Université catholique de Louvain

Faculté des sciences appliquées

Réarrangements et problèmes elliptiques non linéaires

Travail de fin d'études présenté par

Jean Van Schaftingen

sous la direction du professeur

Michel Willem

en vue de l'obtention du grade
d'ingénieur civil en mathématiques appliquées

Juin 2002

Avant tout, je désirerais remercier
Michel Willem qui m'a proposé ce sujet,
qui m'a consacré du temps
et qui m'a judicieusement conseillé
tout au long de cette année.

Introduction

L'étude d'une équation aux dérivées partielles invariante sous certaines symétries conduit à chercher sous quelles conditions les solutions sont à symétrie radiale. Par exemple, est-ce que les solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u = f(u, |x|_2) & \text{dans } B(0, R), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0, R), \end{cases} \tag{1}$$

invariant par rapport au groupe $O(N)$ des rotations de $\mathbb{R}^N$, sont radiales ?

L'invariance par rotations des solutions d'une équation aux dérivées partielles réduit le problème à une équation différentielle ordinaire, ce qui en simplifie la résolution analytique ou numérique. Inversement, l'absence de symétrie est une caractéristique importante de phénomènes physiques de rupture de symétrie comme les écoulements turbulents de fluides, le flambage des poutres ou la distribution de masse des particules élémentaires. C'est alors une qualité du modèle.

Si la symétrie des solutions d'équations aux dérivées partielles a très souvent été supposée pour en trouver une solution, l'asymétrie de fonctions propres du laplacien sur la boule unité (harmoniques sphériques) est connue depuis les débuts de la physique mathématique. Il est aussi possible construire de toutes pièces un problème symétrique à partir de certaines solutions asymétriques [Bro00a]. Depuis une vingtaine d'année, l'asymétrie d'états fondamentaux d'équations de la forme (1) issues de modèles physiques a été mise en évidence tant analytiquement [BN83, SSW] que numériquement [CNZ00].

La symétrie des solutions classiques de certains problèmes elliptiques non linéaires a pu être démontrée par la méthode du plan mobile, elle-même basée sur le principe du maximum pour les équations elliptiques. Ainsi, B. Gidas, W.-M. Ni et L. Nirenberg ont prouvé que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est lipschitzienne et si $u \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega})$ est une solution positive de

$$\begin{cases} \Delta u = f(u) & \text{dans } B(0, R), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0, R), \end{cases}$$

alors u est radiale et décroissante [GNN79].

Nous nous intéresserons à une autre famille de méthodes, les méthodes de réarrangements qui permettent de prouver la symétrie de solutions de problèmes variationnels. Un réarrangement $*$ associe à tout ensemble mesurable A un ensemble A^* « plus symétrique » et de même mesure et, à toute fonction u, il fait correspondre une fonction u^* telle que

$$\{u \geq c\}^* = \{u^* \geq c\}.$$

Si le réarrangement est bien choisi, il vérifie le principe de Cavalieri (C) et les inégalités de Hardy–Littlewood (HL), Pólya–Szegö (PS) et Riesz–Sobolev (RS)

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu = \int_{\Omega^*} f(u^*)\, d\nu, \tag{C}$$

$$\int_\Omega uv\, d\mu \leq \int_{\Omega^*} u^* v^*\, d\nu, \tag{HL}$$

$$\int_\Omega |\nabla u^*|_2\ dx \leq \int_{\Omega^*} |\nabla u|_2\, dx, \tag{PS}$$

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} u(x)v(y)w(x-y)\ dx\ dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} u^*(x)v^*(y)w^*(x-y)\ dx\ dy. \tag{RS}$$

Appliquées à des problèmes variationnels, ces inégalités impliquent que, sous certaines hypothèses sur la fonctionnelle J, on ait pour tout u

$$J(u^*) \leq J(u).$$

En particulier, si u est un minimiseur, alors u^* est un minimiseur symétrique, d'où on peut déduire l'existence d'une solution symétrique. Si de plus on a $J(u^*) < J(u)$ pour tout u non symétrique, toute solution est symétrique. L'inégalité stricte est toutefois beaucoup plus difficile à démontrer, l'inégalité (PS) étant particulièrement difficile à traiter [Kaw85]. Par ailleurs, F. Brock prouvé la symétrie « locale » de minimiseurs locaux [Bro00a].

Les réarrangements sont liés à des problèmes d'optimisation de forme. Les plus simples sont les problèmes isopérimétrique et isodiamétrique, qui constistent à maximiser le volume à diamètre ou à surface donné et dont les solutions sont connues depuis l'antiquité. Au dix-neuvième siècle, le développement des sciences et techniques conduit à considérer des problèmes semblables et à conjecturer qu'à section d'aire donnée, la poutre à section circulaire a la plus grande rigidité à la torsion, (A. de Saint-Venant), qu'à aire donnée le tambour circulaire a la plus petite fréquence fondamentale à surface donnée (J. Rayleigh) et qu'à volume donné la sphère a la plus petite capacité électrostatique (H. Poincaré). Ces problèmes sont résolus au vingtième siècle par E. Krahn, G. Faber, G. Pólya et G. Szegö et un premier ouvrage y est entièrment consacré en 1951 [PS51]. Les solutions partent d'une définition variationnelle des caractéristiques comme minimum d'une fonctionnelle J pour des fonctions u admissibles pour Ω et démontrent que pour tout u admissible pour Ω, u^* est admissible pour Ω^* et que $J(u^*) \leq J(u)$, ce qui prouve l'optimalité du domaine symétrique.

Dans d'autres domaines, les réarrangements permettent de calculer les constantes de Sobolev optimales [Tal76a], de comparer des solutions de problèmes elliptiques linéaires non symétriques avec des solutions de problèmes symétriques [Tal76b, Mos84, BS99, Bae95] et de montrer l'existence et la monotonie de solutions de problèmes variationnels sur des ensembles non bornés [Car95, Alb00].

Si les inégalités de réarrangement sont connues depuis plus d'un demi-siècle, les méthodes de preuve ont néanmoins évolué. Les premières démonstrations étaient ingénieuses mais difficilement généralisables. Ainsi G. Pólya et G. Szegö dérivent l'inégalité (PS) de l'inégalité isopérimétrique en exprimant l'intégrale du gradient comme la limite de la surface d'une famille de fonctions lisses.

L'approche par ensembles de niveau, part d'inégalités géométriques sur des ensembles comme
$$\mu(A \cap B) \leq \mu(A^* \cap B^*)$$
pour les étendre en inégalités fonctionnelles par des formules de la forme
$$\int_\Omega u(x)v(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(\{x \mid u(x) \geq s\} \cap \{x \mid v(x) \geq t\})\,ds\,dt.$$
Si les résultats sont assez probants pour les inégalités de Hardy–Littlewood (voir section 3.3, p. 42, [CZR86]), la méthode est moins convaincante pour les inégalités de Pólya–Szegö [Tal76a, Ban80, Mos84], puisqu'elle se base sur l'inégalité isopérimétrique qui si, elle est intuitive, est loin d'être triviale [Tal93b].

La méthode d'approximation démontre les inégalités fonctionnelles en approximant la symétrisation par une suite de réarrangements pour lesquelles les inégalités sont plus simples à établir, les symétrisations de Steiner [Sar72, BLL74, LL01] ou les polarisations [Bae95, BS99]. Les preuves consistent alors à prouver la convergence de la suite des approximations et la continuité de la fonctionnelle afin d'en déduire les inégalités fonctionnelles puis les inégalités géométriques. Cette méthode se base en partie sur la contractivité des réarrangements qui ne peut être prouvée à ce jour que par la méthode des ensembles de niveau.

Les cheminements inverses entre propriétés géométriques et propriétés fonctionnelles des méthodes d'approximation et d'ensembles de niveau mettent en évidence un certain nombre d'équivalences et permettent aux deux méthodes de se renforcer mutuellement.

Dans ce travail, nous voulons exposer des démonstrations d'inégalités de réarrangement, principalement celles de Hardy–Littlewood et de Pólya–Szegö, dans une démarche proche de celle de F. Brock et de Y. Solynin [BS99] confrontée avec les idées de G. Alberti [Alb00].

Nous commencerons par présenter les principaux réarrangements que notre théorie veut englober avec quelques applications (chapitre 1).

Dans le chapitre 2, nous traitons de manière axiomatique les transformations de fonctions en mettant en évidence les propriétés de monotonie et de continuité, conditions nécessaires et suffisantes à des propriétés élémentaires et indispensables des transformations induites. Cette partie est assez fastidieuse par son exhaustivité mais c'est elle qui justifie notre définition de réarrangement.

Le chapitre 3 introduit les réarrangements et démontre le principe de Cavalieri et une inégalité de Hardy–Littlewood généralisée, cette dernière étant obtenue en combinant les méthodes de G. Alberti [Alb00] et de J. Crowe, J. Zwaibel et P. Rosenbloom [CZR86].

Nous établissons dans le chapitre 4 des équivalences entre propriétés de transformations d'ensembles et de transformations induites de fonctions dans le cadre le plus général possible.

Au cours du dernier chapitre, consacré aux preuves d'inégalités fonctionnelles par approximation par polarisation, nous développons la méthode de F. Brock et de Y. Solynin [BS99] en montrant comment elle permet de construire une suite universelle d'approximants, en l'étendant à d'autres réarrangements et en suggérant une manière d'étendre la méthode à la démonstration d'inégalités de Riesz–Sobolev par approximation par symétrisations de Steiner.

Chapitre 1

Quelques réarrangements

Les réarrangements ont de nombreuses applications en théorie des équations aux dérivées partielles et en physique mathématique. Nous nous proposons de présenter les principaux réarrangements avec quelques applications. Pour plus d'applications nous renvoyons à la bibliographie [PS51, Kaw85, Tal93a, Kaw98].

Le traitement systématique des chapitres ultérieurs fera apparaître que ces réarrangements partagent les propriétés suivantes :

- (principe de Cavalieri) pour toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne et pour tout u mesurable avec $f \circ u \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega f(u(x))\; dx = \int_{\Omega^*} f(u^*(x))\; dx,$$

- (inégalité de Hardy–Littlewood) pour toute fonction $F \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2)$ avec $\partial_1 \partial_2 F \geq 0$, u et v mesurables avec $F(u, v) \in L^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega F(u(x), v(x))\; dx \leq \int_{\Omega^*} F(u^*(x), v^*(x))\; dx,$$

- (inégalité de Pólya–Szegö) pour tout $1 \leq p < +\infty$ et $u \in W^{1,p}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*(x)|^p\; dx \leq \int_\Omega |\nabla u(x)|^p\; dx.$$

1.1 Symétrisation de Schwarz

La symétrie la plus complète pour un problème elliptique sur un borné dans $\mathbb{R}^N$ est celle par rapport au groupe $O(N)$ des transformations linéaires orthogonales de $\mathbb{R}^N$. Nous définissons la restriction du réarrangement de Schwarz aux ensembles ouverts ou fermés par

$$\tilde{S}_{N,N} : \operatorname{dom} \tilde{S} \to \wp(\mathbb{R}^N) : A \mapsto \begin{cases} B[0, R_A] & \text{si } A \neq \emptyset \text{ est ouvert,} \\ B(0, R_A) & \text{si } A \neq \mathbb{R}^N \text{ est fermé,} \\ \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ \mathbb{R}^N & \text{si } A = \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

où $\wp(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des parties de $\mathbb{R}^N$, avec

$$R_A^N = \frac{\mathcal{L}^N(A)}{\mathcal{L}^N(B(0,1))},$$

$$\operatorname{dom} \tilde{S}_{N,N} = \left\{ A \subset \mathbb{R}^N \mid \mathcal{L}^N(A) < +\infty \text{ et } A \text{ est fermé ou ouvert} \right\}$$

$\mathcal{L}^N$ désignant la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$. Nous avons alors, pour tout $A \in \operatorname{dom} \tilde{S}$,

$$\mathcal{L}^N(\tilde{S}_{N,N}(A)) = \mathcal{L}^N(A)$$

et, pour tout $A, B \in \operatorname{dom} \tilde{S}$ avec $A \subseteq B$,

$$\tilde{S}_{N,N}(A) \subseteq \tilde{S}_{N,N}(B).$$

La symétrisation de Schwarz proprement dite est l'extension de $\tilde{S}_{N,N}$ aux ensembles de mesure finie de $\mathbb{R}^N$ par

$$S_N(A) = \bigcup_{\substack{B \in \operatorname{dom} \tilde{S}_{N,N}, \\ A \subset B}} \tilde{S}_{N,N}(B).$$

Nous avons toujours, pour $A \in \operatorname{dom} S_{N,N}$,

$$\mathcal{L}^N(S_{N,N}(A)) = \mathcal{L}^N(A).$$

et, pour $A, B \in \operatorname{dom} S_{N,N}$ avec $A \subseteq B$,

$$S_{N,N}(A) \subseteq S_{N,N}(B).$$

La symétrisation de Schwarz d'une fonction est

$$\bar{S}_{N,N} u(y) = \sup \left\{ c \mid y \in S_{N,N}(\{u \geq c\}) \right\},$$

définie pour toute fonction u telle que, pour $c > \inf \operatorname{ess} u$,

$$\mathcal{L}^N(\{u \geq c\}) < +\infty.$$

Un ensemble ou une fonction est symétrique au sens de Schwarz s'il est égal à sa symétrisation de Schwarz.

Remarque 1.1.1. La symétrisation de Schwarz n'a pas été définie ainsi dans un premier temps. D'après les traces que nous avons trouvé [HLP34, PS51, LL01], elle était à l'origine ce que nous appelerons symétrisation de Steiner $(N-1, N)$. La symétrisation de Schwarz originelle appliquée au graphe d'une fonction donne le graphe de notre symétrisation de Schwarz.

Les premières définitions de ce que nous appelons symétrisation de Schwarz partaient du réarrangement décroissant de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$, défini, avec nos notations, par

$$S_d : \mathcal{M}(\mathbb{R}^N) \to \wp(\mathbb{R}_+) : A \mapsto (0, \mu(A)).$$

Le réarrangement d'une fonction u est alors l'inverse de sa fonction de répartition, première définition du réarrangement [HLP34]. J. Mossimo [Mos84] et G. Talenti [Tal76a, Tal76b] définissent alors la symétrisation de Schwarz par

$$\bar{S}_N u(y) = \bar{S}_d u(|y|_2^N).$$

Remarque 1.1.2. La symétrisation de Schwarz peut être généralisée à tout espace métrique muni d'une mesure pourvu que les mesures des boules centrées à l'origine prennent toutes les valeurs atteintes par les mesures d'ensembles mesurables. Ainsi, on peut parler de symétrisation de Schwarz sur la sphère et dans l'espace hyperbolique [Bae95].

Les inégalités isopérimétriques les plus classiques obtenues par symétrisation de Schwarz sont la minimisation de la première valeur propre du laplacien, la minimisation de la capacité électrostatique et la maximisation du champ gravitationnel à volume donné ainsi que la minimisation de la rigidité de torsion à section donnée [Tal93a]. Ils ont aussi des applications en physique des plasmas [Mos84]. Nous nous intéresserons ici à deux autres problèmes, la maximisation du débit d'un écoulement laminaire à aire de section donnée et la maximisation du volume d'un tas de sable d'aire au sol donnée.

