon nous appliquons (3.3) et nous obtenons une expression de cette forme. Dès lors, pour tout $1 \leq j \leq r$, $s_{i_{j,1}} \dots s_{i_{j,r_1}} \in S_n$ est une forme réduite et donc nous obtenons que c'est équivalent à

$$x_1 S(s_{i_{1,1}} \dots s_{i_{1,r_1}}) + \dots + x_k S(s_{i_{k,1}} \dots s_{i_{k,r_k}}).$$

Ce qui nous permet d'affirmer que

$$\dim(H_n) \leq n!.$$

Nous en concluons que H_n possède une base indexée par les formes réduites de S_n et donc que c'est un R -module libre. \square

Remarque 3.2. En fait, nous avons même montré que $\{T_{i_1} \dots T_{i_r}\}_{s_{i_1} \dots s_{i_r} \in S_n}$, où les $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ sont des formes réduites, constituent une base de H_n .

Notons $T_w = S(w)$ pour $w \in S_n$, avec $T_{s_i s_i^{-1}} = T_0$.

Proposition 3.3. *La multiplication de deux éléments de la base de la Remarque 3.2 est donnée par*

$$T_w T_{s_i} = \begin{cases} T_{ws_i} & \text{si } \lambda(w) < \lambda(ws_i) \\ (q-1)T_w + qT_{ws_i} & \text{si } \lambda(w) > \lambda(ws_i) \end{cases}$$

où $\lambda(w)$ est la longueur de la forme réduite de w , c'est-à-dire le nombre d'éléments s_i qui la composent.

Démonstration. Pour $w \in S_n$, posons $w = s_{i_1} \dots s_{i_r}$ sa forme réduite. Le cas $\lambda(w) < \lambda(ws_i)$ est immédiat puisque $s_{i_1} \dots s_{i_r} s_i$ est une forme réduite et donc $T_{ws_i} = T_{i_1} \dots T_{i_r} T_{s_i} = T_w T_{s_i}$. Si $\lambda(w) > \lambda(ws_i)$, cela signifie que nous avons pu réduire $s_{i_1} \dots s_{i_r} s_i$ mais pas $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ et donc que s_i s'annule avec un autre. Dès lors, nous avons que $w = w' s_i$ où $w' s_i$ est réduit et donc, par ce que nous venons de dire, $T_w = T_{w'} T_{s_i}$. En outre, nous avons que $T_{ws_i} = T_{w' s_i^2} = T_{w'}$ et donc cela nous donne

$$T_w T_{s_i} = T_{w'} T_{s_i} T_{s_i} = T_{w'} T_i^2 = (q-1)T_{w'} T_i + qT_{w'} = (q-1)T_w + qT_{ws_i}.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

3.1. Algèbres de Hecke

Proposition 3.4. H_{n+1} forme un H_n -module libre à gauche de dimension $n + 1$.

Démonstration. Nous savons [KT] que tout élément $w \in S_{n+1}$ contenant au moins un s_n dans sa forme réduite est donné par $w = w's_n s_{n-1} \dots s_k$ pour un certain $w' \in S_n$ et un $n \leq k \leq 1$.

Nous affirmons que

$$T_w = T_{w'} T_{s_n} T_{s_{n-1}} \dots T_{s_k}$$

où $T_{w'} \in H_n$.

En effet, puisque $w'(n) < w'(n+1)$, où $w(x)$ est la permutation de l'élément $x \in \mathbb{N}$ par w , par un résultat connu [KT], cela signifie que $\lambda(w's_n) > \lambda(w')$. De plus, pour tout $k \leq i \leq n$, nous avons

$$w's_n s_{n-1} \dots s_{i+1}(i) = w'(i) < n + 1 = w'(n+1) = w's_n s_{n-1} \dots s_{i+1}(i+1)$$

et donc

$$\lambda(w's_n s_{n-1} \dots s_{i+1} s_i) > \lambda(w's_n s_{n-1} \dots s_{i+1}).$$

Puisque c'est vrai pour tout i , si $s_{i_1} \dots s_{i_r}$ est une forme réduite de w' . Cela signifie que $s_{i_1} \dots s_{i_r} s_n s_{n-1} \dots s_k$ est une forme réduite de w et l'égalité est prouvée.

Par ailleurs, puisque les T_w pour $w \in S_{n+1}$ sont linéairement indépendants, les $T_{s_n} T_{s_{n-1}} \dots T_{s_k}$ pour différents $n \leq k \leq 1$ le sont aussi. En conclusion, tout élément de H_{n+1} est une combinaison linéaire d'éléments de H_n multipliés par des $T_{s_n} T_{s_{n-1}} \dots T_{s_k}$ ou par T_0 et donc H_{n+1} est un H_n -module libre à gauche de dimension $n + 1$. \square

Remarque 3.3. Par cette preuve, nous avons en plus montré que tout élément de la base de la Remarque 3.2 pour H_n contient au plus un T_{n-1} et que ceux en possédant un se présentent sous forme $T_{w_k} T_{s_n} T_{s_{n-1}} \dots T_{s_k}$ pour les $1 \leq k \leq n - 1$ et des $T_{w_k} \in H_{n-1}$.

Intéressons nous maintenant à comment lier une algèbre de Hecke et le groupe des tresses. Cela se fait au travers d'une représentation de B_n dans H_n .

Définition 3.2. Soit G un groupe. Un G -module consiste en un groupe abélien M et une action de groupe $p : G \times M \rightarrow M$ tels que pour tout $g \in G$ et pour tout $m, m' \in M$

$$p(g, m + m') = p(g, m) + p(g, m').$$

Dans notre cas, nous considérons des B_n -modules engendrés par une algèbre de Hecke et nous l'appelons une représentation de B_n dans H_n .

La prochaine proposition est importante dans notre travail car elle montre que nous pouvons représenter le groupe des tresses dans une algèbre de Hecke. Cela nous sera utile par la suite pour créer un polynôme invariant pour la fermeture d'une tresse à partir d'une trace définie dans une algèbre de Hecke.

Proposition 3.5. Pour $\lambda \in R^\times$, posons l'application $\rho : B_n \rightarrow H_n$ définie par

$$\rho \left(\sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k} \right) = \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k}.$$

La multiplication à gauche par l'élément $\rho(\alpha)$ pour $\alpha \in B_n$ engendre une représentation de B_n dans H_n .

3. Algèbres de Hecke

Démonstration. L'application ρ est bien définie en conséquence des relations (3.1) et (3.2) et de

$$\rho(\sigma_i \sigma_i^{-1}) = \lambda T_i \lambda^{-1} T_i^{-1} = \lambda \lambda^{-1} T_i T_{i+1} = 1 = \rho(1).$$

Dès lors, deux tresses équivalentes donnent le même élément dans H_n . Notons $r(\alpha) : H_n \rightarrow H_n$ la multiplication à gauche par l'élément $\rho(\alpha)$. Il est alors évident que nous avons

$$r(\alpha\beta) = r(\alpha)r(\beta)$$

pour tout $\alpha, \beta \in B_n$ puisque, en écrivant $\alpha = \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k}$ et $\beta = \sigma_{i'_1}^{j'_1} \dots \sigma_{i'_l}^{j'_l}$, nous obtenons pour tout $a \in H_n$

$$\begin{aligned} r(\alpha\beta)(a) &= \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k} \lambda^{j'_1} T_{i'_1}^{j'_1} \dots \lambda^{j'_l} T_{i'_l}^{j'_l} a = \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k} r(\beta)(a) = r(\alpha)(r(\beta)(a)) \\ &= (r(\alpha)r(\beta))(a). \end{aligned}$$

Nous vérifions aisément aussi que

$$r(1)(a) = 1_R a = a.$$

Et donc r est une action de groupe. Il ne nous reste plus qu'à vérifier que pour $\alpha = \sigma_{i_1}^{j_1} \dots \sigma_{i_k}^{j_k}$ et $a, b \in H_n$

$$r(\alpha)(a+b) = \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k} (a+b) = \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k} a + \lambda^{j_1} T_{i_1}^{j_1} \dots \lambda^{j_k} T_{i_k}^{j_k} b = r(\alpha)(a) + r(\alpha)(b)$$

qui se justifie par les propriétés de la multiplication dans une algèbre associative. \square

Le dernier résultat de cette section est intéressant pour approfondir notre compréhension des liens entre algèbre de Hecke et groupe des tresses.

Proposition 3.6. *Il existe un épimorphisme de $R[B_n]$ dans H_n où $R[B_n]$ est l'algèbre de groupe engendré par les combinaisons linéaires d'éléments de B_n à coefficients dans R .*

Démonstration. Nous avons observé que H_n est défini par les combinaisons linéaires du type

$$x_1 T_{i_1,1} \dots T_{i_1,r_1} + \dots + x_k T_{i_k,1} \dots T_{i_k,r_k}$$

où $x_j \in R$, quotientées par (3.1), (3.2) et (3.3).