Maximisation du débit Nous cherchons la section de tuyau qui, à aire donnée, laissera passer le plus grand débit en écoulement laminaire pour un gradient de pression donné. Pour une section $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ donnée, soit u_Ω le champ de vitesse axiale dans la conduite (toutes les autres composantes sont nulles en écoulement laminaire), solution des équations de Navier–Stokes

$$\begin{cases} \mu\, \Delta u_\Omega = \nabla p & \text{dans } \Omega, \\ u_\Omega = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.1}$$

où μ est la viscosité dynamique du fluide et ∇p le gradient de pression constant (négatif si le fluide coule dans le bon sens). Nous cherchons à maximiser le débit

$$D(u_\Omega) = \int_\Omega u_\Omega \, dx.$$

Commençons par raisonner intuitivement. La force de viscosité exercée par le tuyau sur le fluide est de l'ordre de

$$P(\Omega)\,\mu\,\frac{\bar{u}_\Omega}{\bar{R}} \approx \mu\,P(\Omega)\ \operatorname{diam}\Omega\,\frac{D(u_\Omega)}{|\Omega|^2}.$$

où $P(\Omega)$ et $|\Omega|$ désignent le périmètre et l'aire de Ω, $\bar{u}_\Omega = D(u_\Omega)/|\Omega|$ la vitesse moyenne de l'écoulement et $\bar{R} \approx |\Omega|/\operatorname{diam}\Omega$, la distance moyenne du bord. Le gradient de pression exerce sur le fluide une force de l'ordre de

$$\nabla p\ |\Omega|.$$

L'équilibre des forces en régime stationnaire impose

$$D(u_\Omega) \approx \frac{\nabla p|\Omega|^3}{\mu P(\Omega)\operatorname{diam}\Omega}.$$

Puisque maximiser le débit revient à minimiser le périmètre et le diamètre de la section à aire donnée, la solution intuitive est donc le disque.

Plus rigoureusement, le problème (1.1) a la formulation variationnelle

$$\min_{u\in H_0^1(\Omega)} J(u),$$

avec

$$J(u) = \int_\Omega \tfrac{\mu}{2}|\nabla u|_2^2 + u\nabla p\ \ dx.$$

Le débit associé à la solution de ce problème vaut

$$D(u_\Omega) = \int_\Omega u_\Omega\,dx = -\tfrac{2}{\nabla p}J(u_\Omega).$$

Si $*$ désigne la symétrisation de Schwarz, par le principe de Cavalieri (proposition 3.2.1, p. 39) et l'inégalité de Pólya–Szegö (proposition 5.3.4, p. 78), on a, pour tout $u \in H_0^1(\Omega)$,

$$J(u^*) \leq J(u)$$

et donc

$$D(u_{\Omega^*}) = -\tfrac{\nabla p}{2}J(u_{\Omega^*}) \geq -\tfrac{\nabla p}{2}J(u_\Omega^*) \geq -\tfrac{\nabla p}{2}J(u_\Omega) \geq D(u_\Omega).$$

La section circulaire Ω^* est donc optimale. Des outils plus fins permettraient de montrer que le disque est la seule solution [Kaw85] et de quantifier la perte de charge due à l'asymétrie [Bha01]. Par ailleurs, notre résolution intuitive met en évidence le lien entre inégalités de Pólya–Szegö et inégalité isopérimétrique, qui reviendra à la section 4.3.

Tas de sable La symétrisation de Schwarz permet de résoudre des problèmes d'optimisation de tas de sable [Ban80]. Un matériau comme le sable est caractérisé par son angle de talus α, angle de la pente maximale qu'il peut atteindre sans s'écouler. Pour que $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ représente la hauteur d'un tas de sable obéissant à ce modèle, on doit avoir

$$|\nabla u|_2 \leq \tan \alpha, \text{dans } \Omega,$$

où $|\nabla u|_2$ est la norme 2 du gradient.

Nous cherchons à maximiser le volume de sable

$$V(u) = \int_{\mathbb{R}^2} u(x)\, dx$$

à surface au sol $|\operatorname{supp} u|$ donnée. Par la proposition 4.2.2 (p. 54), u est continue et

$$\|\nabla u^*\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty.$$

Par le principe de Cavalieri (proposition 3.2.1, p. 39), on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} u^*\, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u\, dx.$$

et

$$|\operatorname{supp} u^*| = |\{u^* > 0\}| = |\{u > 0\}| = |\operatorname{supp} u|.$$

Donc, s'il existe un tas de sable optimal, il en existe un à symétrie cylindrique. Par ailleurs, l'existence découle de la précompacité des suites maximisantes dans $\mathcal{C}(B[0, R])$ par Arzelá–Ascoli.

Le même raisonnement peut s'appliquer à la minimisation du travail

$$W(u) = \int_{\mathbb{R}^2} u^2\, dx = \|u\|_2^2$$

à hauteur donnée

$$H(u) = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} u(x).$$

Les châteaux de sable coniques sont donc recommandés pour gagner le concours du plus haut château de sable.

1.2 Symétrisations de Steiner

La symétrisation de Schwarz ne s'applique pas à des problèmes non invariants par rapport au groupe $O(N)$ tout entier, mais seulement par rapport à un sous-groupe $O(k)$, $k < N$. On considérera alors la symétrisation de Steiner.

Notation 1.2.1. Soient $\Omega = \mathbb{R}^k \times \Omega''$, avec $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}^{N-k}$. Pour $c \in \Omega''$ et $A \subseteq \Omega$, on pose

$$[A]_c = \{x \in \Omega'' \mid (x, c) \in A\}$$

et pour $B \subset \mathbb{R}^k$

$$(B, c) = \left\{(x, c) \in \mathbb{R}^k \times \Omega'' \mid x \in B\right\}.$$

La symétrisation de Steiner (k, N) se définit à partir de la symétrisation de Schwarz :

$$\operatorname{dom} S_{k,N} = \left\{A \subset \mathbb{R}^N \mid \forall c \in \Omega'', \quad [A]_c \in \operatorname{dom} S_{k,k}\right\},$$
$$S_{k,N}(A) = \bigcup_{c \in \Omega''} (S_{k,k}([A]_c), c),$$

ce qui entraîne, pour $A \in \operatorname{dom} S_k$,

$$(S_{k,N}(A), c) = S_{k,k}([A]_c)$$

et, pour $A, B \in \operatorname{dom} S_{k,N}$ avec $A \subseteq B$,

$$\mathcal{L}^N(S_{k,N}(A) \setminus S_{k,N}(B)) = \mathcal{L}^N(A \setminus B),$$
$$S_{k,N}(A) \subseteq S_{k,N}(B).$$

L'ensemble $S_{k,N}(A)$ est symétrique par rapport à un hyperplan de dimension $N-k$. Un ensemble ou une fonction est symétrique au sens de Steiner s'il est égal à sa symétrisation de Steiner. Lorsque nous parlerons de symétrisation de Steiner sans préciser, il s'agira toujours de la symétrisation de Steiner $(1, N)$. La symétrisation de Schwarz et la symétrisation de Steiner (N, N) sont la même transformation.

Un problème elliptique Les symétrisations de Steiner nous permettent de montrer que si le problème variationnel

$$\min_{u \in X} J(u),$$

avec

$$J(u) = \int_{B(0,R)\times\Omega''} |\nabla u|_2^p + F(u, |x'|_2, x'')\, dx$$

et

$$X = \left\{u \in W^{1,p}(B(0,R) \times \Omega'') \mid u|_{\partial B(0,R)\times\Omega''} = 0\right\}$$

a une solution, alors il a une solution u telle que

$$u(x) = \tilde{u}(|x'|_2, x'').$$

En effet, par les inégalités de Hardy–Littlewood (proposition 5.3.2, p. 75) et de Pólya–Szegö (proposition 5.3.5, p. 79), on a, pour tout $u \in X$,

$$J(u^*) \leq J(u).$$

1.3 Symétrisation sphérique

Nous pouvons reprendre la démarche de la définition de la symétrisation de Steiner en décomposant $\mathbb{R}^N$ en coordonnées sphériques sous la forme de $S_{N-1} \times \mathbb{R}^+$ et en choisissant une demi-droite issue de l'origine ρ. Si pour $A \subseteq \mathbb{R}^N$ on applique une symétrisation de Schwarz sur chaque $\partial B(0,R) \cap A$ par rapport au centre $\partial B(0,R) \cap \rho$, on obtient la symétrisation sphérique $S_{s,N}(A)$ de A et l'ensemble $S_{s,N}(A)$ est à symétrie axiale.

La symétrisation sphérique peut être utilisée pour optimiser l'isolation d'un disque D se refroidissant par convection selon la loi de Newton en imposant au coefficient de convection les contraintes

$$h_1 \leq h(s) \leq h_2,$$
$$\int_{\partial D} h(s)\; ds = 2\pi\big(\gamma h_1 + (1-\gamma)h_2\big).$$

C. Cox et B. Kawohl ont démontré que l'isolant optimal est placé de manière symétrique décroissante et ne prend que les valeurs h_1 et h_2. [CK99].

Équation de Hénon L'équation de Hénon

$$\begin{cases} \Delta u = u^p |x|_2^a & \text{dans } B(0,R), \\ u = 0 & \text{sur } \partial B(0,R) \end{cases}$$

a des états fondamentaux non symétriques pour $2 < p < \frac{N+2}{N-2}$ et a suffisamment grand [SSW]. Le problème revient à minimiser

$$J(u) = \frac{\int_{B(0,R)} |\nabla u|_2^2 \, dx}{\int_{B(0,R)} |u|^p |x|_2^a \, dx}$$

pour $u \in W_0^{1,2}(B(0,R))$. Si $*$ désigne la symétrisation sphérique, on a, par les propositions 3.2.1 (p. 39) et 5.3.5 (p. 79),

$$J(u^*) \leq J(u).$$

Quels que soient a et p, il existe par conséquent un état fondamental possédant une symétrie axiale, c'est-à-dire invariant par rotations préservant cet axe, et décroissant sur chaque coquille sphérique à partir de l'intersection avec son axe de symétrie [SW].

1.4 Réarrangement croissant

Pour $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega''$, $\Omega'' \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$, le problème elliptique

$$\begin{cases} \Delta u = f(u, x'') & \text{pour } (x_1, x'') \in \Omega \\ \lim\limits_{x_1 \to +\infty} u(x_1, x'') = 1 & \text{pour } x'' \in \Omega'' \\ \lim\limits_{x_1 \to -\infty} u(x_1, x'') = 0 & \text{pour } x'' \in \Omega'', \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x_1, x'') = 0 & \text{pour } (x_1, x'') \in \mathbb{R} \times \partial\Omega'' \end{cases}$$

est invariant par translations selon l'axe x_1. On n'a aucun espoir de montrer l'invariance par translations de la solution, mais on peut néanmoins s'intéresser à la monotonie des solutions dans la direction x_1.

Pour $A \subseteq \mathbb{R} \times \Omega''$ ouvert ou fermé avec

$$\mu((\mathbb{R}^+) \,\Delta\, A_c) < \infty \tag{1.2}$$

pour presque tout $c \in \Omega''$, on pose

$$\tilde{S}_{\infty,N}(A) = \begin{cases} \bigcup\limits_{c \in \Omega''} ((s_c, +\infty), c) & \text{si } A \text{ est ouvert,} \\ \bigcup\limits_{c \in \Omega''} ([s_c, +\infty), c) & \text{si } A \text{ est fermé,} \end{cases}$$

avec

$$s_c = \mu(\mathbb{R}^+ \setminus A_c) - \mu(A_c \setminus \mathbb{R}^-).$$

Par ailleurs, on pose $S(\Omega) = \Omega$ et $S(\emptyset) = \emptyset$. L'extension $S_{\infty,N}$ de $\tilde{S}_{\infty,N}$ à tout ensemble A mesurable vérifiant (1.2) est semblable à celle la symétrisation de Schwarz.

On vérifie que, si $A, B \in \operatorname{dom} S_{\infty,N}$, avec $A \subseteq B$, alors

$$S_{\infty,N}(A) \subseteq S_{\infty,N}(B)$$

et

$$\mathcal{L}^N(S_{\infty,N}(B) \setminus S_{\infty,N}(A)) = \mathcal{L}^N(B \setminus A).$$

La fonction $\bar{S}_{\infty} u$ est toujours croissante. Ce réarrangement ne doit pas être confondu avec un réarrangement similaire introduit par G. Carbou [Car95, Alb00] qui ne garde que la dépendance par rapport à la variable x_1.

Un problème de mélange Supposons que nous ayons un tuyau de longueur infinie à l'intérieur duquel se trouvent deux substances non miscibles. Un équilibre minimise

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}\times\Omega''} |\nabla u|_2 + F(u, x_1, r)\, dx$$

où u est la fraction massique du premier composant et F est un potentiel de mélange, dépendant de la distance au centre (à cause d'un gradient de température, par exemple). Si on impose les conditions aux frontières

$$\begin{cases} \lim_{x_1\to+\infty} u(x_1, x'') = 1 & \text{pour } x'' \in \Omega'', \\ \lim_{x_1\to-\infty} u(x_1, x'') = 0 & \text{pour } x'' \in \Omega'', \end{cases}$$

et si $*$ désigne le réarrangement croissant $S_{\infty,N}$, alors, pourvu que $\partial_1\partial_2 F \leq 0$, par les inégalités de Hardy–Littlewood (proposition 3.3.7, p. 48) et de Pólya–Szegö (proposition 5.3.4, p. 78), on a

$$J(u^*) \leq J(u).$$

S'il existe un minimiseur u, alors u^* est aussi un minimiseur. La recherche d'un minimiseur peut donc se restreindre à des fonctions croissantes.

Chapitre 2

Transformations d'ensembles et de fonctions

Si dans un premier temps le réarrangement a été défini comme inverse de la fonction de répartition [HLP34, Tal76b, Mos84] ou comme une transformation géométrique du sous-graphe de fonctions à support compact [PS51], une approche plus générale étend une transformation d'ensembles S de la manière suivante aux fonctions u [Kaw85, CZR86, BS99, LL01]

$$\bar{S}u(y) = \sup \{c \mid y \in S(\{u \geq c\})\} .$$

Dans ce chapitre, après avoir défini les transformations d'ensembles et de fonctions induites, nous montrons comment les hypothèses de monotonie et de continuité de transformations d'ensembles sont équivalentes à leurs homologues pour les fonctions et à des résultats de commutation de la forme

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ (\bar{S}u) \tag{2.1}$$

et à des propriétés de sous-ensembles de niveau du type

$$\{\bar{S}u \geq c\} = S(\{u \geq c\}) \tag{2.2}$$

(théorèmes 2.2.11 et 2.3.5).

Nous comparons aussi les définitions de transformation de fonctions en mettant en évidence des relations d'égalité et de dualité lorsque S est monotone (proposition 2.2.4). Par ailleurs, nous énonçons des hypothèses qui permettent de travailler avec des classes d'équivalences de fonctions égales presque partout (proposition 2.2.8). Enfin, nous montrons que si une transformation de fonction vérifie (2.1) pour toute fonction f croissante, alors elle est induite par une transformation d'ensemble (théorème 2.4.1).

2.1 Transformations de fonctions induites

Les transformations de fonctions se définissent à partir de deux concepts : les transformations d'ensembles et les sous-ensembles de niveau. La définition de transformation d'ensembles est très large, les hypothèses sur $S(\emptyset)$ et sur $S(\Omega)$ étant assez naturelles et évitent les cas dégénérées.

Notation 2.1.1. Soit X un ensemble. L'ensemble des parties de Ω est noté $\wp(X)$.

Définition 2.1.2. Soient Ω et Ω^* deux ensembles. Une *transformation d'ensembles de Ω dans Ω^** est une fonction

$$S : \operatorname{dom} S \subseteq \wp(\Omega) \to \wp(\Omega^*)$$

telle que

$$\begin{aligned} &\emptyset \in \operatorname{dom} S, &\qquad &\Omega \in \operatorname{dom} S,\\ &S(\emptyset) = \emptyset, & &S(\Omega) = \Omega^*. \end{aligned}$$

Définition 2.1.3. Soit X un ensemble, $c \in \bar{\mathbb{R}}$ et $u : X \to \mathbb{R}$. Le *sous-ensemble de niveau c ouvert* est

$$\{u > c\} = \{x \in X \mid u(x) > c\}$$

et le *sous-ensemble de niveau c fermé* est

$$\{u \geq c\} = \{x \in X \mid u(x) \geq c\}.$$

Notation 2.1.4. L'ensemble des réels complété est

$$\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

Pour tout $a \in \mathbb{R}$, on a alors

$$-\infty < a < +\infty,$$

et, pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$,

$$a(+\infty) + b = +\infty = (-1)(-\infty).$$

Nous introduisons les transformations de fonctions induites ouverte et fermée, selon que la transformation est définie à partir des sous-ensembles de niveau ouverts ou fermés.

Définition 2.1.5. Soient Ω et Ω^* deux ensembles et S une transformation d'ensembles de Ω dans Ω^*. La *transformation de fonctions fermée induite* $\bar{S}$ est

$$\bar{S} : \operatorname{dom} \bar{S} \to (\Omega^* \to \bar{\mathbb{R}}),$$

avec

$$\operatorname{dom} \bar{S} = \big\{u : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \mid \forall c \in \bar{\mathbb{R}}, \{u \geq c\} \in \operatorname{dom} S\big\}$$

et, pour tout $y \in \Omega^*$,

$$\bar{S}u(y) = \sup \big\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{u \geq c\})\big\} .$$

La *transformation de fonctions ouverte induite* $\breve{S}$ est

$$\breve{S} : \operatorname{dom} \breve{S} \to (\Omega^* \to \bar{\mathbb{R}}),$$

avec

$$\operatorname{dom} \breve{S} = \big\{u : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} \mid \forall c \in \bar{\mathbb{R}}, \{u > c\} \in \operatorname{dom} S\big\}$$

et, pour tout $y \in \Omega^*$,

$$\breve{S}u(y) = \sup \big\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{u > c\})\big\} .$$

Exemple 2.1.1. Les symétrisations de Steiner, de Schwarz et sphérique et le réarrangement croissant sont des transformations d'ensembles.

Exemple 2.1.2. Soit (Ω, μ) un espace mesuré. La transformation d'ensembles S_μ a pour domaine l'ensemble des parties mesurables de Ω tandis que $\Omega^* = \mathbb{R}$. Nous posons alors

$$S_\mu(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ \mathbb{R} & \text{si } A = \Omega, \\ \{\mu(A)\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous avons $\operatorname{dom} \bar{S}_\mu = \operatorname{dom} \breve{S}_\mu$, tandis que, pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -|x|$, on a

$$\bar{S}_\mu u(0) = 0 \neq -\infty = \breve{S}_\mu u(0).$$

Les transformations induites ouverte et fermée ne coïncident donc pas en général. De plus, on a

$$\{\bar{S}u \geq c\} = [0, 2c] \neq \{2c\} = S(\{u \geq c\}).$$

Exemple 2.1.3. Le domaine de S_δ est l'ensemble des ensembles ouverts et des ensembles fermés de $\mathbb{R}^N$. On pose

$$S_\delta(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ \mathbb{R}^+ & \text{si } A = \mathbb{R}^N, \\ (0, \mu(A)) & \text{si } A \neq \mathbb{R}^N \text{ est ouvert}, \\ [0, \mu(A)] & \text{si } A \neq 0 \text{ est fermé}. \end{cases}$$

Cette transformation n'est pas le réarrangement décroissant de la remarque 1.1.1 (p. 7). Si u est positive non nulle continue à support compact, alors

$$\sup_{x \in \Omega} u(x) = \bar{S}_\delta u(0) > 0 = \breve{S} u(0).$$

Par ailleurs, on a $\operatorname{dom} \bar{S}_\delta \neq \operatorname{dom} \breve{S}_\delta$. En effet, la fonction

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \geq 0, \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est dans $\operatorname{dom} \bar{S}_\delta$, mais pas dans $\operatorname{dom} \breve{S}_\delta$ puisque $\{u > 0\} = [0, 1)$ n'est ni ouvert ni fermé.

Exemple 2.1.4. La transformation d'ensembles

$$S_\Sigma : \wp(\Omega) \to \wp(\{1, 2\}) : A \mapsto S_\Sigma(A) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } A = \emptyset, \\ \{1, 2\} & \text{si } A = \Omega, \\ \{1\} & \text{sinon}, \end{cases}$$

a une transformation de fonctions induite qui donne le supremum et l'infimum d'une fonction : en identifiant $(\{1, 2\} \to \mathbb{R})$ à $\mathbb{R}^2$, nous avons

$$\bar{S} u = \breve{S} u = (\sup u, \inf u).$$

Exemple 2.1.5. Un changement de variable est aussi une transformation de fonction induite par une transformation d'ensembles. Soit $\phi : \Omega \to \Omega^*$ une application surjective. Pour tout $A \in \operatorname{dom} S_\phi = \wp(A)$, nous posons $S_\phi(A) = \phi^{-1}(A)$. On a alors

$$\bar{S}_\phi(u) = u \circ \phi = \breve{S}(u).$$

Enfin, à toute transformation d'ensembles est associée une transformation complémentaire.

Définition 2.1.6. Soit S une transformation d'ensembles de Ω dans Ω^*. Sa *transformation complémentaire* est

$$S_c : \{A \in \wp(\Omega) \mid (\Omega \setminus A) \in \operatorname{dom} S\} \to \wp(\Omega^*) :$$
$$A \mapsto S_c(A) = \Omega^* \setminus S(\Omega \setminus A).$$

2.1.1 Ensembles de niveau

Les transformations de fonctions se définissant à partir de transformations des ensembles de niveau, nous examinons les liens entre les ensembles de niveau de la transformée et les transformées des ensembles de niveau. La première proposition est immédiate.

Proposition 2.1.1. *Soit S une transformation d'ensembles et $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$, on a*

$$S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\}.$$

Pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$, on a

$$S(\{u > c\}) \subseteq \{\breve{S}u \geq c\}.$$

Ces résultats ne peuvent être améliorés : pour S_μ (exemple 2.1.2, p. 16) et

$$u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -|x|,$$

on a

$$S_\mu\big(\{u \geq -1\}\big) = S_\mu\big([-1, 1]\big) = \{2\} \subsetneq \{\bar{S}_\mu u \geq 1\} = [0, 2]$$

et

$$\begin{aligned} S_\mu\big(\{u > -1\}\big) = S_\mu\big((-1, 1)\big) = \{2\} \subsetneq \{\breve{S}_\mu u \geq 1\} &= (0, 2] \\ \neq \{\breve{S}_\mu u > 1\} &= (0, 2). \end{aligned}$$

Le résultat est fort pour les fonctions caractéristiques d'ensembles, ce qui justifie qu'on considère la transformation de fonctions induite comme une extension de transformation d'ensembles.

Notation 2.1.7. La fonction caractéristique d'un ensemble $A \subseteq X$ est notée

$$\chi_A : X \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.1.2. *Soit S une transformation d'ensemble et $A \in \operatorname{dom} S$. Alors $\chi_A \in \operatorname{dom} \bar{S} \cap \operatorname{dom} \breve{S}$ et*

$$\bar{S}(\chi_A) = \chi_{S(A)} = \breve{S}(\chi_A).$$

Démonstration. Pour $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\{\chi_A \geq c\} = \begin{cases} \Omega & \text{si } c \leq 0, \\ A & \text{si } 0 < c \leq 1, \\ \emptyset & \text{si } c > 1, \end{cases}$$

d'où $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$. De plus, on a $\bar{S}\chi_A(y) = 1$ si $y \in S(A)$ et $\bar{S}\chi_A(y) = 0$ sinon. Par conséquent, on a $\chi_{S(A)} = \bar{S}\chi_A$. Le raisonnement est semblable pour la transformation induite ouverte $\breve{S}(\chi_A)$. □

Cette proposition n'est pas vraie en général si les hypothèses $S(\emptyset) = \emptyset$ et $S(\Omega) = \Omega^*$ sont supprimées dans la définition 2.1.5 (p. 16).

2.1.2 Relations de commutation

Les transformations de fonctions induites par des transformations d'ensembles ne sont généralement pas linéaires. Mais, puisque leur définition fait intervenir la structure d'ordre, elles doivent entretenir des relations particulières avec des transformations monotones et de fait elles commutent avec des transformations non linéaires de la forme $u \mapsto f \circ u$ avec $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ est croissante.

Proposition 2.1.3. *Soit S une transformation d'ensemble et $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ strictement croissante et continue.*
Alors, pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$, $f \circ u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}(u).$$

De même, pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$, $f \circ u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ et

$$\breve{S}(f \circ u) = f \circ \breve{S}(u).$$

Démonstration. Soit $y \in \Omega^*$. Puisque f est croissante et bijective nous avons

$$\begin{aligned} f(\bar{S}u(y)) &= f(\sup\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{u \geq c\})\}) \\ &= \sup\left\{f(c) \mid c \in \bar{\mathbb{R}} \text{ et } y \in S(\{u \geq c\})\right\} \\ &= \sup\left\{f(c) \mid c \in \bar{\mathbb{R}} \text{ et } y \in S(\{f \circ u \geq f(c)\})\right\} \\ &= \sup\left\{d \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{f \circ u \geq d\})\right\} \\ &= \bar{S}(f \circ u)(y). \end{aligned}$$

Le même raisonnement s'applique à la transformation induite ouverte $\breve{S}u$. □

Cette proposition implique que certaines transformations de fonctions ne sont pas induites par une transformation d'ensemble. En particulier, il n'existe pas de transformation de fonctions induite telle que $\bar{S}u$ soit toujours convexe. Si c'était le cas, on aurait $\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}(u)$ convexe pour toute bijection croissante, ce qui est absurde puisque pour toute fonction convexe non constante u, il existe f croissante bijective telle que $f \circ u$ ne soit pas convexe.

La proposition précédente permet aussi de mettre en évidence quelques cas où les transformations de fonctions induites ont des comportements de type linéaire.

Corollaire 2.1.4. *Soit S une transformation d'ensembles et $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$. Alors, pour tout $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$, $au + b \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et*

$$\bar{S}(au + b) = a(\bar{S}u) + b.$$

Le résultat reste vrai si on remplace $\bar{S}$ par $\breve{S}$.

Cette propriété est fausse en général pour $a < 0$. Si $a = 0$, l'égalité est vraie si $\max\{\sup u, -\inf u\} < +\infty$ ou si on définit $0 \cdot (\pm\infty) = 0$.

Dans la proposition 2.1.3, l'hypothèse de bijectivité de f ne peut pas être levée : pour S_μ, $u : x \mapsto 1 - |x|$ et $f = \chi_{\mathbb{R}^+}$, nous avons

$$\begin{aligned} \bar{S}_\mu(f \circ u) &= \bar{S}_\mu \chi_{[-1,1]} = \chi_{\{2\}} \\ &\neq f \circ \bar{S}_\mu(u) = \chi_{[0,1]}. \end{aligned}$$

Par contre, si f n'est que continue à droite et croissante, nous gardons une inégalité pour la transformation induite fermée.

Proposition 2.1.5. *Soit une transformation d'ensembles S et une fonction $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante et continue à droite.*
Alors, pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ avec $f \circ u \in \operatorname{dom} \bar{S}$, on a

$$\bar{S}(f \circ u) \leq f \circ \bar{S}u.$$

Démonstration. Soit $d \in \bar{\mathbb{R}}$. Par le lemme suivant (lemme 2.1.6), il existe $c \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que

$$d \leq f(s) \iff c \leq s$$

et donc, par la proposition 2.1.1,

$$S(\{f \circ u \geq d\}) = S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\} = \{f \circ \bar{S}u \geq d\}.$$

Puisque cette inclusion vaut pour tout $d \in \bar{\mathbb{R}}$, on a

$$\begin{aligned} \bar{S}(f \circ u)(y) &= \sup\left\{d \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{f \circ u \geq d\})\right\} \\ &\leq \sup\left\{d \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in \{f \circ \bar{S}u \geq d\})\right\} = f \circ \bar{S}u(y). \qquad \square \end{aligned}$$

Remarque 2.1.1. Il n'y pas de propriété analogue pour la transformation ouverte. En effet, si on prend la transformation d'ensembles S_μ (exemple 2.1.2, p. 16),

$$A \subset B \subset \Omega,$$
$$\mu(A) < \mu(B) < +\infty,$$
$$u = \chi_{B \setminus A} + 2\chi_A$$

et f continue telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = f(2) = 1$, alors

$$f \circ \breve{S}_\mu u = \chi_{\{\mu(A),\mu(B)\}} \gneqq \chi_{\{\mu(B)\}} = \breve{S}_\mu(f \circ u).$$

Pour $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto -|x|$ et $f = \chi_{\mathbb{R}^+}$ continue à droite, on a

$$f \circ \breve{S}_\mu u = 0 \lneqq \chi_{\{0\}} = \breve{S}_\mu(f \circ u).$$

et pour $u(x) = -|x| + 1$ et $f = \chi_{(-1,+\infty]}$ continue à gauche, on a

$$f \circ \breve{S}_\mu u = \chi_{(0,2)} \neq \chi_{\{2\}} = \breve{S}_\mu(f \circ u).$$

Lemme 2.1.6. *Soit $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante.*
Sont équivalents :

1. *f est semi-continue supérieurement,*
2. *f est continue à droite,*
3. *pour $d \in \bar{\mathbb{R}}$ il existe $c \in \bar{\mathbb{R}}$ tel que*

$$f(s) \geq d \iff s \geq c. \tag{2.3}$$

Démonstration. (2 $\Rightarrow$ 1) Si f est croissante et continue à droite, elle est semi-continue supérieurement.

(1 $\Rightarrow$ 3) Pour tout $d \in \bar{\mathbb{R}}$, l'ensemble

$$C_d = \left\{t \in \bar{\mathbb{R}} \mid f(t) \geq d\right\}$$

est un intervalle fermé puisque f est semi-continue supérieurement et croissante. On peut alors prendre $c = \min C_d \in \bar{\mathbb{R}}$. Si s vérifie $f(s) \geq d$, alors $s \in C_d$ et $s \geq c$. Inversement, si $s \geq c$, alors $f(s) \geq f(c) \geq d$ puisque $c \in C_d$.

(3 $\Rightarrow$ 2) Supposons que f vérifie la condition (2.3). Soit une suite décroissante $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \bar{\mathbb{R}}$ convergeant vers t. Puisque f est croissante, la suite $f(t_n)$ est décroissante et bornée inférieurement par $f(t)$. On a donc

$$\lim_{n \to \infty} f(t_n) \geq f(t).$$

Si on pose $d = \lim_{n \to \infty} f(t_n)$, par (3), il existe c tel que

$$f(s) \geq d \iff s \geq c.$$

Puisque $d \leq f(t_n)$ pour tout n, on a $c \leq t_n$ pour tout n, d'où $c \leq t$ et donc

$$f(t) \geq d = \lim_{n \to \infty} f(t_n). \qquad \square$$

2.1.3 Changement de variable

Nous nous sommes intéressés à la composition à gauche de fonctions. De l'autre côté de la transformation induite, nous pouvons faire des changements de variables. Cette idée est énoncée dans une démonstration de G. Alberti dans le cas des translations [Alb00, p. 465].