Dès lors, puisque nous retrouvons (3.1) et (3.2) dans B_n et que nous pouvons le représenter dans H_n , en prenant $\lambda = 1$, nous pouvons voir H_n comme l'algèbre engendré par B_n , c'est-à-dire $R[B_n]$, quotienté par la relation $\sigma_i^2 - (q-1)\sigma_i - q = 0$ qui est équivalente à la relation (3.3). Ce qui nous donne

$$H_n \simeq \frac{R[B_n]}{\{\sigma_i^2 - (q-1)\sigma_i - q\}}.$$

Pour conclure, nous pouvons affirmer que la représentation avec $\lambda = 1$ de B_n dans H_n induit un homomorphisme surjectif de $R[B_n]$ dans H_n . \square

3.2 Traces d'Ocneanu

Dans cette section, nous construisons la trace dont nous aurons besoin pour créer le polynôme invariant.

Définition 3.3. La trace d'Ocneanu de paramètre $y \in R$ est définie par $\text{tr} : \bigcup_{n=1}^{\infty} H_n \rightarrow R$ application linéaire telle que

$$\text{tr}(ab) = \text{tr}(ba) \quad (3.4)$$

pour tout $a, b \in H_n$,

$$\text{tr}(1_R) = 1 \quad (3.5)$$

et

$$\text{tr}(xT_n) = y \text{tr}(x) \quad (3.6)$$

pour $x \in H_n$.

Remarque 3.4. Il est important de noter que $\text{tr}(1_R) = 1$ est différent de $\text{tr}(T_0) = \text{tr}(T_n^{-1}T_n) = y(q^{-1}y - 1 + q^{-1})$.

Notons la similitude entre (3.4) et le mouvement de Markov de type 1 ainsi qu'entre (3.6) et le mouvement de Markov de type 2. En effet, c'est cette trace qui nous permettra de construire le polynôme invariant. Mais avant toute chose, nous devons nous assurer que cette trace existe et est définie uniquement par les relations (3.4-3.6). Pour montrer cela, nous utilisons une démarche similaire à ce qui se trouve dans [J] et qui utilise le résultat suivant.

Lemme 3.7. Pour $n \geq 2$, il existe un isomorphisme de H_n -modules entre H_{n+1} et $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ donné par

$$\phi(a \oplus b \otimes c) = a + bT_n c$$

pour $a, b, c \in H_n$.

Démonstration. Nous observons que pour $a, c \in H_n$ et $b \in H_{n-1}$, par (3.1),

$$\phi(ab \otimes c) = abT_n c = aT_n b c = \phi(a \otimes bc)$$

et donc ϕ est bien défini. Par la Proposition 3.4, H_{n+1} est un H_n -module à gauche de dimension $n + 1$ et il est évident que $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ en est un aussi de base

$$\{1\} \amalg \{1 \otimes 1, 1 \otimes T_{n-1}, 1 \otimes T_{n-1}T_{n-2}, \dots, 1 \otimes T_{n-1} \dots T_1\}$$

puisque par la Remarque 3.3 tout élément $T_w \in H_n$ contenant au moins un T_{n-1} peut s'écrire sous forme $T_w = T_{w'} T_{s_{n-1}} \dots T_{s_k}$ avec $T_{w'} \in H_{n-1}$ et $1 \leq k \leq n - 1$. Il est aussi évident que ϕ est un morphisme de H_n -modules à gauche puisque

$$\phi(x(a \oplus b \otimes c) + y(a' \oplus b' \otimes c')) = x(a + bT_n c) + y(a' + b'T_n c') = x\phi(a \oplus b \otimes c) + y\phi(a' \oplus b' \otimes c').$$

En outre, la surjectivité est immédiate puisque tout élément de la base de H_{n+1} donnée en Remarque 3.3 contient au plus un T_n et nous obtenons l'injectivité par égalité des dimensions. \square

3. Algèbres de Hecke

Proposition 3.8. *La trace d'Ocneanu existe pour tout $y \in R$ et est définie uniquement par les relations (3.4 - 3.6).*

Démonstration. Par le Lemme 3.7, nous avons un isomorphisme de H_n -module entre H_{n+1} et $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ et nous pouvons dès lors définir récursivement une trace linéaire tr_{n+1} sur $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ par

$$\text{tr}_{n+1}(a \oplus b \otimes c) = \text{tr}_n(\phi^{-1}(a)) + y \text{tr}_n(\phi^{-1}(bc)) \quad (3.7)$$

où $a, b, c \in H_n$ et

$$\text{tr}_1(1_R) = 1.$$

Cela nous donne une façon unique de calculer la trace pour un élément de $H_n \oplus H_n \otimes_{H_{n-1}} H_n$ en diminuant n par récurrence et par linéarité. Nous pouvons alors l'appliquer à des éléments de H_{n+1} en passant par notre isomorphisme. Nous allons maintenant montrer que $\text{tr}_{n+1}(aT_i) = \text{tr}_{n+1}(T_i a)$ pour $a \in H_{n+1}$ et pour tout $1 \leq i \leq n$ afin que cette trace respecte (3.4) et donc corresponde à la trace d'Ocneanu puisqu'elle respecte déjà (3.5) et (3.6) par définition.

Dans un soucis de lisibilité, nous faisons l'abus de notation de laisser tomber le n dans tr_n ainsi que le ϕ pour directement travailler avec des éléments de H_{n+1} , ce que nous pouvons faire puisque pour tout $i < n$, $\text{tr}_{n+1}(\phi(T_i)) = \text{tr}_n(\phi(T_i))$. Et donc l'élément T_i d'indice maximum définira la trace que nous utilisons après avoir appliqué l'isomorphisme.

Pour $n = 1$ c'est évident. Supposons par induction que c'est vrai pour n . Si $a \in H_n$, c'est vrai par induction pour tout $i < n$ et nous avons par définition que

$$\text{tr}(aT_n) = y \text{tr}(T_n) = \text{tr}(T_n a).$$

Si $a \in H_{n+1}$, nous pouvons réécrire $a = bT_n c$ avec $b, c \in H_n$ de par la remarque 3.2. Pour $1 \leq i < n$ c'est vrai par (3.1) puisque nous avons

$$\text{tr}(bT_n c T_i) \stackrel{(3.7)}{=} y \text{tr}(bc T_i) \stackrel{(3.1)}{=} y \text{tr}(T_i bc) \stackrel{(3.7)}{=} \text{tr}(T_i b T_n c)$$

par induction.

Il ne nous reste plus qu'à observer le cas $\text{tr}(bT_n c T_n) = \text{tr}(T_n b T_n c)$. Mais à nouveau, par linéarité de la trace et l'isomorphisme que nous avons observé, nous pouvons nous restreindre aux 4 cas suivants.

Si $b, c \in H_{n-1}$, nous avons alors par (3.1) directement la solution souhaitée.

Si $b = b'T_{n-1}b'' \in H_n$ avec $b', b'' \in H_{n-1}$ et $c \in H_{n-1}$, nous avons alors

$$\begin{aligned} \text{tr}(b'T_{n-1}b''T_n c T_n) &\stackrel{(3.1)}{=} \text{tr}(b'T_{n-1}b''T_n^2 c) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} (q-1) \text{tr}(b'T_{n-1}b''T_n c) + q \text{tr}(b'T_{n-1}b'' c) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} y^2(q-1) \text{tr}(b'b'' c) + qy \text{tr}(b'b'' c) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \text{tr}(T_n b'T_{n-1}b''T_n c) &\stackrel{(3.1)}{=} \text{tr}(b'T_n T_{n-1} T_n b'' c) \\ &\stackrel{(3.2)}{=} \text{tr}(b'T_{n-1} T_n T_{n-1} b'' c) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} y \text{tr}(b'T_{n-1}^2 b'' c) \\ &\stackrel{(3.3)}{=} y(q-1) \text{tr}(b'T_{n-1}b'' c) + yq \text{tr}(b'b'' c) \\ &\stackrel{(3.7)}{=} y^2(q-1) \text{tr}(b'b'' c) + yq \text{tr}(b'b'' c). \end{aligned}$$

3.2. Traces d'Ocneanu

Nous avons le même calcul en inversant le rôle de b et c .