Proposition 2.1.7 (Changement de variable)**.** *Soient S_1 et S_2 des transformations d'ensemble de Ω_1 dans Ω_1^* et de Ω_2 dans Ω_2^*, $\Phi : \Omega_1 \to \Omega_2$ et $\Psi : \Omega_1^* \to \Omega_2^*$ des bijections telles que pour tout $A \subseteq \Omega$, on ait*

$$A \in \operatorname{dom} S_1 \iff \Phi(A) \in \operatorname{dom} S_2$$

et

$$S_2(\Phi(A)) = \Psi(S_1(A)).$$

Alors, pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}_1$,

$$\bar{S}_2(u \circ \Phi^{-1}) = (\bar{S}_1 u) \circ \Psi^{-1}.$$

La proposition reste vraie si on remplace $\bar{S}_1$ et $\bar{S}_2$ par $\breve{S}_1$ et $\breve{S}_2$.

Corollaire 2.1.8. *Soit G un groupe de transformations de Ω tel que pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ et pour tout $g \in G$, on ait $g(A) \in \operatorname{dom} S$ et*

$$S(g(A)) = S(A).$$

Alors, pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$, $gu = u \circ g^{-1} \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et

$$\bar{S} gu = \bar{S} u.$$

La proposition reste vraie si on remplace $\bar{S}$ par $\breve{S}$.

En particulier, pour la symétrisation de Schwarz $S_{N,N}$, $\bar{S}_{N,N}u$ est invariante par rapport à groupe de rotations des boules $B(0, R)$, c'est-à-dire $O(N)$. La symétrisation de fonctions leur donne donc la symétrie désirée.

2.2 Monotonie

La définition de transformation d'ensemble utilisant principalement des notions d'ordre, il est naturel d'imposer des hypothèses d'ordre aux transformation d'ensemble. La monotonie impliquera l'égalité et la dualité des transformations induite ouverte et fermée. De là, nous démontrons des relations

$$\{\breve{S} u \geq c\} \subseteq S(\{u \geq c\}),$$

des égalités de commutation pour f continue, la non-expansivité pour la norme du supremum et la bonne définition pour des classes d'équivalence de fonctions.

Définition 2.2.1. Une *transformation d'ensembles* S est *monotone* si, pour $A, B \in \operatorname{dom} S$, tout $A \subseteq B$, on a

$$S(A) \subseteq S(B).$$

Une *transformation de fonctions* T est monotone si, pour tout $u, v \in \operatorname{dom} T$ avec $u \leq v$, on a

$$Tu \leq Tv.$$

Les transformations du chapitre 1 sont monotones, ainsi que S_Σ et S_ϕ (exemples 2.1.4 et 2.1.5). Par contre, les transformations S_μ et S_δ (exemples 2.1.2 et 2.1.3) ne le sont pas.

2.2.1 Propriétés des transformations monotones

Les propriétés suivantes sont évidentes.

Proposition 2.2.1. *Soit S une transformation d'ensemble. Sont équivalents :*

1. *la transformation d'ensembles S est monotone,*
2. *sa transformation de fonctions induite fermée $\bar{S}$ est monotone,*
3. *sa transformation de fonctions induite ouverte $\breve{S}$ est monotone,*
4. *sa transformation complémentaire S_c est monotone.*

Égalité des transformations ouverte et fermée Sous l'hypothèse de monotonie, les définitions de transformation induite ouverte et fermée sont équivalentes sur leur domaine commun.

Proposition 2.2.2. *Soit S une transformation d'ensembles monotone. Alors, pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S} \cap \operatorname{dom} \breve{S}$, on a*

$$\bar{S}u = \breve{S}u.$$

Démonstration. Pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\{u > c\} \subseteq \{u \geq c\} \subseteq \{u + \epsilon > c\},$$

d'où, par monotonie,

$$S(\{u > c\}) \subseteq S(\{u \geq c\}) \subseteq S(\{u + \epsilon > c\})$$

et donc
$$\breve{S}u \leq \bar{S}u \leq \breve{S}(u+\epsilon) = \breve{S}u + \epsilon.$$
Puisque ϵ peut être choisi arbitrairement petit, on arrive à
$$\breve{S}u \leq \bar{S}u \leq \breve{S}u.$$
□

À partir d'ici, lorsqu'il n'y aura pas de confusion possible, nous noterons S la transformation
$$S : (\operatorname{dom} \bar{S} \cap \operatorname{dom} \breve{S}) \to (\Omega^* \to \mathbb{R}) : u \mapsto \bar{S}u = \breve{S}u.$$
L'ambiguïté avec la transformation d'ensembles est légère, vu que, par la proposition 2.1.2 (p. 18),
$$S(\chi_A) = \bar{S}(\chi_A) = \breve{S}(\chi_A) = \chi_{S(A)}.$$

Dualité entre transformations ouverte et fermée Nous mettons en évidence une relation de dualité entre une transformation induite ouverte et la transformation fermée induite par sa complémentaire. Auparavant, nous énonçons un lemme dont la démonstration est évidente.

Lemme 2.2.3 (Définitions alternatives de transformation induite)**.** *Soit S une transformation d'ensembles monotone.*
Alors, pour tout $y \in \Omega^*$,
$$\bar{S}u(y) = \inf\left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \notin S(\{u \geq c\})\right\}, \tag{2.4}$$
$$\bar{S}u(y) = \int_{\mathbb{R}} (\chi_{S(\{u\geq c\})}(y) - \chi_{\mathbb{R}^+}(c))\, dc. \tag{2.5}$$

Une définition du réarrangement proche de (2.4) est utilisée par G. Talenti [Tal76b], tandis que E. Lieb et M. Loss se servent d'une définition semblable à (2.5) [LL01, section 3.3, p. 80].

Proposition 2.2.4 (Dualité entre transformation de fonction induites ouverte et fermée)**.** *Soit S une transformation d'ensembles monotone.*
Alors
$$\breve{S}u = -\bar{S}_c(-u).$$

Démonstration. Il suffit de noter que
$$\{u > c\} = \Omega \setminus \{-u \geq -c\}$$
et d'appliquer la formule (2.4). □

Les résultats de dualité et d'égalité des transformations induites ouverte et fermée impliquent l'équivalence des définitions

$$\begin{aligned} Su(y) &= \sup\left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{u \geq c\})\right\} = \sup\left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \in S(\{u > c\})\right\} \\ &= \inf\left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \notin S(\{u \geq c\})\right\} = \inf\left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid y \notin S(\{u > c\})\right\}, \end{aligned}$$

déjà donnée pour les réarrangements de fonctions continues par B. Kawohl [Kaw85, p. 8].

Relations de commutation Les résultats d'égalité et de dualité permettent de passer facilement de la transformation de fonctions induite fermée à la transformation de fonctions induite ouverte. Ainsi nous obtenons une inégalité de commutation pour la transformation induite ouverte à partir de celle pour la transformation induite fermée (proposition 2.1.5, p. 20).

Proposition 2.2.5. *Soient S une transformation d'ensembles monotone et $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante.*

Si f est continue à gauche, alors pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$, on a $f \circ u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ et

$$f \circ \breve{S}u \leq \breve{S}(f \circ u).$$

Si f est continue, alors pour tout $u \in \operatorname{dom} S$, on a $f \circ u \in \operatorname{dom} S$ et

$$f \circ Su = S(f \circ u).$$

Démonstration. Si f est continue à gauche, l'inégalité se déduit par dualité de la propriété équivalente de la transformation fermée induite complémentaire (proposition 2.1.5, p. 20). Le cas où f est continue est la conséquence des inégalités pour f continue à gauche et f continue à droite et de l'égalité des transformations (proposition 2.2.2, p. 23). □

En fait, la relation de commutation avec les fonctions continues est une condition suffisante de monotonie.

Proposition 2.2.6. *Soit S une transformation de fonctions induite. Si pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante et continue et pour tout $u \in \operatorname{dom} S$, on a*

$$f \circ Su = S(f \circ u),$$

Alors S est monotone.

Démonstration. Soient $A, B \in \operatorname{dom} S$ tels que $A \subseteq B$. La fonction

$$u : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x \in A, \\ 1 & \text{si } x \in B \setminus A, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est dans $\operatorname{dom} S = \operatorname{dom} \bar{S} \cap \operatorname{dom} \breve{S}$. En prenant

$$h_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq c-1 \\ t-c+1 & \text{si } c-1 < t \leq c \\ 1 & \text{si } t > c, \end{cases}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \chi_B &= h_1 \circ u, \\ \chi_A &= h_2 \circ u, \end{aligned}$$

et

$$\chi_{S(A)} = S\chi_A = S(h_2 \circ u) = h_2 \circ Su \leq h_1 \circ Su = S(h_1 \circ u) = S\chi_B = \chi_{S(B)}.$$

Par conséquent, on a

$$S(A) \subseteq S(B).$$

□

Sous-ensembles de niveau De la même manière, pour les sous-ensembles de niveau, nous pouvons étendre les résultats de la proposition 2.1.1 (p. 18).

Proposition 2.2.7. *Soient S une transformation d'ensembles monotone, $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ et $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Alors,*

$$\{\breve{S}u > c\} \subseteq S(\{u > c\}).$$

Démonstration. Soit $h_c(s) = 0$ si $s \leq c$ et 1 sinon. La fonction h_c est croissante et continue à gauche. Par commutation de $\breve{S}$ avec les fonctions croissantes et continues à gauche (proposition 2.2.5), on a

$$\chi_{\{\breve{S}u > c\}} = h_c \circ \breve{S}u \leq \breve{S}(h_c \circ u) = \breve{S}\chi_{\{u>c\}} = \chi_{S(\{u>c\})}$$

et donc

$$\{\breve{S}u > c\} \subseteq S(\{u > c\}).$$

□

2.2.2 Transformations bien définies

Lorsque (Ω, μ) et (Ω^*, ν) sont des espaces mesurés, il est désirable de travailler avec des classes d'équivalence de fonctions mesurables égales presque partout. Il faut alors savoir si les images de deux fonctions égales μ-p.p. sont égales ν-p.p. Ce n'est pas toujours le cas avec les transformations définies ci-dessus. Par exemple, si on applique la transformation S_Σ de $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}^N)$ dans $\{1, 2\}$ à la famille de fonctions

$$s_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq 0, \\ c & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

on a, pour tout $c_1 > c_2 > 0$, $s_{c_1} = s_{c_2}$ μ-p.p. et

$$\bar{S}s_{c_1}(1) = c_1 > \bar{S}s_{c_2}(1) = c_2$$

sur un ensemble de mesure 1. Il faut donc introduire une hypothèse supplémentaire.

Définition 2.2.2. Soient (Ω, μ) et (Ω^*, ν) des ensembles mesurés. Une transformation d'ensembles S de Ω dans Ω^* est *bien définie* si pour tout $A \in \operatorname{dom} S$, A est mesurable et, pour tout B mesurable avec $\mu(B \,\Delta\, A) = 0$, on a $B \in \operatorname{dom} S$ et

$$\mu(S(B) \,\Delta\, S(A)) = 0.$$

Si $S(A)$ ne dépend que de la mesure de $\mu(A)$, alors S est bien définie presque partout. Les symétrisations de Schwarz, Steiner, sphérique et décroissante sont toutes bien définies presque partout. De plus, S est bien définie si et seulement si S_c est bien définie. Nous allons montrer que les transformations de fonctions induites par des transformations monotones bien définies transforment des classes d'équivalences de fonctions en classes d'équivalences de fonctions.

Proposition 2.2.8. *Soient (Ω, μ) et (Ω^*, ν) des espaces mesurés σ–finis et S une transformation d'ensembles monotone bien définie de Ω dans Ω^*.*

Alors, pour tout $u, v \in \operatorname{dom} \bar{S}$, si $u \leq v$ μ-p.p., on a

$$\bar{S}u \leq \bar{S}v, \qquad \nu\text{-p.p.}$$

De même, pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$, si $u \leq v$ μ-p.p., on a

$$\breve{S}u \leq \breve{S}v, \quad \nu\text{-p.p.}$$

Démonstration. La preuve découle du lemme suivant (lemme 2.2.9) et de ce que si $u \leq v$ μ-p.p., alors

$$\mu(\{u \geq c\} \setminus \{v \geq c\}) = 0. \qquad \square$$

Lemme 2.2.9. *Soient (Ω, μ) un ensemble mesuré σ–fini et $(A_c)_{c\in\mathbb{R}}$ et $(B_c)_{c\in\mathbb{R}}$ des familles d'ensembles μ–mesurables de Ω.*

Si pour tout $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$, $c_1 < c_2$, on a

$$A_{c_2} \subseteq A_{c_1}, \quad B_{c_2} \subseteq B_{c_1}$$

et, pour tout $c \in \mathbb{R}$, on a

$$\mu(B_c \setminus A_c) = 0,$$

alors, pour μ-presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\sup\{c \in \mathbb{R} \mid x \in A_c\} \leq \sup\{c \in \mathbb{R} \mid x \in B_c\}.$$

Démonstration. Posons

$$M = \{(x, c) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid x \in A_c \setminus B_c\},$$

pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$M_c = \{x \in \Omega \mid (x, c) \in M\} = A_c \setminus B_c$$

et, pour $x \in \Omega$,

$$M^x = \{c \in \mathbb{R} \mid (x, c) \in M\}.$$

L'ensemble M est mesurable. En effet, on a

$$M^- = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (A_{\frac{i}{n}} \setminus B_{\frac{i+1}{n}}) \times [\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] \subseteq M,$$
$$M \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (A_{\frac{i+1}{n}} \setminus B_{\frac{i}{n}}) \times [\tfrac{i}{n}, \tfrac{i+1}{n}] = M^+,$$

avec $\mu(M^+ \setminus M^-) = 0$.

Puisque la mesure μ est σ–finie et puisque $\mu(M_c) = 0$ pour tout $c \in \mathbb{R}$, le théorème de Fubini [Sch93, Théorème 5.12.14, p. 392] donne

$$\int_\Omega \mathcal{L}^1(M^x) d\mu = (\mu \times \mathcal{L}^1)(M) = \int_\mathbb{R} \mu(M_c) d\mathcal{L}^1 = 0.$$

Nous avons donc pour μ-presque tout $x \in \Omega$

$$\mu(M^x) = \mu(\{c \mid x \in A_c \setminus B_c\}) = 0$$

et, par conséquent,

$$\sup\{c \in \mathbb{R} \mid x \in A_c\} \leq \sup\{c \in \mathbb{R} \mid x \in B_c\}. \qquad \square$$

Remarque 2.2.1. La monotonie est indispensable pour prouver que M est mesurable. On ne peut pas la laisser tomber en redéfinissant par exemple la transformation induite par

$$\bar{S}u(y) = \sup\operatorname{ess}\left\{c \in \mathbb{R} \mid y \in S(\{u \geq c\})\right\},$$

puisqu'alors il existe un M non-mesurable tel que

$$(\mu \times \mathcal{L}^1)(M) = \int_{\mathbb{R}} \mu(S(\{u \geq c\}) \,\Delta\, \{\bar{S}u \geq c\}) d\mathcal{L}^1 = 0$$

et

$$(\mu \times \mathcal{L}^1)(M) = \int_{\Omega} |\bar{S}u - \bar{S}v| d\mu > 0.$$

(voir [Sch93, remarque 5.12.8, pp. 398–399]).

2.2.3 Monotonie et contraction

Pour terminer cet exposé sur la monotonie nous montrons que la monotonie est une condition nécessaire et suffisante de contractivité pour la distance du supremum.

Proposition 2.2.10. *Soit S une transformation d'ensembles.*

La transformation d'ensembles S est monotone si et seulement si pour tout $u, v \in \operatorname{dom} \bar{S}$,

$$\sup_{y \in \Omega^*} |\bar{S}u(y) - \bar{S}v(y)| \leq \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|.$$

Si S est monotone et bien définie, alors

$$\sup_{y \in \Omega^*}\operatorname{ess} |\bar{S}u(y) - \bar{S}v(y)| \leq \sup_{x \in \Omega}\operatorname{ess} |u(x) - v(x)|.$$

La proposition reste vraie si on remplace $\bar{S}$ par $\breve{S}$.

Démonstration. Soient $u, v \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et $\delta = \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|$. On a donc

$$v - \delta \leq u \leq v + \delta.$$

et, par monotonie de $\bar{S}$ et la linéarité avec les constantes (corollaire 2.1.4, p. 20),

$$\bar{S}v - \delta \leq \bar{S}u \leq \bar{S}v + \delta,$$

d'où on conclut

$$\|Su - Sv\|_\infty \leq \delta = \|u - v\|_\infty.$$

Inversement, pour $A, B \in \operatorname{dom} S$ avec $A \subseteq B$, on a

$$\|2\chi_{S(A)} - \chi_{S(B)}\|_\infty = \|\bar{S}(2\chi_A) - \bar{S}(\chi_B)\|_\infty \leq \|2\chi_A - \chi_B\|_\infty = 1,$$

et donc $S(A) \subseteq S(B)$.

Pour le supremum essentiel, le raisonnement utilise la proposition 2.2.8. Le cas des transformations induites ouvertes se démontre par dualité (proposition 2.2.4, p. 24). □

Nous rassemblons les résultats concernant la monotonie.

Théorème 2.2.11. *Soit S une transformation d'ensemble.*
Sont équivalents

1. *S est monotone,*
2. *$\bar{S}$ est monotone,*
3. *$\breve{S}$ est monotone,*
4. *S_c est monotone,*
5. *pour tout $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissante continue et pour tout $u \in \operatorname{dom} S$,*
$$S(f \circ u) = f \circ Su,$$
6. *pour tout $u, v \in \operatorname{dom} S$,*
$$\sup_{y \in \Omega^*} |Su(y) - Sv(y)| \leq \sup_{x \in \Omega} |u(x) - v(x)|.$$

Démonstration. Cela découle des propositions 2.2.1 (p. 23), 2.2.5 (p. 25), 2.2.6 (p. 25) et 2.2.10. □

2.3 Continuité

La monotonie nous a permis de montrer, pour f continue et croissante

$$S(f \circ u) = f \circ Su \tag{2.6}$$

(proposition 2.2.5, p. 25) ou encore, pour $c \in \mathbb{R}$,

$$\{\breve{S}u > c\} \subseteq S(\{u \geq c\}) \tag{2.7}$$

(proposition 2.2.7, p. 26). Si nous voulons supprimer l'hypothèse de continuité sur f dans (2.6) ou remplacer l'inclusion par une égalité dans (2.7), nous devons ajouter l'hypothèse de continuité (intérieure ou extérieure) introduite par J. Sarvas [Sar72] (voir [BS99, p. 1764]).

Définition 2.3.1. Une transformation d'ensembles S de Ω dans Ω^* est *continue intérieurement* si, pour toute suite croissante

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad A_n \in \operatorname{dom} S, \quad A_n \subseteq A_{n+1}$$

telle que

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \operatorname{dom} S,$$

on a

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(A_n) = S\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Elle est *continue extérieurement* si, pour toute suite décroissante

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}, \quad A_n \in \operatorname{dom} S, \quad A_n \supseteq A_{n+1}$$

telle que

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \operatorname{dom} S,$$

on a

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n) = S\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big).$$

Si S est monotone et si Ω^* est muni d'une mesure ν, S est continue intérieurement ou extérieurement p.p. si les égalités sont satisfaites à un ensemble ν–négligeable près.

La symétrisation de Schwarz n'est pas continue. Si e désigne un vecteur de $\mathbb{R}^N$ de norme unité, on a en effet, pour la suite $A_n = B(e/n, 1/n)$,

$$\begin{aligned} S\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} A_n\Big) &= S(\emptyset) = \emptyset \\ &\neq \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} S(A_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}_0} B(0, 1/n). \end{aligned}$$

Par contre elle est continue p.p., de même que la symétrisation de Steiner, la symétrisation sphérique ou le réarrangement croissant. Des exemples de transformations continues sont S_ϕ (exemple 2.1.5, p. 17) et les polarisations (section 5.1, p. 62).

Proposition 2.3.1. *Soit S une transformation d'ensembles.*
Sont équivalents :

1. *S est continue intérieurement,*
2. *S_c est continue extérieurement,*

3. *pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} \bar{S}$ croissant vers u, la suite $\bar{S}u_n$ croît vers $\bar{S}u$,*
4. *pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ et pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \operatorname{dom} \breve{S}$ croissant vers u, la suite $\breve{S}u_n$ croît vers $\breve{S}u$,*

Si S vérifie une des hypothèses ci-dessus, S est monotone.

Si S est monotone, ces équivalences sont vraies pour la convergence ν-p.p. et la continuité p.p.

Dans la suite, nous allons montrer l'équivalence entre la continuité et des propriétés de commutation et d'ensembles de niveau. Tout d'abord, la continuité extérieure permet de remplacer l'inclusion par une égalité dans

$$S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\}.$$

Proposition 2.3.2. *Soit S une transformation d'ensemble continue extérieurement. Alors pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $c \in \bar{\mathbb{R}}$ on a*

$$\{\bar{S}u \geq c\} = S(\{u \geq c\}).$$

L'égalité est vérifiée à un ensemble ν–négligeable près si S est continue extérieurement p.p.

Démonstration. Soit $c \in \bar{\mathbb{R}}$. Par la proposition 2.1.1 (p. 18) et par continuité extérieure et monotonie de S, on obtient

$$S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(\{u \geq c - 1/n\}) = S(\{u \geq c\}). \qquad \square$$

Cette propriété implique à son tour la commutation avec les fonctions croissantes, propriété démontrée par J. Mossimo [Mos84] et citée par E. Lieb et M. Loss [LL01] dans le cas de la symétrisation de Schwarz.

Proposition 2.3.3. *Soit S une transformation d'ensemble.*

Supposons que pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $c \in \bar{\mathbb{R}}$ on ait

$$\{\bar{S}u \geq c\} = S(\{u \geq c\}).$$

Alors, pour tout $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante, on a

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u.$$

Soit S une transformation d'ensembles monotone. Supposons que pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $c \in \bar{\mathbb{R}}$ on ait

$$\{\bar{S}u \geq c\} = S(\{u \geq c\})$$

à un ensemble ν–négligeable près. Alors, pour tout $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante, on a

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u \quad \nu\text{-}p.p.$$

Démonstration. Tout d'abord, S est monotone. En effet, si pour $A, B \in \operatorname{dom} S$ avec $A \subseteq B$ nous posons $u = \chi_A + \chi_B$, nous avons par hypothèse

$$S(A) = S(\{u \geq 2\}) = \{\bar{S}u \geq 2\} \subseteq \{\bar{S}u \geq 1\} = S(\{u \geq 2\}) = S(B).$$

Puisque S est monotone, on a, par la proposition 2.2.5 (p. 25),

$$\bar{S}(f \circ u) \leq f \circ \bar{S}u.$$

Soit $d \in \bar{\mathbb{R}}$. L'ensemble

$$f^{-1}\big((d, +\infty]\big)$$

est un intervalle I infini à droite, qui peut être représenté sous la forme

$$I = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [c_n, +\infty],$$

avec $c_n \in \bar{\mathbb{R}}$. Puisque S est monotone, nous avons

$$\begin{aligned} \{f \circ \bar{S}u \geq d\} &= \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{\bar{S}u \geq c_n\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S\left(\{u \geq c_n\}\right) \\ &\subseteq S\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{u \geq c_n\}\Big) = S\left(f \circ u \geq d\right) = \{\bar{S}(f \circ u) \geq d\}. \end{aligned}$$

Pour la deuxième partie, la monotonie est une hypothèse et le reste de la preuve se fait de la même manière. □

Cette propriété nous permet de retrouver la continuité.

Proposition 2.3.4. *Soit S une transformation d'ensembles. Supposons que pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante continue à droite on ait*

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u.$$

Alors S est continue extérieurement.

Soit S une transformation d'ensembles monotone. Supposons que pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante continue à droite on ait

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u \quad \nu\text{-p.p.}$$

Alors S est continue extérieurement p.p.

Démonstration. Par le théorème 2.2.11 (p. 30), S est monotone. Soit $A \in \operatorname{dom} S$ et une suite A_n, $n \geq 1$. On pose

$$u(x) = \sup\left\{-1/n \mid x \in A_n\right\}.$$

On a

$$\{u \geq c\} = \begin{cases} \Omega & \text{si } c = -\infty, \\ A_n & \text{si } c < 0 \text{ et } n-1 < -1/c \leq n, \\ A & \text{si } c = 0, \\ \emptyset & \text{sinon,} \end{cases}$$

et donc $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$. Pour $f = \chi_{\mathbb{R}^+}$, nous avons par hypothèse

$$\chi_{S(A)} = \bar{S}\chi_A = \bar{S}(f \circ u) = f \circ (\bar{S}u) = \chi_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n)}.$$

et donc

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n) = S(A).$$

La démonstration du second énoncé est semblable. □

Tous les résultats ci-dessus sont résumés dans le théorème suivant.

Théorème 2.3.5. *Soit S une transformation d'ensemble. Sont équivalents*

1. *S est continue extérieurement,*
2. *$\bar{S}$ est continue pour les suites décroissantes,*
3. *$\breve{S}$ est continue pour les suites décroissantes,*
4. *S_c est continue intérieurement,*
5. *pour tout $c \in \bar{\mathbb{R}}$, $S\{u \geq c\} = \{\bar{S}u \geq c\}$,*
6. *pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et pour tout $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante continue à droite*
$$f \circ (\bar{S}u) = \bar{S}(f \circ u),$$

La transformation S est alors monotone.

Si S est monotone et Ω^* est muni d'une mesure ν σ–finie, alors la proposition est vraie en remplaçant la convergence partout dans Ω^* par la convergence ν–presque partout, les égalités par des égalités ν-p.p. et la continuité par la continuité p.p. En outre, la transformation S est alors bien définie.

2.4 Représentation d'une transformation de fonctions

Nous terminons ce chapitre en énonçant une condition nécessaire pour qu'une transformation de fonctions soit induite par une transformation d'ensembles.

Proposition 2.4.1. *Soit T une transformation de fonctions. Supposons que pour toute fonction $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante et continue à droite (resp. continue à gauche) et pour tout $u \in \operatorname{dom} T$, on ait $f \circ u \in \operatorname{dom} T$ et*

$$T(f \circ u) = f \circ Tu,$$

Alors, il existe une transformation d'ensembles S telle que $\bar{S}$ (resp. $\breve{S}$) prolonge T.

Soit T une transformation de fonctions monotone telle que pour toute fonction $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ croissante et continue à droite (resp. continue à gauche) et pour tout $u \in \operatorname{dom} T$ on ait $f \circ u \in \operatorname{dom} T$ et

$$T(f \circ u) = f \circ Tu. \qquad \nu\text{-p.p.}$$

Alors, il existe une transformation d'ensembles S telle pour tout $u \in \operatorname{dom} T$, $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ et

$$\bar{S}u = Tu, \qquad \nu\text{-p.p.}$$

(resp. $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ et $\breve{S}u = Tu$ ν-p.p.).

Démonstration. Posons

$$\operatorname{dom} S = \{A \subseteq \Omega \mid \chi_A \in \operatorname{dom} T\}.$$

et, pour $c > 0$,

$$h_c(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < c, \\ 1 & \text{si } x \geq c. \end{cases}$$

On définit $S(A)$ par

$$\chi_{S(A)} = h_1 \circ T\chi_A.$$

Soit $u \in \operatorname{dom} T$. Par hypothèse, pour $c \in \mathbb{R}$, nous avons

$$\chi_{\{u \geq c\}} = h_c \circ u \in \operatorname{dom} T,$$

d'où on a $\{u \geq c\} \in \operatorname{dom} S$ et, par conséquent, $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$. Les valeurs de $\bar{S}u$ et de Tu coïncident pour tout $y \in \Omega^*$:

$$\begin{aligned} \bar{S}u(y) &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y \in S(\{u \leq c\})\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid (h_1 \circ T(h_c \circ u))(y) = 1\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid (h_1 \circ (h_c \circ Tu))(y) = 1\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid (h_c \circ Tu)(y) = 1\} \\ &= \sup\{c \in \mathbb{R} \mid \{Tu \leq c\}\} \\ &= Tu(y). \end{aligned}$$

Pour le second énoncé, la preuve est semblable, si ce n'est que l'égalité ν-p.p.

$$\sup \{c \in \mathbb{R} \mid (h_1 \circ T(h_c \circ u))(y) = 1\} = \sup \{c \in \mathbb{R} \mid (h_1 \circ (h_c \circ Tu))(y) = 1\}$$

découle du lemme 2.2.9 (p. 28). □

Ce résultat montre que notre définition de transformation de fonctions induite englobe toutes les transformations de fonctions telles que pour tout f croissantes continues à droite ou à gauche on ait

$$f \circ Tu = T(f \circ u).$$

On s'attend donc à ce que toute transformation conservant les intégrales

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu = \int_{\Omega^*} f(Su)\, d\nu$$

soit une transformation de fonction induite Toute généralisation des méthodes des réarrangements laissant tomber la définition par ensembles de niveau devra abandonner la conservations de nombreuses intégrales et sera donc nettement moins générale.

Chapitre 3

Réarrangements

L'introduction d'une mesure permet de définir les réarrangements, transformations monotones et continue qui conservent les mesures, qui vérifieront des égalités et inégalités intégrales. La conservation de la mesure associée à la continuité donnera le principe de Cavalieri

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu = \int_{\Omega^*} f(Su)\, d\nu.$$

Ensuite, nous traiterons des inégalités de Hardy-Littlewood généralisées

$$\int_\Omega F(u^1, \dots, u^n)\, d\mu \leq \int_{\Omega^*} F(Su^1, \dots, Su^n)\, d\nu,$$

exprimant le rapprochement des fonctions lors d'un réarrangement.

3.1 Définition

Les définitions générales de réarrangement existantes imposent soit une structure très restrictive sur l'ensemble image de la transformation, excluant ainsi la symétrisation de Steiner [CZR86], soit de ne travailler qu'avec des ensembles de mesure finie [BS99], excluant le réarrangement croissant. Ces définitions impliquant toujours la continuité presque partout, notre définition imposera la continuité presque partout et généralisera la conservation de la mesure aux ensembles de mesure infinie.

Définition 3.1.1. Un *réarrangement* S est une transformation d'ensemble monotone et continue presque partout d'un espace mesuré (Ω, μ) vers un espace mesuré (Ω^*, ν) telle que si $A, B \in \operatorname{dom} S$ et $A \subseteq B$, alors A et B sont mesurables et

$$\mu(B \setminus A) = \nu(S(B) \setminus S(A)). \tag{3.1}$$

Cette définition implique que pour tout $A \in \operatorname{dom} S$,

$$\mu(A) = \nu(S(A)) \tag{3.2}$$

et en particulier que

$$\mu(\Omega) = \nu(\Omega^*).$$

Si S est un réarrangement, S_c est aussi un réarrangement.