Enfin, nous avons le cas $b = b'T_{n-1}b'' \in H_n$ et $c = c'T_{n-1}c'' \in H_n$ avec $b', b'', c', c'' \in H_{n-1}$ et donc, par des calculs similaires, nous obtenons

$$\mathrm{tr}(b'T_{n-1}b''T_n c'T_{n-1}c''T_n) = y(q-1) \mathrm{tr}(b'T_{n-1}b'' c'T_{n-1}c'') + y^2 q \mathrm{tr}(b'b'' c'c'')$$

et

$$\mathrm{tr}(T_n b'T_{n-1}b''T_n c'T_{n-1}c'') = y(q-1) \mathrm{tr}(b'T_{n-1}b'' c'T_{n-1}c'') + y^2 q \mathrm{tr}(b'b'' c'c'').$$

Nous en concluons que cette trace est la trace d'Ocneanu qui est alors bien définie et unique pour un paramètre y fixé. \square

Exemple 3.1. Pour appuyer nos dires, nous calculons la trace d'un élément $T_2 T_1^{-1} T_2 T_3 \in H_n$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(T_2 T_1^{-1} T_2 T_3) &= y \mathrm{tr}(T_2 T_1^{-1} T_2) \\ &= y \mathrm{tr}(T_2^2 T_1^{-1}) \\ &= y \mathrm{tr}(((q-1)T_2 + q)T_1^{-1}) \\ &= y(q-1) \mathrm{tr}(T_1^{-1} T_2) + yq \mathrm{tr}(T_1^{-1}) \\ &= (y^2(q-1) + yq) \mathrm{tr}(T_1^{-1}) \\ &= (y^2(q-1) + yq)q^{-1} \mathrm{tr}(T_1 - q + 1) \\ &= (y^2(q-1) + yq)q^{-1}(y - q + 1) \\ &= -y^3 q^{-1} + y^3 - y^2 q - y^2 q^{-1} + 3y^2 - yq + y. \end{aligned}$$

4 Polynôme de HOMFLY-PT

4.1 Polynôme de HOMFLY-PT

Dans cette section, nous construisons un polynôme de Laurent invariant pour les entrelacs, c'est-à-dire un polynôme à deux variables d'exposants entiers (donc potentiellement négatifs). Ainsi celui-ci nous permet de dire que deux entrelacs sont différents puisque si leur polynôme est différent ils le seront aussi. Mais l'inverse est faux, deux entrelacs différents peuvent avoir le même polynôme.

Proposition 4.1. *A toute tresse nous pouvons associer un polynôme invariant sous mouvement de Markov, c'est-à-dire un polynôme invariant pour la fermeture de la tresse.*

Démonstration. Posons $\rho : B_n \rightarrow H_n$ défini par

$$\rho(\sigma_i) = \lambda T_i$$

où

$$\lambda^2 = q^{-1} + q^{-1}y^{-1} - y^{-1}$$

et considérons la représentation donnée par la multiplication à gauche par cet élément. Il est important de noter que nous devons alors nous restreindre à une algèbre de Hecke défini sur un anneau R contenant un tel λ ainsi que λ^{-1} .

Nous justifions le choix de λ par le fait que nous voulons que, pour $\alpha \in B_n$,

$$\text{tr}(\rho(\alpha\sigma_n)) = \text{tr}(\rho(\alpha\sigma_n^{-1}))$$

et donc nous calculons

$$\text{tr}(\rho(\alpha\sigma_n)) = \lambda y \text{tr}(\rho(\alpha))$$

et, puisque $\rho(\sigma_i^{-1}) = \lambda^{-1}T_i^{-1}$, nous avons

$$\text{tr}(\rho(\alpha\sigma_n^{-1})) = \lambda^{-1} \text{tr}(\rho(\alpha)T_n^{-1}) = \lambda^{-1}(q^{-1}y + q^{-1} - 1) \text{tr}(\rho(\alpha)).$$

Cela revient à

$$\lambda y = \lambda^{-1}(q^{-1}y + q^{-1} - 1)$$

qui nous donne le λ cherché.

Maintenant, nous voulons avoir une fonction $Q : \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \rightarrow R$ telle que

$$Q(\alpha\sigma_n) = Q(\alpha) = Q(\alpha\sigma_n^{-1}).$$

Nous obtenons par un calcul simple que

$$y = \frac{1 - q}{\lambda^2 q - 1}.$$

Nous définissons donc Q comme

$$Q(\alpha) = \left(\frac{1}{y\lambda}\right)^{n-1} \text{tr}(\rho(\alpha)) = \left(\frac{\lambda^2 q - 1}{\lambda(1 - q)}\right)^{n-1} \text{tr}(\rho(\alpha))$$

4. Polynôme de HOMFLY-PT

pour $\alpha \in B_n$ et en devant à nous restreindre notre choix de R afin que $y \in R^\times$.
Nous avons alors bien

$$Q(\alpha) = Q(\alpha\sigma_n) = Q(\alpha\sigma_n^{-1})$$

puisque

$$Q(\alpha\sigma_n) = \left(\frac{\lambda^2 q - 1}{\lambda(1-q)} \right)^n y \lambda \operatorname{tr}(\rho(\alpha)) = \left(\frac{\lambda^2 q - 1}{\lambda(1-q)} \right)^{n-1} \operatorname{tr}(\rho(\alpha)) = Q(\alpha).$$

Et donc nous obtenons une fonction invariante sous mouvement de Markov de type 2.
Pour $\alpha, \beta \in B_n$, nous calculons grâce à (3.4)

$$\operatorname{tr}(\rho(\beta\alpha\beta^{-1})) = \operatorname{tr}(\rho(\beta)\rho(\alpha)\rho(\beta^{-1})) = \operatorname{tr}(\rho(\beta^{-1})\rho(\beta)\rho(\alpha)) = \operatorname{tr}(\rho(\beta^{-1}\beta)\rho(\alpha)) = \operatorname{tr}(\rho(\alpha))$$

et donc

$$Q(\beta\alpha\beta^{-1}) = Q(\alpha)$$

ce qui donne une fonction invariante sous mouvement de Markov de type 1.

Nous considérons ensuite le polynôme à deux variable, pour L la fermeture de α ,

$$X_L(q, \lambda) = Q(\alpha)$$

où Q varie suivant q et λ . Le paramètre y pouvant être obtenu à partir de ces deux paramètres, l'algèbre de Hecke et la trace d'Oceanu sont bien caractérisés. Par le Théorème de Markov 2.9, cela forme alors un polynôme invariant pour la fermeture d' α puisque appliquer des mouvements de Markov sur la tresse ne modifiera pas le polynôme obtenu. \square

Remarque 4.1. Nous avons du faire beaucoup d'hypothèses sur R pour construire ce polynôme et dès lors il nous faut trouver un tel R pour conclure de l'existence de ce polynôme. Il se révèle que le corps des complexes \mathbb{C} est un très bon candidat pour cela.

Définition 4.1. Nous définissons, pour L la fermeture d'une tresse, le polynôme de HOMFLY-PT comme étant

$$P_L(t, x) = X_L(q, \lambda)$$

avec $t = \lambda\sqrt{q}$ et $x = \sqrt{q} - 1/\sqrt{q}$.

Ce polynôme porte le nom de HOMFLY-PT à cause de ses nombreux créateurs : Lickorish et Millet, Freyd et Yetter, Oceanu, et Hoste [FYH⁺]. Il a été découvert aussi de façon indépendante par Przytycki et Traczyk [PT].

Théorème 4.2. A tout entrelacs orienté L nous pouvons associer un unique polynôme de HOMFLY-PT et celui-ci est défini uniquement par la relation d'écheveau

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = xP_{L_0}$$

et par

$$P_0 = 1$$

où P_0 est le polynôme du nœud trivial et L_+, L_- et L_0 sont des diagrammes d'entrelacs identiques excepté sur un petit disque ne contenant qu'un seul croisement et où ce croisement est inversé entre L_+ et L_- et où il n'est pas présent dans L_0 .

4.1. Polynôme de HOMFLY-PT

Visuellement, la relation d'écheveau donne

$$t^{-1} \text{P} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) - t \text{P} \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \\ \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right) = x \text{P} \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right).$$

Pour cette définition, nous avons besoin de l'existence de \sqrt{q} que nous pouvons obtenir soit en choisissant d'utiliser un q^2 pour nos algèbres de Hecke, soit en prenant à nouveau un R comme \mathbb{C} dont chaque élément admet une racine.

Démonstration. Soit L un entrelacs. Par le théorème d'Alexander 2.7, il existe une tresse dont la fermeture est isotope à L . Si deux tresses α et β ont une fermeture isotope à L , par le théorème de Markov 2.9 nous pouvons obtenir l'une à partir de l'autre par une série de mouvements de Markov et par la Proposition 4.1 leur polynôme $X_L(q, \lambda)$ est le même. Dès lors, $P_L(t, x)$ doit l'être aussi.