Le lemme suivant permet de montrer la continuité p.p. de nombre de transformations d'ensembles. En particulier, si $\mu(\Omega) < +\infty$, alors il suffit d'imposer (3.2) pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ pour que S soit un réarrangement.

Lemme 3.1.1. *Soit S une transformation d'ensembles monotone de Ω dans Ω^*, telle que pour tout $A, B \in \operatorname{dom} S$, (3.1) soit satisfaite.*
Alors, pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ et pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad A_i \subseteq A_{n+1}, \quad \mu\text{-}p.p.,$$

avec

$$\mu(A \setminus A_0) < +\infty,$$

on a

$$\nu\Big(S(A) \setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(A_n)\Big) = 0.$$

Pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ et pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que

$$A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n, \quad A_i \supseteq A_{n+1}, \quad \mu\text{-}p.p.,$$

avec

$$\mu(A_0 \setminus A) < +\infty,$$

on a

$$\nu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n) \setminus S(A)\Big) = 0.$$

Démonstration. On a

$$\lim_{n\to\infty} \nu(S(A) \setminus S(A_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A \setminus A_n) = 0,$$

d'où

$$\nu\Big(S(A)\setminus \bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(A_n)\Big) = 0.$$

La seconde affirmation se démontre de manière analogue. □

Par conséquent, les symétrisations de Schwarz, de Steiner et sphérique et le réarrangement croissant sont continus p.p. et sont des réarrangements.

Proposition 3.1.2. *Soit S une transformation monotone de (Ω, μ) dans (Ω^*, ν) telle que si $A, B \in \operatorname{dom} S$ et $A \subseteq B$, A et B soient mesurables et*

$$\mu(B \setminus A) = \nu(S(B) \setminus S(A)) \tag{3.3}$$

et telle que $\operatorname{dom} S$ soit stable par intersections finies.

Alors, pour tout $A, B \in \operatorname{dom} S$,

$$\nu\big(S(A) \setminus S(B)\big) \leq \mu(A \setminus B).$$

Démonstration. Puisque $\operatorname{dom} S$ est fermé par intersections finies et S monotone, on a

$$\begin{aligned}
\nu\big(S(A) \setminus S(B)\big) &= \nu\big(S(A) \setminus (S(A) \cap S(B))\big) \\
&\leq \nu\big(S(A) \setminus S(A \cap B))\big) \\
&= \mu(A \setminus (A \cap B)) \\
&= \mu(A \setminus B).
\end{aligned}$$ □

En particulier, si une transformation d'ensembles monotone S vérifie (3.1) et si pour $A \in \operatorname{dom} S$ et $B \subset \Omega$ avec $\mu(A \,\Delta\, B) = 0$, on a $B \in \operatorname{dom} S$, alors S est bien définie.

3.2 Principe de Cavalieri

La conservation de la mesure conduit naturellement à la conservation d'intégrales de la forme

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu = c$$

pour $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive. Nous rappelons qu'un ensemble $B \subset \mathbb{R}^N$ est borélien s'il peut s'écrire comme union dénombrable d'ouverts et de fermés et qu'une fonction f est borélienne si l'image inverse $f^{-1}(B)$ de tout borélien B est un borélien [Sch93, p. 35].

Proposition 3.2.1. *Soit S un réarrangement, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne positive et $u \in \operatorname{dom} S$.*

Alors

$$\int_{\Omega^*} f(Su)\, d\nu = \int_\Omega f(u)\, d\nu,$$

les intégrales pouvant être infinies.

Démonstration. Par définition de l'intégrale de Lebesgue, on a

$$\int_\Omega f(u)\,d\mu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{1\leq k\leq n^2} \tfrac{k}{n}\mu\bigl(\{\tfrac{k}{n} < f(u) \leq \tfrac{k+1}{n}\}\bigr)$$

et

$$\int_\Omega f(u)\,d\nu = \lim_{n\to+\infty} \sum_{1\leq k\leq n^2} \tfrac{k}{n}\nu\bigl(\{\tfrac{k}{n} < f(Su) \leq \tfrac{k+1}{n}\}\bigr).$$

Si nous montrons que pour $0 < a < b$ on a

$$\mu\bigl(\{a < f(u) \leq b\}\bigr) = \nu\bigl(\{a < f(Su) \leq b\}\bigr),$$

alors l'égalité des intégrales suit.

Soient $0 < a < b$. Puisque f est borélienne et que tout borélien de $\mathbb{R}$ peut s'écrire comme union dénombrable d'intervalles disjoints, il existe une suite $(I_m)_{m\in\mathbb{N}}$ d'intervalles disjoints de $\mathbb{R}$ telle que

$$f^{-1}\bigl((a,b]\bigr) = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m$$

et donc

$$\{a < f(u) \leq b\} = \bigl\{x\in\Omega \mid u(x) \in \bigcup_{m\in\mathbb{N}} I_m\bigr\} = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} \{x\in\Omega \mid u(x)\in I_m\}\,.$$

Si I_m est ouvert, il s'écrit $I_m = (a_m, b_m)$ et on a par (3.1)

$$\begin{aligned}\mu\,\{x\in\Omega \mid u(x)\in I_m\} &= \mu(\{a_m < u < b_m\}) = \mu(\{u > a_m\}\setminus\{u \geq b_m\})\\ &= \nu(\{Su > a_m\}\setminus\{Su \geq b_m\}) = \nu(\{a_m < Su < b_m\})\\ &= \nu\,\{x\in\Omega \mid Su(x)\in I_m\}\,.\end{aligned}$$

Le même type de raisonnement valant pour les autres types d'intervalles, on arrive à

$$\mu\bigl(\{a < f(u) \leq b\}\bigr) = \nu\bigl(\{a < f(Su) \leq b\}\bigr). \qquad \square$$

Remarque 3.2.1. La continuité de S est une hypothèse essentielle. Par exemple, pour la transformation non continue S_{nc} de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$S_{nc}(A) = \begin{cases}(0,\mathcal{L}^1(A)) & \text{si } \mathcal{L}^1(A) < +\infty,\\ \mathbb{R} & \text{si } \mathcal{L}^1(A) = +\infty,\end{cases}$$

avec $f(t) = \chi_{(-\infty,0]}$ et $u(x) = e^{-x^2}$, on a

$$\int_\mathbb{R} f(u)\,dx = 0 \neq +\infty = \int_\mathbb{R} f(S_{nc}u)\,dx.$$

Par contre, si f est continue, on n'arrive pas à de telles contradictions. En effet, à chaque discontinuité de S correspond par le lemme 3.1.1 un saut infini dans la mesure des ensembles de niveau où f doit être nulle pour que l'intégrale soit finie.

Remarque 3.2.2. Rien n'empêche d'utiliser le théorème de Fubini pour démontrer des égalités plus générales pour des symétrisations de Steiner ou sphériques ou pour des réarrangements croissants. Par exemple, pour la symétrisation de Steiner, si $f(\cdot, x'')$ est borélienne pour tout x'', on a

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} f(u, x'')\, dx &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f(u, x'')\ dx'\, dx'' \\ &= \int_{\mathbb{R}^{N-k}} \int_{\mathbb{R}^k} f(S_{k,k} u(\cdot, x''), x'')\ dx'\, dx'' = \int_{\mathbb{R}^N} f(S_{k,N} u, x'')\, dx.\end{aligned}$$

Proposition 3.2.2. *Soit S un réarrangement et $1 \leq p \leq +\infty$.*
Alors, pour tout $u \in (L^p(\Omega) \cap \operatorname{dom} S)$,

$$\|Su\|_p = \|u\|_p.$$

Démonstration. Pour $p < +\infty$, c'est une conséquence de la proposition 3.2.1. Pour $p = +\infty$, la continuité p.p. et la conservation de la mesure impliquent pour tout $c \in \mathbb{R}$

$$\mu(\{u > c\}) = \nu\big(S(\{u > c\})\big) = \nu(\{Su > c\}).$$

et donc

$$\operatorname{sup\,ess} u = \operatorname{sup\,ess} Su.$$

De même, pour tout $c \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\mu(\{u < c\}) = \mu(\Omega \setminus \{u \geq c\}) &= \nu(\Omega^* \setminus S(\{u \geq c\})) \\ &= \nu(\Omega^* \setminus \{Su \geq c\}) = \nu(\{Su < c\}).\end{aligned}$$

et donc

$$\operatorname{inf\,ess} u = \operatorname{inf\,ess} Su.$$

Les deux égalités donnent alors

$$\|Su\|_\infty = \|u\|_\infty. \qquad \square$$

3.3 Inégalités de Hardy–Littlewood généralisées

Puisque le réarrangement conserve la mesure et qu'il est monotone, on s'attend à ce qu'il rapproche les fonctions en moyenne et donc à avoir des inégalités du type

$$\int_\Omega u^1 u^2 \cdots u^n \, d\mu \leq \int_{\Omega^*} Su^1 Su^2 \cdots Su^n \, d\nu$$

et

$$\int_{\Omega^*} |Su - Sv|^p \, d\nu \leq \int_\Omega |u - v|^p \, d\mu.$$

Plus généralement, nous allons étudier des conditions nécessaires ou suffisantes pour des inégalités de la forme

$$\int_\Omega F(u_1, \dots, u_n) \, d\mu \leq \int_{\Omega^*} F(Su_1, \dots, Su_n) \, d\nu, \tag{3.4}$$

pour des fonctions $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ et des réarrangements S.

L'inégalité

$$\int_\Omega uv \, d\mu \leq \int_{\Omega^*} Su \, Sv \, d\nu$$

a été démontrée pour $\Omega = \Omega^* = (0,1)$ muni de la mesure de Lebesgue par G. Hardy, J. Littlewood et G. Pólya [HLP34]. G. Lorentz a énoncé une condition nécessaire et suffisante sur F continue pour n fonctions, lorsque S est le réarrangement décroissant de $[0,1]$ dans $[0,1]$ [Lor53]. Cette condition suffisante a été étendue à des réarrangements arbitraires pour deux fonctions [CZR86]. Le cas à n fonctions est complètement résolu pour le réarrangement de fonctions continues pour F continue pour les réarrangements approximables par polarisations [Bro00b].

Notation 3.3.1. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ désignent des fonctions de $\Omega \to \mathbb{R}$, nous noterons

$$u = (u_1, \dots, u_n),$$
$$Su = (Su_1, \dots, Su_n).$$

Pour $s, t \in \mathbb{R}^n$, nous noterons $s \geq t$ si $s - t \in \mathbb{R}^n_+$, avec $\mathbb{R}^n_+ = (\mathbb{R}_+)^n$.

La propriété essentielle pour énoncer les conditions nécessaires et suffisantes pour ces inégalités est la propriété R_k.

Définition 3.3.2. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble convexe et $k \leq n$ entier.

La fonction $F : \Omega \to \mathbb{R}$ *satisfait la condition* R_k si pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ et $d_j \in \mathbb{R}$ pour $1 \leq j \leq k$ tels que

$$\forall l \in \{0,1\}^k, \quad x + \sum_{l_j=1} d_j e_{i_j} \in \Omega,$$

on a

$$\sum_{l\in\{0,1\}^k} \Big((-1)^{k-|l|} F\Big(x + \sum_{l_j=1} d_j e_{i_j}\Big)\Big) \geq 0,$$

avec $|l| = \sum_{j=1}^k l_j$ et e_j désignant le $j^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

Lorsque $k = 1$, cela revient à supposer que la fonction est monotone croissante en chacune de ses variables. Une fonction $F : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ vérifie la condition R_2 si et seulement si pour $a \leq b$ et $c \leq d$,

$$F(a,c) + F(b,d) \geq F(a,d) + F(b,c).$$

De telles fonctions peuvent être construites à partir de fonctions convexes.

Lemme 3.3.1. *Soit* $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *convexe. Alors*

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto F(s,t) = -J(s-t)$$

et

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto F(s,t) = J(s+t)$$

satisfont la condition R_2.

Démonstration. Pour $r \in \mathbb{R}$ et $s, t \in \mathbb{R}_+$ on a, par convexité de J,

$$J(r) - J(r-s) \leq J(r+t) - J(r+t-s).$$

En posant $r = b - d$, $s = b - a$ et $t = d - c$, on arrive à l'inégalité désirée.

La preuve de la seconde inégalité se fait avec $r = a + d$, $s = d - c$ et $t = b - a$. $\square$

Nous énonçons quelques propriétés élémentaires des fonctions vérifiant une condition R_k.

Notation 3.3.3. Dans la suite, ρ désigne une fonction de $\mathcal{D}_+(B(0,1))$ (positives indéfiniment dérivable à support compact dans $B(0,1)$),

$$\rho_m(x) = m^n \rho(mx)$$

et

$$\Omega_m = \{x \in \Omega \mid B(x, 1/m) \subset \Omega\}.$$

Pour $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ (fonctions localement intégrables) et $y \in \Omega_m$, la convolée de ρ_m et de u est

$$\rho_m * u(y) = \int_{B(0,1/m)} \rho_m(x) u(y-x)\ dx.$$

Proposition 3.3.2. *Si $F : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie la condition R_k, alors*

$$\tilde{F} : C \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} : (x', x'') \to F(x')$$

vérifie la condition R_k.

Si $F_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ et $F_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifient la condition R_k, alors pour tout $a_1, a_2 \in \mathbb{R}_+$, $a_1F_1 + a_2F_2$ la vérifie aussi.

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}$ est k fois dérivable, alors elle satisfait la condition R_k si et seulement si pour tout $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ on a

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} F(x) \geq 0, \quad \textit{pour tout } x \in \mathbb{R}^n_+.$$

Si $F : \Omega \to \mathbb{R}$ vérifie la condition R_k, alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\rho_m * F$ vérifie la condition R_k sur Ω_m.

Démonstration. Les deux premières affirmations sont évidentes.

Pour la troisième, si F est n fois dérivable, on a pour $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$,

$$\begin{aligned}\sum_{i \in \{0,1\}^k} \Big((-1)^{k-|l|} F\Big(t + \sum_{l_j=1} d_j e_{i_j}\Big)\Big) \\ = \int_{s_{i_1}=t_{i_1}}^{t_{i_1}+d_1} \cdots \int_{s_{i_k}=t_{i_k}}^{t_{i_k}+d_k} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_k} F(t+s)\ ds_{i_1}\ ds_{i_k}\end{aligned}$$

et l'équivalence est alors évidente.

La dernière se déduit de ce que

$$\rho_m * F(t) = \int_{B(0,1/m)} \rho_m(s) F(t-s)\ dx. \qquad \square$$

Pour un fonction $u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)$ vérifiant la condition R_n, on peut définir une mesure de Radon qui est une généralisation de l'intégrale de Stieltjes [Wil].