Montrons maintenant que le polynôme respecte la relation d'écheveau. Considérons 3 diagrammes d'entrelacs L_+, L_- et L_0 qui diffèrent à un croisement près. Nous leur appliquons l'algorithme du théorème d'Alexander dessus, c'est-à-dire la méthode utilisée dans l'idée de la preuve du Théorème 2.7, en positionnant l'axe et en choisissant une orientation de sorte que les tresses associées de L_+, L_- et L_0 soient données respectivement par $\alpha\sigma_i, \alpha\sigma_i^{-1}$ et α (cela peut se faire en positionnant l'axe à côté du croisement qui diffère). Nous avons dès lors que

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = \lambda^{-1}\sqrt{q}^{-1}Q(\alpha\sigma_i) - \lambda\sqrt{q}Q(\alpha\sigma_i^{-1}).$$

Nous calculons

$$\begin{aligned} Q(\alpha\sigma_i) &= \lambda \text{tr}(\rho(\alpha)T_i) \\ Q(\alpha\sigma_i^{-1}) &= \lambda^{-1}q^{-1} \text{tr}(\rho(\alpha)(T_i - q + 1)) = \lambda^{-1}q^{-1} \text{tr}(\rho(\alpha)(T_i)) - \lambda^{-1}(q^{-1} - 1) \text{tr}(\rho(\alpha)) \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$t^{-1}P_{L_+} - tP_{L_-} = (q^{1/2} - q^{-1/2}) \text{tr}(\rho(\alpha)) = xP_{L_0}.$$

Nous allons maintenant montrer par récurrence que cette relation permet de calculer à elle seule le polynôme de tout entrelacs. Par le théorème d'Alexander, nous obtenons une tresse $\alpha \in B_n$ pour un entrelacs donné L .

Si $n = 1$, L est le nœud trivial et son polynôme vaut 1. Si $n = 2$, la tresse α se présente sous la forme $\alpha = \sigma_1^k$. Si $k = 0$, la relation d'écheveau nous dit que

$$\text{P} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right) = x^{-1} \left(t^{-1} \text{P} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circlearrowleft \text{---} \\ \text{---} \circlearrowright \text{---} \end{array} \right) - t \text{P} \left(\begin{array}{c} \text{---} \circlearrowright \text{---} \\ \text{---} \circlearrowleft \text{---} \end{array} \right) \right)$$

et donc nous avons par un mouvement de Reidemeister de type 1

$$\text{P}(F(\alpha)) = x^{-1}(t^{-1} - t).$$

4. Polynôme de HOMFLY-PT

Si $k = \pm 1$, nous avons directement par un mouvement de Reidemeister de type 1 que le polynôme de L est 1. Si $k \geq 2$, nous avons par la relation d'écheveau que

$$P \left(\begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) = tx P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) + t^2 P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right)$$

et donc, puisque $\sigma_1 \sigma_1^{-1} = 1$,

$$P(F(\alpha)) = tx P(F(\sigma^{k-1})) + t^2 P(F(\sigma^{k-2})).$$

En répétant l'opération, nous obtiendrons des polynômes pour des fermetures de tresses avec $k = \pm 1$ ou $k = 0$. Le raisonnement est similaire pour $k \leq -2$ avec

$$P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right) = -t^{-1}x P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) + t^{-2} P \left(\begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \nwarrow \end{array} \right).$$

Supposons maintenant que nous savons calculer le polynôme pour des fermetures de tresses à strictement moins de n brins et supposons $\alpha \in B_n$ avec $n \geq 3$.

Considérons alors les deux derniers brins, c'est-à-dire les deux brins le plus à droite dans le diagramme de la tresse. S'il n'y a pas de croisement dedans, nous avons par la relation d'écheveau que

$$P \left(\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \bigcirc \end{array} \right) = x^{-1} \left(t^{-1} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \bigcirc \end{array} \right) - t P \left(\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \bigcirc \end{array} \right) \right)$$

et donc nous pouvons diminuer le nombre de brins par un mouvement de Reidemeister de type 1. Par hypothèse d'induction, nous pouvons alors calculer le polynôme.

S'il n'y a qu'un seul croisement, nous avons directement par un mouvement de Reidemeister de type 1 que le polynôme est égal au polynôme de la fermeture de la tresse dont nous avons retiré le dernier brin et nous pouvons calculer ce polynôme par hypothèse d'induction.

Si nous avons au moins deux croisements, nous pouvons alors en considérer deux adjacents (dans le sens où il n'y a pas d'autres croisements entre eux-ci) et regarder les croisements dans les brins $n-1$ et $n-2$ qui se situent entre les deux croisements considérés (c'est-à-dire regarder les $\sigma_{n-2}^{\pm 1}$ compris entre deux $\sigma_{n-1}^{\pm 1}$). Si nous n'en avons aucun, les deux croisements doivent être de même signe (sinon ils s'annulent par mouvement de Reidemeister de type 2) et nous pouvons les éliminer par la relation d'écheveau, comme nous avons fait pour $n = 1$ et $k \geq 2$. Si nous avons un seul croisement, nous devons maintenant considérer l'exposant de chacun de nos trois croisements. S'ils sont tous de même exposant, nous pouvons leur appliquer un mouvement de Reidemeister de type 3

$$\sigma_{n-1} \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} = \sigma_{n-2} \sigma_{n-1} \sigma_{n-2}$$

$$\sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} = \sigma_{n-2}^{-1} \sigma_{n-1}^{-1} \sigma_{n-2}^{-1}$$

et nous avons diminué le nombre de croisements entre les deux derniers brins.

Si le croisement entre les brins $n-1$ et $n-2$ est d'exposant opposé aux deux autres, nous

4.1. Polynôme de HOMFLY-PT

utilisons la relation d'écheveau sur le croisement d'exposant opposé suivi d'un mouvement de Reidemeister de type 3 et d'encore une fois la relation d'écheveau

$$\begin{aligned} & P(F(\dots\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}\dots)) \\ &= tx P(F(\dots\sigma_{n-1}\sigma_{n-1}\dots)) - t P(F(\dots\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\dots)) \\ &= tx (tx P(F(\dots\sigma_{n-1}\dots)) + t^2 P(F(\dots))) - t P(F(\dots\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\dots)) \end{aligned}$$

et nous avons diminué le nombre de croisements sur les deux derniers brins.

Le calcul est similaire pour $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1}$. Il en va de même pour $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}$ et $\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}^{-1}\sigma_{n-1}^{-1}$ où nous appliquons la relation d'écheveau sur le σ_{n-1} et pour $\sigma_{n-1}^{-1}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}$ et $\sigma_{n-1}\sigma_{n-2}\sigma_{n-1}^{-1}$ où nous l'appliquons sur σ_{n-1}^{-1} .

Si nous avons maintenant plus d'un croisement entre les brins $n-1$ et $n-2$, nous pouvons appliquer un raisonnement similaire avec les brins $n-2$ et $n-3$ et ainsi de suite jusqu'à éventuellement se ramener aux brins 1 et 2 où nous aurons une expression de la forme

$$\dots\sigma_2^{\pm 1}\sigma_1^k\sigma_2^{\pm 1}\dots$$

puisque nous considérons deux croisements adjacents entre les brins 2 et 3. Nous ramenons alors k à 0 ou ± 1 par la relation d'écheveau, comme nous avons déjà fait pour $n=1$ et $k \geq 2$.

Au final, en répétant l'opération autant de fois que nécessaire, nous obtenons des fermetures de tresses avec un seul ou zéro croisement entre les deux derniers brins et nous savons déjà comment diminuer leur nombre de brins. Par hypothèse d'induction, nous pouvons alors calculer le polynôme et la preuve est terminée. \square

Hélas, deux tresses ayant le même polynôme de HOMFLY-PT peuvent ne pas avoir la même fermeture, comme le montre l'Exemple 4.1.

Exemple 4.1. Nous savons [K1, K2] que les deux nœuds représentés en diagramme sur la Figure 4.1 ont le même polynôme de HOMFLY-PT :

$$-x^2t^6 - 2t^6 + x^4t^4 + 4x^2t^4 + 3t^4$$

mais qu'ils sont différents. Cela se prouve en utilisant d'autres invariants

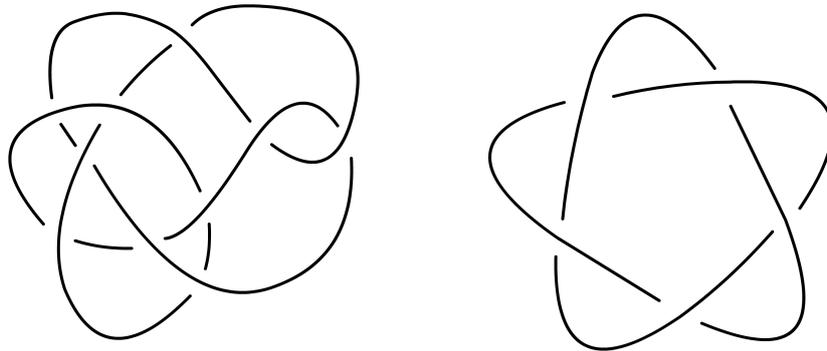


FIGURE 4.1: Ces deux nœuds différents ont la même polynôme de HOMFLY-PT

Le calcul du polynôme se fait aisément en éliminant un à un les croisements par la relation d'écheveau.

4. Polynôme de HOMFLY-PT

4.2 Exemple

L'exemple suivant fournit un développement détaillé du calcul du polynôme de HOMFLY-PT d'un entrelacs.

Reprenons notre Exemple 2.1 avec le nœud en huit et ses deux tresses associées $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}$ et $\sigma_1\sigma_2\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_1$.

Exemple 4.2. Calculons leur polynôme de HOMFLY-PT grâce aux propriétés de l'algèbre de Hecke et de la trace d'Ocneanu

$$\begin{aligned}
\text{tr}(T_1T_2^{-1}T_1T_2^{-1}) &= q^{-1} \text{tr}(T_1T_2^{-1}T_1(T_2 - q + 1)) \\
&= q^{-1} \text{tr}(T_1T_2^{-1}T_1T_2) + (q^{-1} - 1) \text{tr}(T_1^2T_2^{-1}) \\
&= q^{-1} \text{tr}(T_1T_1T_2T_1^{-1}) + (q^{-1} - 1)q^{-1} \text{tr}(T_1^2(T_2 - q + 1)) \\
&= q^{-1} \text{tr}(T_1T_2) + (q^{-2} - q^{-1}) (\text{tr}(T_1^2T_2) + (1 - q) \text{tr}(T_1^2)) \\
&= q^{-1}y^2 + (q^{-2} - q^{-1}) ((y + 1 - q) \text{tr}(T_1^2)) \\
&= q^{-1}y^2 + (q^{-2} - q^{-1}) ((y + 1 - q)((q - 1)y + q)) \\
&= y^2(-1 + 3q^{-1} - q^{-2}) + y(q - 4 + 4q^{-1} - q^{-2}) + (q - 2 + q^{-1}).
\end{aligned}$$

Et par quelques calculs, puisque $t = \lambda\sqrt{q}$ et $x = \sqrt{q} - 1/\sqrt{q}$, ce qui donne $x^2 = q - 2 + 1/q$, nous obtenons

$$\begin{aligned}
Q(\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_1\sigma_2^{-1}) &= \frac{1}{y^2\lambda^2} \text{tr}(T_1T_2^{-1}T_1T_2^{-1}) \\
&= \frac{q}{y^2t^2} (y^2(-1 + 3q^{-1} - q^{-2}) + y(q - 4 + 4q^{-1} - q^{-2}) + (q - 2 + q^{-1})) \\
&= \frac{q}{t^2} \left(\frac{-1}{q}(q - 2 + q^{-1} - 1) + y((1 - q^{-1})(q - 2 + q^{-1} - 1)) + y^2(q - 2 + q^{-1}) \right) \\
&= \frac{q}{t^2} \left(\frac{-1}{q}(x^2 - 1) + \frac{t^2 - 1}{1 - q}((1 - q^{-1})(x^2 - 1)) + \frac{(t^2 - 1)^2}{(1 - q)^2}x^2 \right) \\
&= \frac{q}{t^2} \left(\frac{-1}{q}(x^2 - 1) - \frac{1}{q}(t^2 - 1)(x^2 - 1) + \frac{1}{q} \frac{(t^2 - 1)^2}{(q - 2 + q^{-1})}x^2 \right) \\
&= \frac{1}{t^2} (1 - x^2 - (t^2 - 1)(x^2 - 1) + (t^2 - 1)^2) \\
&= -1 - x^2 + t^2 + t^{-2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, nous calculons

$$\text{tr}(T_1T_2T_1^{-1}T_2^{-1}T_2^{-1}T_1) = \text{tr}(T_2^{-1}T_1T_2T_2^{-1}T_2^{-1}T_1) = \text{tr}(T_2^{-1}T_1T_2^{-1}T_1)$$

ce qui est la même chose que ce que nous avons calculé pour la première tresse. Nous avons donc que

$$P_{\text{Nœud en huit}}(x, t) = -1 - x^2 + t^2 + t^{-2}.$$

Exemple 4.3. Pour appuyer nos dires, nous calculons maintenant le polynôme grâce à la relation d'écheveau. Il est important de noter que nous pouvons l'utiliser sans nous ramener à une fermeture du tresse. En effet, il suffit d'appliquer l'algorithme du Théorème d'Alexander en plaçant l'origine à côté du croisement que nous considérons pour la relation d'écheveau, d'appliquer la relation, puis de refaire en arrière les étapes de l'algorithme pour

4.2. Exemple

obtenir à nouveau le même diagramme d'entrelacs, au croisement considéré près. Tout d'abord, nous observons que, par la relation d'écheveau,

$$\frac{1}{t} P \left(\text{diagramme 1} \right) - t P \left(\text{diagramme 2} \right) = x P \left(\text{diagramme 3} \right)$$

ce qui nous donne, puisque le polynôme est invariant sous mouvement de Reidemeister, par un mouvement de type 2 puis deux de type 1, que le deuxième entrelacs est le nœud trivial et par un mouvement de type 1 que le troisième est l'entrelacs de Hopf

$$P \left(\text{diagramme 1} \right) = t \left(x P \left(\text{diagramme 2} \right) + t P_0 \right).$$

Nous observons alors que, à nouveau par la relation d'écheveau,

$$\frac{1}{t} P \left(\text{diagramme 4} \right) - t P \left(\text{diagramme 5} \right) = x P \left(\text{diagramme 6} \right)$$

ce qui nous donne par des mouvements de Reidemeister

$$P \left(\text{diagramme 6} \right) = \frac{-1}{t} \left(x P_0 - \frac{1}{t} P \left(\text{diagramme 7} \right) \right).$$

Enfin, nous observons que

$$x P \left(\text{diagramme 7} \right) = \frac{1}{t} P \left(\text{diagramme 8} \right) - t P \left(\text{diagramme 9} \right)$$

et donc

$$P \left(\text{diagramme 7} \right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{t} P_0 - t P_0 \right).$$

Ce qui nous permet de calculer

$$P \left(\text{diagramme 1} \right) = t \left(x \left(\frac{-1}{t} \left(x P_0 - \frac{1}{t} \left(\frac{1}{x} \left(\frac{1}{t} P_0 - t P_0 \right) \right) \right) \right) - t P_0 \right) = -1 - x^2 + t^2 + t^{-2}$$

et donc la relation d'écheveau et la valeur de P_0 nous ont bel et bien permis de calculer le polynôme de HOMFLY-PT, comme attendu.

5 Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke

Dans ce chapitre, nous développons un calcul diagrammatique pour l'algèbre de Hecke, permettant de faciliter les calculs du polynôme de HOMFLY-PT.

5.1 Algèbre de Hecke diagrammatique

Dans la définition de l'algèbre de Hecke par les T_i , nous n'avons pas une base symétrique par rapport à q . En effet, nous avons

$$qT_i^{-1} + q = T_i + 1.$$

Mais en multipliant par \sqrt{q}^{-1} de part et d'autre nous obtenons

$$\sqrt{q}^{-1}(T_i + 1) = \sqrt{q}(T_i^{-1} + 1).$$

Évidemment, cela n'est possible que pour un anneau R contenant q où nous avons en plus $\sqrt{q} \in R^\times$. Nous ne considérons donc que de tels anneaux pour nos algèbres de Hecke par la suite. À nouveau, \mathbb{C} est un bon candidat pour cela.