Proposition 3.3.3. *Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $F \in \mathcal{C}(\Omega)$ satisfaisant la condition R_n,*
Alors une mesure de Radon est associée à F telle que pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ (fonctions indéfiniment dérivables à support compact) on ait

$$\langle F, u\rangle = \int_{\mathbb{R}^n_+} u\, dF = (-1)^n \int_{\mathbb{R}^n_+} F\ \partial_1 \cdots \partial_n u\ dx.$$

De plus, pour

$$(a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_n^0, b_n^0) \subset \Omega,$$

on a

$$\int_\Omega \chi_{(a_1^0,a_1^1)\times\cdots\times(a_n^0,b_n^0)}\, dF = \sum_{i\in\{0,1\}^n} (-1)^{n-|i|} F(a_1^{i_1}, \ldots, a_n^{i_n}).$$

Démonstration. Pour tout $u \in \mathcal{D}(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned}\langle F, u\rangle = \int_\Omega u\, dF &= (-1)^n \int_{\Omega_m} F\ \partial_1 \cdots \partial_n u\ dx \\ &= (-1)^n \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} (\rho_m * F)\, \partial_1 \cdots \partial_n u\ dx \\ &= \lim_{m\to\infty} \int_{\Omega_m} u\, \partial_1 \cdots \partial_n (\rho_m * F)\ dx \geq 0,\end{aligned}$$

l'inégalité découlant de la proposition 3.3.2. La linéarité est évidente. Pour $u \in \mathcal{D}(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq K$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\Omega)$ telle que $\psi = 1$ sur K et $0 \leq \psi \leq 1$ sur Ω. On a alors

$$\langle F, u\rangle \leq \langle F, \|u\|_\infty \psi\rangle = \langle F, \psi\rangle \|u\|_\infty.$$

Par densité des fonctions lisses à support compact dans K dans les fonctions continues à support compact dans K, F peut donc être étendue à $\mathcal{K}(\Omega)$ (fonctions continues à support compact dans Ω) et est une mesure de Radon (voir [Wil95, pp. 10–11]).

La dernière égalité se prouve en prenant une suite de fonctions $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}((a_1^0, a_1^1) \times \cdots \times (a_n^0, b_n^0))$ croissant vers $\chi_{(a_1^0,a_1^1)\times\cdots\times(a_n^0,b_n^0)}$. □

3.3.1 Condition nécessaire

Dans le cas $n = 1$, le principe de Cavalieri nous donne l'inégalité (3.4) avec l'égalité pour F borélienne. Il n'y a donc pas d'autre conditions sur F dans ce cas-là. Nous généralisons pour $n \geq 2$ la condition nécessaire de G. Lorentz, qui était énoncée pour le réarrangement décroissante de $(0, 1)$ dans $(0, 1)$ [Lor53].

Proposition 3.3.4. *Soient S un réarrangement de (Ω, μ) dans (Ω^*, ν) et $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.*
Supposons qu'il existe $A, B \in \operatorname{dom} S$ tels que $S(A) = S(B)$, $A \cap B = \emptyset$, $A \cup B \in \operatorname{dom} S$ et $0 < \mu(A) < +\infty$ et que pour tout $u \in \operatorname{dom} S$ on ait

$$\int_\Omega F(u)\, d\mu \leq \int_{\Omega^*} F(Su)\, d\nu. \tag{3.5}$$

Alors, F vérifie la condition R_2.

Démonstration. Soient $1 \leq i < j \leq n$, $x, d_i, d_j \in \mathbb{R}_+$. Si on pose

$$u = x\chi_{A\cup B} + d_i e_i \chi_B + d_j e_j \chi_A,$$

on a

$$Su = x\chi_{S(A\cup B)} + (d_i e_i + d_j e_j)\chi_{S(A)}$$

Si l'inégalité (3.5) a lieu, on obtient

$$\begin{aligned}\mu(A)F(x + d_j e_j) &+ \mu(B)F(x + d_i e_i) \\ &\leq \nu(S(A))F(x + d_i e_i + d_j e_j) + \nu(S(A \cup B) \setminus S(A))F(x)\end{aligned}$$

L'inégalité R_2 suit de ce que

$$\mu(A) = \mu(B) = \nu(S(A)) = \nu(S(A \cup B) \setminus S(A)). \qquad \square$$

La condition R_2 est nécessaire en général : les hypothèses sont satisfaite pour tous les réarrangements que nous avons considéré, sauf S_ϕ (exemple 2.1.5), pour lequel la conclusion est fausse puisqu'il conserve toutes les intégrales, et le réarrangement croissant $S_{\infty,N}$, pour lequel une condition semblable existe vraisemblablement.

3.3.2 Condition suffisante

La condition nécessaire obtenue ci-dessus est suffisante dans le cas du réarrangement décroissant de $(0, 1)$ dans $(0, 1)$ [Lor53], dans le cas de réarrangements approximables par polarisation [Bro00b] et dans le cas où $n = 2$ [CZR86]. Nous généralisons ici cette dernière méthode au cas $n \geq 2$. Les conditions nécessaire et suffisante cessent cependant d'être équivalentes pour $n \geq 3$. Nous appelons $(\operatorname{dom} S)^n_+$ l'ensemble des n–uples de fonctions positives de $\operatorname{dom} S$.

Proposition 3.3.5. *Soit S un réarrangement avec* $\operatorname{dom} S$ *stable par intersections finies, $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^n_+)$ satisfaisant la condition R_n et telle que pour tout $x \in \partial\mathbb{R}^n_+$, $F(x) = 0$.*
Alors, pour tout $u \in (\operatorname{dom} S)^n_+$ telle que $F(u) \in L^1(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega F(u)\, d\mu \le \int_{\Omega^*} F(Su)\, d\nu,$$

les intégrales pouvant être infinies.

Démonstration. Puisque F vérifie la condition R_n, elle définit une mesure F (proposition 3.3.3, p. 45) telle que pour tout $t \in \mathbb{R}^n_+$ on ait

$$F(t) = \int_{[0,t]} dF = \int_{\mathbb{R}^n_+} h(t-s)\, dF(s).$$

avec

$$h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : r \mapsto h(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \ge 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc, par Fubini,

$$\begin{aligned} \int_\Omega F(u)\, d\mu &= \int_\Omega \int_{\mathbb{R}^n_+} h(u-s)\, dF(s)\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n_+} \int_\Omega h(u-s)\, d\mu\, dF(s) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n_+} \mu(\{u \ge s\})\, dF(s). \end{aligned}$$

De même,

$$\int_{\Omega^*} F(u)\, d\nu = \int_{\mathbb{R}^n_+} \nu(\{u \ge s\})\, dF(s).$$

Il est reste à noter que la monotonie et la continuité donnent, pour tout $s \in \mathbb{R}^n_+$,

$$\begin{aligned} S(\{u \ge s\}) &= S\Big(\bigcap_{i=1}^n \{u_i \ge s_i\}\Big) \\ &\subseteq \bigcap_{i=1}^n S(\{u_i \ge s_i\}) = \bigcap_{i=1}^n \{Su_i \ge s_i\} = \{Su \ge s\}. \end{aligned}$$

Par conservation de la mesure, on a

$$\mu(\{u \ge s\}) = \mu(S(\{u \ge s\})) \le \nu(\{Su \ge s\}),$$

ce qui amène l'inégalité désirée. □

La proposition s'étend au cas où F n'est pas nulle sur $\mathbb{R}_+^n$, mais sur chaque $(n-1)$–face elle satisfait à la condition R_{n-1} et si elle est nulle sur ses $(n-2)$–faces. (Nous appelons k–face de $\mathbb{R}_+^n$ l'ensemble des points de $\mathbb{R}_+^n$ ayant au moins $n-k$ composantes nulles.) La fonction F se décompose alors en

$$F(t) = F_0(t) + \sum_{i=1}^{n} F_i(t)$$

avec

$$F_i(t) = F(t_1, \ldots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \ldots, t_n).$$

Nous avons donc l'extension suivante.

Proposition 3.3.6. *Si $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^n)$ vérifie la condition R_n sur $\mathbb{R}_+^n$, la condition R_{n-1} sur ses $(n-1)$–faces et si elle est nulle sur ses $(n-2)$–faces, alors pour tout $u \in (\operatorname{dom} S)_+^n$ telle que*

$$F(0, u^2, \ldots, u^n), F(u^1, 0, u^3, \ldots, u^n), \ldots, F(u^1, \ldots, u^{n-1}, 0)$$

sont intégrables, on a

$$\int_\Omega F(u)\, d\mu \le \int_{\Omega^*} F(Su)\, d\nu.$$

En particulier, pour tout $u \in (\operatorname{dom} S)_+^n$, on a

$$\int_\Omega u^1 u^2 \ldots u^n\, d\nu \le \int_{\Omega^*} Su^1 Su^2 \ldots Su^n\, d\mu.$$

Cette inégalité est aussi un cas particulier de l'inégalité de Riesz–Sobolev généralisée [BLL74].

Les propositions 3.3.4 (p. 46) et 3.3.6 donnent pour $n = 2$ une condition nécessaire et suffisante.

Proposition 3.3.7. *Soit $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+^2)$. La fonction F vérifie R_2 sur $\mathbb{R}_+^2$ et si et seulement si pour tout $u, v \in \operatorname{dom} S$ avec $F(u,0)$, $F(0,v)$ et $F(u,v)$ intégrables on a*

$$\int_\Omega F(u,v)\, d\mu \le \int_{\Omega^*} F(u^*, v^*)\, d\nu.$$

Les inégalités obtenues ci-dessus ne sont valables que pour des fonctions positives telles que $F(u,0)$ et $F(0,v)$ soient intégrables. Ce n'est manifestement pas le cas pour $F(s,t) = -|s-t|^p$ et le réarrangement croissant. Or, nous avons défini le réarrangement de manière à traiter le cas d'ensembles de niveau de mesure infinie et nous obtenu sous ces hypothèses le principe de Cavalieri. A partir des idées de G. Alberti [Alb00], nous démontrons l'inégalité de Hardy–Littlewood généralisée pour des fonctions ayant des sous-ensembles de niveau de mesure infinie pour $n = 2$ et un signe quelconque.

Proposition 3.3.8. *Soit S un réarrangement et $F \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2)$ vérifiant la condition R_2 et telle que pour tout $s \in \mathbb{R}$,*

$$F(s,s) = 0.$$

Alors, pour tout $u, v \in \operatorname{dom} S$, on a

$$\int_{\Omega^*} F(Su, Sv)\, d\nu \leq \int_\Omega F(u,v)\, d\mu,$$

les intégrales pouvant être infinies.

Démonstration. Puisque F est continue et $F(s,s) = 0$, on a, si $s \leq t$,

$$F(s,t) = -\int_{s\leq\sigma\leq\tau\leq t} dF$$

et, si $t \leq s$

$$F(s,t) = -\int_{t\leq\tau\leq\sigma\leq s} dF.$$

On peut alors écrire

$$F(u,v) = -\int_{\sigma\leq\tau} \chi_{\{v\geq\tau\}}(1-\chi_{\{u\geq\sigma\}})\, dF + \int_{\sigma\geq\tau} \chi_{\{u\geq\sigma\}}(1-\chi_{\{v\geq\tau\}}) dF,$$

ce qui donne après intégration

$$\int_\Omega F(u,v)\, d\mu = \int_{\sigma\leq\tau} \mu(\{v\geq\tau\}\setminus\{u\geq\sigma\})\, dF \\ + \int_{\sigma\geq\tau} \mu(\{u\geq\tau\}\setminus\{v\geq\sigma\})\, dF.$$

De même, on a

$$\int_{\Omega^*} F(Su,Sv)\, d\mu = \int_{\sigma\leq\tau} \mu(\{Sv\geq\tau\}\setminus\{Su\geq\sigma\})\, dF + \\ \int_{\sigma\geq\tau} \mu(\{Su\geq\tau\}\setminus\{Sv\geq\sigma\})\, dF.$$

L'inégalité $\nu(S(A)\setminus S(B)) \leq \mu(A\setminus B)$ (proposition 3.1.2, p. 39) permet alors de conclure. $\square$

Proposition 3.3.9 (Contractivité du réarrangement dans L^p)**.** *Soit S un réarrangement et $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe avec $J(0) = 0$. Alors pour tout $u, v \in (\operatorname{dom} S)_+$*

$$\int_{\Omega^*} J(Su - Sv)\, d\nu \leq \int_{\Omega} J(Su - Sv)\, d\mu$$

les intégrales pouvant être infinies. En particulier, si $1 \leq p \leq +\infty$ et si $u - v \in L^p$, on a

$$\|Su - Sv\|_p \leq \|u - v\|_p.$$

Démonstration. La fonction

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : (s, t) \mapsto J(s - t),$$

vérifie la condition R_2 (lemme 3.3.1, p. 43) et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $F(s, s) = J(s - s) = J(0) = 0$. L'inégalité est alors un cas particulier de l'inégalité de Hardy–Littlewood généralisée (proposition 3.3.8).

La contractivité en norme p découle de ce que $J : s \mapsto |s|^p$ vérifie les hypothèses de la première partie. La contractivité en norme uniforme était l'objet de la proposition 2.2.10 (p. 29). □

Remarque 3.3.1. La remarque 3.2.2 (p. 41) permettant d'introduire une dépendance en x reste d'application pour les inégalités de Hardy–Littlewood généralisées. En particulier, pour la symétrisation de Steiner $S_{k,N}$, soit $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^k : (s, t, x'') \to F(s, t, x'')$. Si $F(s, t, \cdot)$ est mesurable pour tout $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ et si $F(\cdot, \cdot, x'')$ est continue, vérifie la condition R^2 pour tout $x'' \in \mathbb{R}^k$ et si, pour tout $s \in \mathbb{R}$, $F(s, s, \cdot) = 0$, alors, pour tout $u, v \in \operatorname{dom} S_{k,N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u, v, x'')\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} F(S_{k,N} u, S_{k,N} v, x'')\, dx.$$

Chapitre 4

Fonctions continues et fonctions dérivables

L'étude des transformations de fonctions doit s'intéresser à la régularité du résultat d'une transformation de fonctions. Nous examinons tout d'abord la continuité, puis le module de continuité qui nous donnera comme cas particulier

$$\|\nabla Su\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty.$$

De là, nous sommes amenés à aux inégalités de Pólya-Szegö

$$\|\nabla Su\|_p \leq \|\nabla u\|_p,$$

que nous traitons de manière générale que pour les fonctions à variation bornée.

4.1 Fonctions continues

Nous cherchons sous quelles conditions $\bar{S}u$ est continue lorsque u est continue. Les transformations de fonctions induites se définissant à partir des ensembles de niveau, nous exprimons la continuité d'une fonction comme une propriété de ses ensembles de niveau.

Rappelons qu'une fonction $u : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si pour tout $x_n \to x$,

$$\limsup_{n\to\infty} u(x_n) \leq u(x)$$

et que u est semi-continue inférieurement si $-u$ est semi-continue supérieurement.

Lemme 4.1.1. *Soit X un espace topologique et $u : X \to \mathbb{R}$.*
La fonction $u : X \to \mathbb{R}$ est semi-continue supérieurement si et seulement si pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$a > b \Rightarrow \operatorname{adh}\{u \geq a\} \subseteq \{u > b\}. \tag{4.1}$$

Démonstration. Soient $u : X \to \mathbb{R}$ semi-continue supérieurement, $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a > b$. Par semi-continuité de u, $\{u \geq a\}$ est fermé et

$$\operatorname{adh}\{u \geq a\} = \{u \geq a\} \subseteq \{u > b\}.$$

Dans l'autre sens, supposons que u ne soit pas semi-continue supérieurement. Nous allons montrer qu'il existe a, b avec $a > b$ tels que l'inclusion (4.1) n'ait pas lieu. Puisque u n'est pas semi-continue supérieurement, il existe $x \in X$ et une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ tendant vers x telle que

$$\limsup_{n \to \infty} u(x_n) > u(x).$$

Si

$$a = \frac{1}{2}\Big(\limsup_{n \to \infty} u(x_n) + u(x)\Big)$$

et si $b = u(x) < a$, on peut supposer, en passant éventuellement à une sous-suite, que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u(x_n) \geq a.$$

On obtient alors $x \in \operatorname{adh}\{u \geq a\}$ et $x \notin \{u > b\}$ et l'inclusion (4.1) n'a pas lieu. □

Notre critère de continuité de $\bar{S}u$ utilisera les notions de transformation ouverte et fermée.