Définition 5.1. *Nous définissons une nouvelle base b_1, \dots, b_{n-1} de H_n donnée par*

$$b_i = \sqrt{q}^{-1}(T_i + 1).$$

Proposition 5.1. *L'algèbre de Hecke H_n a une présentation par les générateurs b_1, \dots, b_{n-1} et les relations*

$$b_i b_j = b_j b_i \quad \text{pour } 1 \leq i, j \leq n-1 \text{ et } |i-j| \geq 2, \quad (5.1)$$

$$b_i b_{i+1} b_i + b_{i+1} = b_{i+1} b_i b_{i+1} + b_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-2, \quad (5.2)$$

$$b_i^2 = (\sqrt{q} + \sqrt{q}^{-1})b_i \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n-1. \quad (5.3)$$

Démonstration. Nous pouvons observer que

$$\begin{aligned} b_i b_j &= \sqrt{q}^{-1}(T_i + 1)\sqrt{q}^{-1}(T_j + 1) = \sqrt{q}^{-2}(T_i T_j + T_i + T_j + 1) \\ &\stackrel{(3.1)}{=} \sqrt{q}^{-2}(T_j T_i + T_j + T_i + 1) = b_j b_i. \end{aligned}$$

5. Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke

Nous observons aussi que

$$\begin{aligned}
b_i b_{i+1} b_i + b_{i+1} &= \sqrt{q}^{-3} (T_i + 1)(T_{i+1} + 1)(T_i + 1) + \sqrt{q}^{-1} (T_{i+1} + 1) \\
&= \sqrt{q}^{-3} (T_i T_{i+1} T_i + T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i + 2T_i + T_{i+1} + 1 + T_i^2) \\
&\quad + \sqrt{q}^{-1} (T_{i+1} + 1) \\
&= \sqrt{q}^{-3} (T_i T_{i+1} T_i + T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i + 2T_i + T_{i+1} + 1) \\
&\quad + \sqrt{q}^{-3} ((q-1)T_i + q) + \sqrt{q}^{-1} (T_{i+1} + 1) \\
&= \sqrt{q}^{-3} (T_i T_{i+1} T_i + T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i + T_i + T_{i+1} + 1) \\
&\quad + \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1) + \sqrt{q}^{-1} (T_{i+1} + 1) \\
b_{i+1} b_i b_{i+1} + b_i &= \sqrt{q}^{-3} (T_{i+1} + 1)(T_i + 1)(T_{i+1} + 1) + \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1) \\
&= \sqrt{q}^{-3} (T_{i+1} T_i T_{i+1} + T_{i+1} T_i + T_i T_{i+1} + T_{i+1} + T_i + 1) \\
&\quad + \sqrt{q}^{-1} (T_{i+1} + 1) + \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1)
\end{aligned}$$

et donc, par (3.2) nous avons

$$b_i b_{i+1} b_i + b_{i+1} = b_{i+1} b_i b_{i+1} + b_i.$$

Et enfin, nous calculons que

$$\begin{aligned}
b_i^2 &= \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1) \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1) = q^{-1} (T_i^2 + 2T_i + 1) \\
&\stackrel{(3.3)}{=} T_i + q^{-1} T_i + q^{-1} + 1 \\
(\sqrt{q} + \sqrt{q}^{-1}) b_i &= (\sqrt{q} + \sqrt{q}^{-1}) \sqrt{q}^{-1} (T_i + 1) = T_i + q^{-1} T_i + q^{-1} + 1
\end{aligned}$$

et donc

$$b_i^2 = (\sqrt{q} + \sqrt{q}^{-1}) b_i.$$

Ce qui montre que nos relations se vérifient dans H_n . Nous allons maintenant montrer qu'elles suffisent à vérifier les relations (3.1), (3.2) et (3.3). En effet, puisque $T_i = \sqrt{q} b_i - 1$, nous avons que

$$\begin{aligned}
T_i T_j &= (\sqrt{q} b_i - 1)(\sqrt{q} b_j - 1) = q b_i b_j - \sqrt{q} b_i - \sqrt{q} b_j + 1 \\
T_j T_i &= q b_j b_i - \sqrt{q} b_j - \sqrt{q} b_i + 1
\end{aligned}$$

et donc nous obtenons l'égalité (3.1) par (5.1).

Nous avons en outre que

$$\begin{aligned}
T_i T_{i+1} T_i &= (\sqrt{q} b_i - 1)(\sqrt{q} b_{i+1} - 1)(\sqrt{q} b_i - 1) \\
&= \sqrt{q}^3 b_i b_{i+1} b_i - q(b_i b_{i+1} + b_{i+1} b_i) + 2\sqrt{q} b_i + \sqrt{q} b_{i+1} - 1 - q b_i^2 \\
&= \sqrt{q}^3 b_i b_{i+1} b_i - q(b_i b_{i+1} + b_{i+1} b_i) + 2\sqrt{q} b_i + \sqrt{q} b_{i+1} - 1 - (\sqrt{q} + \sqrt{q}^3) b_i \\
&= \sqrt{q}^3 (b_i b_{i+1} b_i - b_i) - q(b_i b_{i+1} + b_{i+1} b_i) + \sqrt{q} b_i + \sqrt{q} b_{i+1} - 1
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{i+1} T_i T_{i+1} &= (\sqrt{q} b_{i+1} - 1)(\sqrt{q} b_i - 1)(\sqrt{q} b_{i+1} - 1) \\
&= \sqrt{q}^3 (b_{i+1} b_i b_{i+1} - b_{i+1}) - q(b_{i+1} b_i + b_i b_{i+1}) + \sqrt{q} b_{i+1} + \sqrt{q} b_i - 1
\end{aligned}$$

et puisque par (5.2) $b_{i+1} b_i b_{i+1} - b_{i+1} = b_i b_{i+1} b_i - b_i$, nous obtenons l'égalité (3.2).

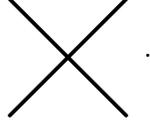
Enfin, nous avons que par (5.3)

$$\begin{aligned}
T_i^2 &= (\sqrt{q} b_i - 1)(\sqrt{q} b_i - 1) = q b_i^2 - 2\sqrt{q} b_i + 1 = \sqrt{q}^3 b_i - \sqrt{q} b_i + 1 \\
(q-1)T_i + q &= (q-1)(\sqrt{q} b_i - 1) + 1 = \sqrt{q}^3 b_i - \sqrt{q} b_i + 1
\end{aligned}$$

et donc la relation (3.3) est vérifiée. \square

5.1. Algèbre de Hecke diagrammatique

Définition 5.2. Un (n, n) 4-diagramme est un diagramme planaire à n brins dont les extrémités sont fixées, qui ne peuvent pas revenir en arrière et qui sont localement homéomorphes soit à un segment $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, soit à

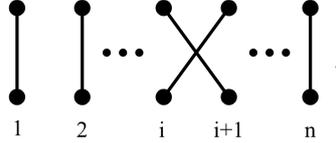


Nous appelons sommets ou croisements les endroits où le diagramme est homéomorphe à ce croisement.

Nous appelons isotopie l'opération qui envoie continument un (n, n) 4-diagramme vers un autre (n, n) 4-diagramme en conservant la structure tout au long du mouvement.

Nous définissons une opération de composition associative qui consiste à joindre deux (n, n) 4-diagrammes bout à bout.

Proposition 5.2. Tout (n, n) 4-diagramme est, à isotopie près, une composition de diagrammes élémentaires



Démonstration. Tout d'abord, notons que pour un diagramme nous avons un nombre fini de sommets. En effet, c'est un compact de \mathbb{R}^2 puisque c'est une union finie de fermés bornés homéomorphes à des segments $[0, 1]$ ou des croisements. Et donc, s'il y avait une infinité de sommets, nous aurions un point d'accumulation de ceux-ci et notre diagramme ne pourrait être ni homéomorphe à un segment, ni au croisement en ce point.

Dès lors, il suffit de décaler nos sommets par isotopie pour ne pas en avoir deux à la même hauteur et nous découpons notre diagramme entre ces sommets. Nous obtenons alors une composition de diagrammes élémentaires. \square

Définition 5.3. Nous appelons algèbre de Hecke diagrammatique, noté $H'_n(q)$, le R -algèbre engendré par des (n, n) 4-diagrammes, à isotopie près, avec les sommets respectant les relations locales suivantes

$$\begin{array}{c} \text{crossing} \end{array} + \begin{array}{c} | \end{array} = \begin{array}{c} \text{crossing} \end{array} + \begin{array}{c} \text{crossing} \end{array} + \begin{array}{c} | \end{array} \tag{5.4}$$

et

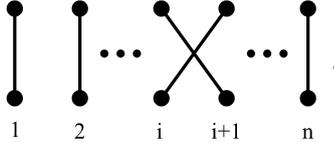
$$\begin{array}{c} \text{link} \end{array} = (\sqrt{q} + \sqrt{q}^{-1}) \begin{array}{c} \text{crossing} \end{array} . \tag{5.5}$$

Notons la ressemblance entre cet algèbre et H_n exprimé dans la base des b_i . En fait, c'est même plus qu'une ressemblance, ces deux algèbres sont isomorphes. Après avoir démontré ce résultat, nous verrons comment le calcul du polynôme de HOMFLY-PT peut se faire avec des diagrammes dans H'_n .

5. Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke

Proposition 5.3. H'_n est isomorphe à H_n .

Démonstration. Il suffit d'envoyer b_i vers



Appelons $D : H_n \rightarrow H'_n$ cette application.

Par la Proposition 5.1, nous avons directement que D est un homomorphisme par équivalence entre les relations (5.2), (5.3) et (5.4), (5.5) et que l'isotopie implique la relation (5.1). De plus, c'est un épimorphisme puisqu'il y a autant de b_i que de diagrammes élémentaires et par la Proposition 5.2 ceux-ci sont une famille génératrice des diagrammes. Il ne nous reste plus qu'à vérifier que la relation (5.1) suffit pour caractériser l'équivalence sous isotopie afin que deux éléments de H'_n proviennent du même élément de H_n , montrant l'injectivité. Déplacer les brins sans déplacer les sommets ne modifie pas les b_i utilisés pour obtenir le diagramme et il en va de même pour un déplacement qui ne modifie pas l'ordre des sommets. Changer l'ordre de deux sommets ne pourra se faire que pour deux sommets qui ne partagent pas de brin, sinon nous sommes obligés d'avoir un brin qui change de direction à un moment. Mais cela est alors équivalent à la relation (5.1). Nous en concluons que D est un isomorphisme. \square

Puisque H'_n et H_n sont isomorphes, nous pouvons observer comment représenter le groupe des tresses dans H'_n .

Proposition 5.4. La représentation de B_n dans H_n utilisée dans la Proposition 4.1 donne dans H'_n la multiplication à gauche par l'élément

$$\begin{aligned} \rho'(\sigma_i) &= t \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) - \sqrt{q}^{-1} \left(\text{Diagram 3} \right) \\ \rho'(\sigma_i^{-1}) &= t^{-1} \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 4} \\ \text{Diagram 5} \end{array} \right) - \sqrt{q} \left(\text{Diagram 6} \right) \end{aligned}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer les définitions et de faire un changement de variables $t = \lambda\sqrt{q}$ pour obtenir

$$\begin{aligned} \rho'(\sigma_i) &= D^{-1}(\rho(\sigma_i)) = D^{-1}(\lambda T_i) = D^{-1}(\lambda(\sqrt{q}b_i - 1)) \\ &= \lambda \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 1} \\ \text{Diagram 2} \end{array} \right) \\ &= t \left(\begin{array}{c} \text{Diagram 3} \\ \text{Diagram 4} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Et le calcul est similaire pour σ_i^{-1} . \square

5.2. Le polynôme de HOMFLY-PT par un calcul graphique

Tout comme nous orientons les diagrammes de tresse de bas en haut, nous orientons les (n, n) 4-diagramme de bas en haut. Visuellement, envoyer un élément de B_n dans H'_n se fait alors par

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \mapsto t \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad -\sqrt{q^{-1}} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \end{array} \right) \\
 \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \mapsto t^{-1} \left(\begin{array}{c} \begin{array}{c} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \quad -\sqrt{q} \begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \end{array} \right).
 \end{array} \tag{5.6}$$

Remarque 5.1. Dès lors, pour envoyer une tresse dans H'_n , il suffit de faire la somme des possibilités où nous remplaçons chaque croisement soit par un sommet, soit par deux brins verticaux, en multipliant par

$$(-1)^{(v^++v^-)} \sqrt{q}^{(v^- - v^+)} t^{(s^++v^+-s^- - v^-)}$$

où

- s^+ = nombre de σ_i remplacés par un sommet,
- s^- = nombre de σ_i^{-1} remplacés par un sommet,
- v^+ = nombre de σ_i remplacés par deux brins verticaux,
- v^- = nombre de σ_i^{-1} remplacés par deux brins verticaux.

Nous obtenons donc une combinaison linéaire de 2^a diagrammes, pour a le nombre de croisements dans le diagramme de la tresse.

5.2 Le polynôme de HOMFLY-PT par un calcul graphique

Tout comme nous avons défini une opération de fermeture sur les diagrammes de tresses, nous pouvons fermer les (n, n) 4-diagrammes et calculer le polynôme de HOMFLY-PT dessus par des relations graphiques du style de la relation d'écheveau. Puisque H'_n est isomorphe à H_n , trouver des relations suffisantes pour calculer le polynôme est suffisant. En effet, nous savons déjà que ce polynôme est unique pour un élément de H_n et donc à fortiori pour des diagrammes de H'_n . Voyons maintenant comment calculer le polynôme de HOMFLY-PT d'un élément de H'_n à partir de sa fermeture.

Proposition 5.5. *Le polynôme de HOMFLY-PT respecte les relations suivantes dans les fermetures de H'_n , où P est le polynôme de la fermeture du diagramme,*

$$P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) = \frac{t^{-1}\sqrt{q} - t\sqrt{q^{-1}}}{x} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right) \tag{5.7}$$

$$P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) = \frac{t^{-1} - t}{x} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array} \right). \tag{5.8}$$

5. Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke

Démonstration. Tout d'abord, observons que par définition du polynôme de HOMFLY-PT dans la Proposition 4.1, nous avons pour $a \in H'_n$,

$$P(a) = \frac{1}{(\lambda y)^{n-1}} \operatorname{tr}(D^{-1}(a)).$$

Nous obtenons (5.7) par le fait que pour tout $a \in H'_n$,

$$\operatorname{tr}(D^{-1}(a)b_n) = \operatorname{tr}\left(D^{-1}(a)\sqrt{q}^{-1}(T_n + 1)\right) \stackrel{(3.6)}{=} \frac{y+1}{\sqrt{q}} \operatorname{tr}(D^{-1}(a))$$

et donc par définition du polynôme de HOMFLY-PT nous avons

$$\begin{aligned} P\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \bigcirc \end{array}\right) &= \frac{1}{(\lambda y)^n} \operatorname{tr}(D^{-1}(a)b_n) = \frac{y+1}{\lambda\sqrt{q}y} \frac{1}{(\lambda y)^{n-1}} \operatorname{tr}(D^{-1}(a)) \\ &= \frac{y+1}{\lambda\sqrt{q}y} P\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array}\right) \\ \frac{y+1}{\lambda\sqrt{q}y} &= \left(\frac{1}{t} + \frac{1}{ty}\right) = \left(\frac{1}{t} + \frac{t^2-1}{t(1-q)}\right) = \left(\frac{t^2-q}{t(1-q)}\right) = \frac{t^{-1}\sqrt{q} - t\sqrt{q}^{-1}}{x} \end{aligned}$$

en utilisant le fait que $x = \sqrt{q} - \sqrt{q}^{-1}$, $t = \sqrt{q}\lambda$ et $y = \frac{1-q}{t^2-1}$.

Enfin, (5.8) s'obtient par

$$P\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \\ \bigcirc \end{array}\right) = \frac{1}{\lambda y} P\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array}\right) = \frac{t^{-1}-t}{x} P\left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \uparrow \end{array}\right)$$

puisque

$$\frac{1}{\lambda y} = \frac{t^2-1}{\lambda(1-q)} = \frac{\sqrt{q}(t^2-1)}{t(1-q)} = \frac{t-t^{-1}}{\sqrt{q}^{-1}-\sqrt{q}} = \frac{t^{-1}-t}{x}.$$

Ce qui conclut la preuve. \square

Proposition 5.6. *Les relations (5.4), (5.5), (5.7) et (5.8), munie de $P_0 = 1$, à elles seules permettent de calculer le polynôme de HOMFLY-PT d'une fermeture de tresse de B_n après l'avoir envoyée par (5.6) dans H'_n .*

Démonstration. Si $n = 1$ le polynôme est 1 par définition. Si $n = 2$, nous avons une combinaison linéaire de diagrammes à 2 brins possédant tous un nombre fini de croisements. Ceux ne possédant pas de croisement sont calculés directement par (5.8) et ceux en possédant un sont calculés par (5.7), donnant alors des diagrammes à un seul brin dont leur polynôme vaut 1. A partir du moment où les diagrammes possèdent au moins deux croisements, nous pouvons diminuer leur nombre par (5.5) jusqu'à se ramener au cas où nous n'en avons plus qu'un.

Pour $n \geq 3$, supposons que nous pouvons calculer le polynôme pour des diagrammes à strictement moins de n brins. Considérons les croisements entre les deux derniers brins.

5.2. Le polynôme de HOMFLY-PT par un calcul graphique

S'il n'y en a pas ou s'il n'y en a qu'un seul, nous pouvons directement diminuer le nombre de brins par (5.8) ou (5.7) et le polynôme se calcule par induction. S'il y en a plus de deux, nous en considérons deux adjacents (dans le sens où il n'y a pas d'autre croisement entre ceux-ci). Nous regardons s'il y a entre ceux-ci des croisements entre les brins $n-1$ et $n-2$. S'il n'y en a pas, nous pouvons diminuer le nombre de croisements par (5.5). S'il y en a un seul, nous avons par (5.4) que

$$\begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagdown \diagup \end{array} = \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} + \left| \begin{array}{c} \diagup \diagdown \\ \diagup \diagdown \end{array} - \begin{array}{c} \diagdown \diagup \\ \diagdown \diagup \end{array} \right|$$

et donc cela revient à calculer des diagrammes avec un nombre de croisements strictement plus petit. Si nous en avons au moins deux, nous pouvons en diminuer le nombre en appliquant un procédé similaire, quitte à considérer des croisements entre les brins $n-2$ et $n-3$ et ainsi de suite, jusqu'à se ramener à zéro ou un seul croisement. Cette récurrence se termine puisqu'à un moment donné, si nous ne rencontrons pas de paire de brins sans croisement ou avec un seul, nous considérons des croisements entre les brins 1 et 2. Puisqu'il n'y a pas d'autres brins à gauche et pas de croisement avec le brin 3 (nous considérons deux croisements adjacents entre les brins 2 et 3), nous pouvons nous ramener à un seul croisement par (5.5), comme pour $n=2$.

Dès lors, nous avons diminué le nombre de croisements entre les deux derniers brins et nous appliquons ce procédé jusqu'à obtenir des diagrammes avec zéro ou un croisement entre ces brins et nous diminuons à nouveau n par (5.8) ou (5.7). Le polynôme est alors calculable par induction. \square

Il est intéressant de noter qu'à partir de ce calcul purement diagrammatique, il est aisé de vérifier que le polynôme de HOMFLY-PT d'une tresse fermée est invariant sous mouvement de Markov de type 2

$$\begin{aligned} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) &\mapsto t \left(P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) - \sqrt{q}^{-1} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) \right) \\ &= t \left(\frac{\sqrt{q}t^{-1} - \sqrt{q}^{-1}t}{x} - \frac{\sqrt{q}^{-1}t^{-1} - \sqrt{q}^{-1}t}{x} \right) P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) \quad (5.9) \\ &= \frac{\sqrt{q} - \sqrt{q}^{-1}}{x} P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right) = P \left(\begin{array}{c} \uparrow \\ \text{loop} \end{array} \right). \end{aligned}$$

et sous mouvement de Markov de type 1 par isotopie sur la fermeture.

Nous aurions donc pu faire tout notre développement du chapitre 4 en nous passant de la trace d'Oceanu, ou du moins en l'utilisant de façon implicite, et en travaillant sur des diagrammes de H'_n munis des relations (5.7) et (5.8).

Exemple 5.1. Considérons la tresse $\sigma_1\sigma_2\sigma_1$. Nous pouvons aisément calculer sa représentation dans H'_n par (5.1). Nous calculons ensuite le polynôme de HOMFLY-PT de sa

5. Calcul graphique pour l'algèbre de Hecke

fermeture

$$\begin{aligned}
P(\sigma_1\sigma_2\sigma_3) &= P \left(\text{Diagram 1} \right) \\
&= t^3 P \left(\text{Diagram 2} \right) - t^3 \sqrt{q}^{-1} \left(P \left(\text{Diagram 3} \right) + P \left(\text{Diagram 4} \right) + P \left(\text{Diagram 5} \right) \right) \\
&+ t^3 q^{-1} \left(P \left(\text{Diagram 6} \right) + P \left(\text{Diagram 7} \right) + P \left(\text{Diagram 8} \right) \right) - t^3 \sqrt{q}^{-3} P \left(\text{Diagram 9} \right).
\end{aligned}$$

Nous simplifions le premier diagramme avec le troisième grâce à (5.9) et nous faisons de même avec le sixième et le dernier. Nous pouvons aussi associer le deuxième et le troisième puisqu'ils ont le même polynôme par isotopie sur la fermeture

$$\begin{aligned}
P \left(\text{Diagram 1} \right) &= t^2 P \left(\text{Diagram 10} \right) - 2\sqrt{q}^{-1} t^3 P \left(\text{Diagram 3} \right) \\
&+ 2q^{-1} t^3 P \left(\text{Diagram 6} \right) + q^{-1} t^2 P \left(\text{Diagram 7} \right).
\end{aligned}$$

De même, nous pouvons simplifier par (5.9) les deuxième et troisième diagrammes et le premier par (5.5). Nous obtenons alors par (5.9) encore et puis par (5.7)

$$\begin{aligned}
P \left(\text{Diagram 1} \right) &= t^2 (\sqrt{q} - \sqrt{q}^{-1}) P \left(\text{Diagram 11} \right) + t^2 q^{-1} P \left(\text{Diagram 7} \right) \\
&= t^2 \sqrt{q} P \left(\text{Diagram 11} \right) - t \sqrt{q}^{-1} \\
&= \frac{t^2 q t^{-1} - t}{x} - t \sqrt{q}^{-1} = \frac{qt - t^3}{x} - \frac{t \sqrt{q}^{-1} (\sqrt{q} - \sqrt{q}^{-1})}{x} \\
&= \frac{-t^3 + t(q - 1 + q^{-1})}{x} = \frac{-t^3 + t(x^2 + 1)}{x} \\
&= tx - \frac{t^3}{x} + \frac{t}{x}.
\end{aligned}$$

6 Conclusion

En conclusion, nous avons relié deux objets a priori totalement distincts, l'un algébrique et l'autre topologique, que sont le groupe des tresses et l'algèbre de Hecke et ce pour finalement construire un outil utile pour caractériser un troisième type d'objet : les entrelacs. En outre, ce lien est intéressant car il nous permet d'envisager les tresses sous un point de vue algébrique et nous fournit tous les outils de théorie des groupes qui vont avec. Cela nous permet de manipuler cet objet de façon beaucoup plus structurée.

Nous pourrions pousser l'étude plus loin en considérant des représentations dans d'autres algèbres, comme une algèbre de BMW [BW, M], et définir d'autres invariants pour les entrelacs, comme le polynôme de Kauffman [K2]. Aussi, une question intéressante à se poser pour approfondir notre connaissance de B_n est de savoir s'il est un groupe linéaire. Il se révèle que l'algèbre de BMW est un bon candidat pour trouver une représentation fidèle pour montrer cela [B, Z].

Par ailleurs, il est possible de voir les tresses comme des difféomorphismes entre des disques troués. Il est dès lors légitime de se poser la question de si ce concept peut être généralisé, comme par exemple à des difféomorphismes entre boules trouées et étudier les éventuelles représentations possibles de ceux-ci [Z].

Bibliographie

- [KT] C. Kassel and V. Turaev, *Braids Groups*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 247, Springer, New York, 2008. ↑5, 12, 14, 21, 22, 23
- [K1] L. H. Kauffman, *Knots and Physics*, Series on Knots and Everything, Vol. 1, World Scientific, Singapore, 2001. ↑5, 13, 14, 15
- [K2] L. H. Kauffman, *An Invariant of Regular Isotopy*, Transactions of the American Mathematical Society **318** (1990), no. 2, 417-471. ↑45
- [J] V. F. R. Jones, *Hecke algebra representations of braid groups and link polynomials*, Annals of Mathematics **126** (1987), 335-388. ↑25
- [B] J. Birman, *Braids, Links and Mapping Class Groups*, Annals of Mathematics, 1974. ↑17
- [FYH⁺] P. Freyd, D. Yetter, J. Hoste, W. Lickorish, K. Millet, and A. Ocneanu, *A New Polynomial Invariant of Knots and Links*, Bull. AMS **12** (1985), 239-246. ↑5, 30
- [PT] H. Przytycki and P. Traczyk, *Invariants of links of Conway type*, Kobe J. Math. **4** (1987), 115-139. ↑5, 30
- [EN] M. S. El Naschie, *Superstrings, Knots, and Noncommutative Geometry in $E^{(\infty)}$ Space*, International Journal of Theoretical Physics **37** (1998), 2935-2951. ↑5
- [B] S. J. Bigelow, *Braid Groups are Linear*, J. Amer. Math. Soc **14** (2000), 471-486. ↑45
- [Z] M. G. Zinno, *On Krammer's Representation of the Braid Group* (2000), available at [arXiv:math/0002136v1](https://arxiv.org/abs/math/0002136v1). [math.RT]. ↑45
- [O] T. Ohtsuki, *Quantum Invariants : A Study of Knots, 3-Manifolds, and Their Sets*, World Scientific, 2002. ↑14
- [BW] J. Birman and H. Wenzl, *Braids, Link Polynomials and a New Algebra*, Transactions of the American Mathematical Society **313** (1989), no. 1, 249-273. ↑45
- [M] J. Murakami, *The Kauffman Polynomial of Links and Representation Theory*, Osaka J. Math. **24** (1987), 745-758. ↑45
- [K1] Katlas, *5_1* — *Katlas, the knot atlas anyone can edit* (2013), available at http://katlas.org/wiki/Image:5_1.gif. [En ligne; page consultée le 18 mars 2013]. ↑33
- [K2] ———, *10_132* — *Katlas, the knot atlas anyone can edit* (2013), available at http://katlas.org/wiki/Image:10_132.gif. [En ligne; page consultée le 18 mars 2013]. ↑33