Définition 4.1.1. Soient Ω et Ω^* deux espaces topologiques.

Une transformation d'ensembles S de Ω dans Ω^* est *ouverte* si pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ ouvert, $S(A)$ est ouvert.

Une transformation d'ensembles S de Ω dans Ω^* est *fermée* si pour tout $A \in \operatorname{dom} S$ fermé, $S(A)$ est fermé.

Si ϕ est un homéomorphisme, la transformation d'ensembles S_ϕ (exemple 2.1.5, p. 17) est fermée et ouverte, de même que S_Σ (exemple 2.1.4, p. 17) tandis que S_μ (exemple 2.1.2, p. 16) est fermée et mais pas ouverte.

Remarque 4.1.1. Cette définition ne doit pas être confondue avec celle transformation de fonction induite ouverte ou fermée (définition 2.1.5, p. 16).

Une transformation d'ensembles S est ouverte si et seulement si sa complémentaire S_c est fermée. Nous énonçons maintenant un critère de semi-continuité de la transformation d'une fonction.

Proposition 4.1.2. *Soit S une transformation d'ensembles monotone.*

La transformation d'ensembles S est fermée si et seulement si pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$ semi-continue supérieurement, $\bar{S}u$ est semi-continue supérieurement.

La transformation d'ensembles S est ouverte si et seulement si pour tout $u \in \operatorname{dom} \breve{S}$ semi-continue inférieurement, $\breve{S}u$ est semi-continue inférieurement.

Démonstration. Nous utiliserons pour cela le lemme 4.1.1. Soient $a > b$ et $c = (a+b)/2$. Puisque S est monotone et $\{u \geq c\}$ est fermé par semi-continuité de u, on a

$$\operatorname{adh}\{\bar{S}u \geq a\} \subseteq \operatorname{adh} S\left(\{u \geq c\}\right) = S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\} \subseteq \{\bar{S}u > b\}.$$

La réciproque se prouve en notant que A est fermé si et seulement si χ_A est semi-continue supérieurement. Le deuxième énoncé découle du premier par dualité (proposition 2.2.4, p. 24). □

Corollaire 4.1.3. *Soit S une transformation d'ensembles monotone fermée et ouverte.*
Pour tout $u \in \operatorname{dom} S$ continue, Su est continue.

Ainsi, les réarrangements usuels conservent la continuité, même dans le cas de fonctions qui ne sont pas uniformément continues. C'est pour cette raison que nous avons défini les symétrisations dans le chapitre 1 de manière qu'ils soient ouverts et fermés.

4.2 Fonctions uniformément continues

Une manière de quantitifier la donnée qualtitative qu'est la continuité est le module de continuité.

Définition 4.2.1. Soit (X, d) un espace métrique et $u : X \to \mathbb{R}$ est uniformément continue. Le *module de continuité de u* est

$$\omega_u : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : \delta \mapsto \sup\left\{|u(x) - u(y)| \mid x, y \in X, d(x,y) \leq \delta\right\}.$$

Une transformation de fonction T *conserve le module de continuité* si, pour tout $u \in \operatorname{dom} T$,

$$\omega_{Tu} \leq \omega_u.$$

La propriété correspondant à la conservation du module de continuité des transformations de fonction pour les transformations d'ensembles est celle de transformation lisse (*smoothing transformation*), introduite par J. Sarvas [Sar72, paragraphe 2.1].

Notation 4.2.2. Soient (X, d) un espace métrique, $A \subset X$ et $r > 0$. Nous notons

$$A_r = \bigcup_{x \in A} B[x, r].$$

Soient $A \subseteq B \subseteq X$

$$\eth(A, B) = \sup \{r > 0 \mid A_r \subseteq B\}.$$

Notons que si $A \subseteq B \subseteq C \subseteq D$, alors

$$\eth(B, C) \leq \eth(A, D).$$

Définition 4.2.3. Le *domaine* de S est *lisse* si pour $A, B \in \operatorname{dom} S$, avec $A \subseteq B \neq \Omega$ et pour tout $r > 0$ tel que $A_r \cap \Omega \subseteq B$,

$$A_r \cap \Omega \in \operatorname{dom} S.$$

Une *transformation d'ensemble* S est *lisse* si son domaine est lisse et si pour tout $A, B \in \operatorname{dom} S$, $A \subseteq B \neq \Omega$, pour tout $r > 0$ tel que $A_r \subseteq B$ et $0 < \rho < r$, on a

$$S(A)_\rho \subseteq S(A_r).$$

Lemme 4.2.1. *Soit S une transformation d'ensembles monotone et lisse. Si $A, B \in \operatorname{dom} S$ alors*

$$\eth(S(A), S(B)) \geq \eth(A, B).$$

Démonstration. Soit $r < \eth(A, B)$. Alors $A_r \subseteq B$. Puisque S est monotone et lisse, pour tout $\rho < r$, $S(A)_\rho \subseteq S(A_r) \subseteq S(B)_r$, on a donc $\eth(S(A), S(B)) \geq \rho$. L'inégalité suit. □

Il est évident que le réarrangement de Schwarz dans $\mathbb{R}$ est lisse. C'est aussi le cas pour $\mathbb{R}^N$, mais la preuve directe n'est pas évidente. (Ce sera prouvé dans la proposition 5.3.1). Le caractère lisse d'une transformation de fonction et la préservation du module de continuité sont des propriétés équivalentes de la transformation d'ensembles et de ses transformations induites.

Proposition 4.2.2. *Soient S une transformation d'ensembles monotone à domaine lisse et Ω et Ω^* des espaces métriques.*
Alors S est lisse si et seulement si pour tout $u \in \operatorname{dom} \bar{S}$

$$\omega_{\bar{S}u} \leq \omega_u.$$

Démonstration. Soit $\epsilon > \omega_u(\delta)$. On a, pour $c > \inf u$

$$\delta \leq \eth(\{u \geq c+\epsilon\}, \{u \geq c\}).$$

Puisque S est lisse, on a, par le lemme 4.2.1

$$\eth\left(\{u \geq c+\epsilon\}, \{u \geq c\},\right) \leq \eth\left(S\left(\{u \geq c+\epsilon\}\right), S\left(\{u \geq c\}\right)\right).$$

et enfin

$$\eth\left(S\left(\{u \geq c+\epsilon\}\right), S\left(\{u \geq c\}\right)\right) \leq \eth\left(\{\bar{S}u > c+\epsilon\}, \{\bar{S}u \geq c\}\right),$$

ce qui implique, puisque δ est arbitraire,

$$\omega_{\bar{S}u}(\delta) \leq \epsilon.$$

Puisque $\epsilon > \omega_u(\delta)$ et δ sont arbitraires, on obtient

$$\omega_{\bar{S}u} \leq \omega_u.$$

Soient A et A_r. Le module de continuité de la fonction

$$u : \Omega \to \mathbb{R} : x \mapsto u(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in A, \\ -d(x, A) & \text{si } x \in A_r \setminus A, \\ -r & \text{sinon} \end{cases}$$

vérifie $\omega_u(\delta) \leq \delta$. On a donc

$$\omega_{\bar{S}u}(\delta) \leq \omega_u(\delta) \leq \delta,$$

d'où, pour $0 < \rho < r$,

$$\begin{aligned} S(A)_\rho = S(\{u \geq 0\})_\rho &\subseteq \{\bar{S}u \geq 0\}_\rho \subseteq \{\bar{S}u \geq -\rho\} \\ &\subseteq S(\{u \geq -\tfrac{r+\rho}{2}\}) \subseteq S(A_r). \end{aligned}$$ □

Ce résultat, utilisé dans le sens direct, permet de montrer sans trop de difficultés que la symétrisation de Schwarz dans $\mathbb{R}$ préserve le module de continuité. Par contre, pour le réarrangement décroissant S_d de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}_+$ (remarque 1.1.1, p. 7), on a

$$S_d(B(0,R))_r = (0, \pi R^2 + r)$$

et

$$S_d(B(0,R)_r) = (0, \pi(R+r)^2),$$

d'où, pour $r < 1/\pi - 2R$,

$$S_d(B(0,R))_r \not\subseteq S_d(B(0,R)_r),$$

de sorte que ce réarrangement n'est pas lisse. En effet, pour $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} : x \mapsto |x|_2$, $\bar{S}_d u$ n'est pas uniformément continue.

Cette proposition introduira en général des restrictions importantes dans $\operatorname{dom} S$, assimilables à des conditions de Dirichlet au bord. Par exemple, pour le réarrangement de Schwarz S_1 de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, il faut exclure tous les intervalles sous-ensembles stricts de $[-1,1]$ contenant -1 ou 1. En effet, pour r suffisament petit,

$$\begin{aligned} S_1([-1,c])_r = [-\tfrac{c+1}{2}, \tfrac{c+1}{2}]_r &= [-\tfrac{c+2r+1}{2}, \tfrac{c+2r+1}{2}] \\ &\not\subseteq S_1([-1,c+r]) = [-\tfrac{c+r+1}{2}, \tfrac{c+r+1}{2}]. \end{aligned}$$

De même, si $u(x) = x$, on a $\bar{S}_1 u(y) = 1 - 2|y|$ et $\omega_{\bar{S}_1 u} \not\leq \omega_u$.

Si $u \in W^{1,\infty}(\Omega)$, la conservation du module de continuité s'écrit d'une manière particulièrement simple.

Proposition 4.2.3. *Soit S une transformation d'ensembles monotone et lisse et $u \in W^{1,\infty}(\Omega) \cap \bar{S}$.*
Alors $\bar{S}u \in W^{1,\infty}(\Omega^*)$ et

$$\|\nabla \bar{S}u\|_\infty \leq \|\nabla u\|_\infty.$$

On peut aussi s'intéresser aux p–modules de continuité de fonctions dans $L^p(\mathbb{R}^N)$, définis par

$$\omega_u^p(\delta) = \sup_{h \in B(0,\delta)} \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+h) - u(x)|\; dx.$$

Le problème de la conservation du p–module de continuité est rendu difficile par le fait qu'il n'y a pas d'analogue de conditions de Dirichlet pour les fonctions de L^p (voir [Kol92]).

4.3 Inégalité de Pólya–Szegö

La symétrisation diminue les oscillations d'une fonction, elle doit donc naturellement diminuer l'intégrale du gradient. Nous appelons inégalités de Pólya–Szegö généralisées des inégalités de la forme

$$\int_{\Omega^*} F(Su, |\nabla Su|_2, y)d\nu \leq \int_\Omega F(u, |\nabla u|_2, x)d\mu,$$

avec les cas particuliers fondamentaux pour $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p < +\infty$

$$\|\nabla Su\|_p \leq \|\nabla u\|_p.$$

Le cas $p = +\infty$ a déjà été traité (proposition 4.2.3).

Les premières méthodes de démonstration de ces inégalités se basaient sur des inégalités isopérimétriques proprement dites que l'on trouve déjà chez G. Hardy, J. Littlewood et G. Pólya [HLP34] et qu'elles étendaient en inégalités fonctionnelles en passant par l'aire du sous-graphe de fonctions à support compact dans $\mathbb{R}^2$ [PS51]

$$\begin{aligned} P(\{(x,t) \mid 0 \leq t \leq \epsilon u(x)\}) &= |K| + \int_K \sqrt{1 + \epsilon^2 |\nabla u|_2^2} + o(\epsilon^3) \\ &= 2|K| + \frac{\epsilon^2}{2} \|\nabla u\|_2^2 + o(\epsilon^3). \end{aligned}$$

La théorie géométrique de la mesure a permis de démontrer des inégalités dans le cas où le gradient est constant sur chaque ligne de niveau $\partial\{u \geq c\}$, ce qui revient à se restreindre à quelque chose qui ressemble à une symétrisation de Schwarz [Tal76a, Ban80, Mos84, Alb00]. À côté de cela, le problème peut être résolu par approximation par des fonctions affines par morceaux [Kaw85, CK99] ou par approximation du réarrangement (chapitre 5).

Ces techniques ne sont adaptées qu'à des familles limitées de réarrangements, imposant soit une structure sur le domaine permettant d'approximer les fonctions soit une structure sur le réarrangement permettant de l'approximer facilement. Toutefois, dans le cas où $p = 1$ et des fonctions à variation bornée, on peut obtenir une condition à la fois simple et naturelle.

Nous rappelons ici quelques notions sur les fonctions à variation bornée [Giu84]. Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $u \in L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$, la variation de u est

$$\|Du\|_{BV} = \sup_{\substack{\phi \in \mathcal{K}(\Omega)^N \\ \|\phi\|_\infty \leq 1}} \int_\Omega u \operatorname{div} \phi \, dx.$$

L'ensemble des fonctions à variation bornée $BV(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $u \in L^1(\Omega)$ telles que $\|Du\|_{BV} < +\infty$. Un ensemble A de mesure finie est un ensemble de Caccioppoli si

$$P(A) = \|\chi_A\|_{BV} < +\infty$$

et $P(A)$ est alors le périmètre de A. Si Ω est un ouvert à frontière de classe $\mathcal{C}^1$, cette définition de périmètre coïncide avec la définition classique.

Proposition 4.3.1. *Soit S un réarrangement, $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ et $\Omega^* \subset \mathbb{R}^{N'}$. Sont équivalents*

- *pour tout $u \in BV(\Omega) \cap \operatorname{dom} S$, on a*

$$\|DSu\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV},$$

- *pour tout ensemble de Caccioppoli A de mesure finie, on a*

$$P(S(A)) \leq P(A).$$

Démonstration. Si $u \in (\operatorname{dom} S \cap BV(\Omega))$ est une fonction en escalier, par la formule de Fleming et Rishel [FR60], on a

$$\|u\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}} P(\{u \geq s\}) ds.$$

Si $(c_i)_{0 \leq i \leq n}$ désignent les niveau de u, on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{BV} &= \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) P(\{u \geq c_i\}) + P(\Omega) \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) P(S(\{u \geq c_i\})) + P(S(\Omega)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (c_i - c_{i-1}) P(\{\bar{S}u \geq c_i\}) + P(\Omega^*) \\
&= \|\bar{S}u\|_{BV}.
\end{aligned}$$

Puisque l'implication est vraie pour les fonctions en escalier, nous allons construire pour tout $u \in (BV(\Omega) \cap \operatorname{dom} S)$ une suite de fonctions en escalier à variation bornée convergeant vers u dans $BV(\Omega)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $0 \leq a < 1/n$, nous posons

$$u_{n,a}(x) = \begin{cases} \sup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \frac{k}{n} + a \mid u(x) \geq \frac{k}{n} + a \right\}, & \text{si } u(x) \geq a \\ \inf_{k \in \mathbb{N}_0} \left\{ \frac{-k}{n} + a \mid u(x) < \frac{-k}{n} + a \right\}, & \text{si } u(x) < a - 1/n \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

a étant un paramètre qui reste à définir. Ce sont des fonctions en escalier, dont les ensembles de niveau sont choisis parmi ceux de u et appartiennent donc à $\operatorname{dom} S$. De plus, pour tout $x \in \Omega$

$$|u_{n,a}(x)| \leq |u(x)|,$$

de sorte qu'elles sont intégrables et que pour toute suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(u_{n,a_n})_{n\in\mathbb{N}}$ converge en norme 1 vers u vers u. Puisque S est un réarrangement, il est contractant et $\bar{S}u_{n,a_n}$ converge donc vers $\bar{S}u$ en norme 1. Enfin, on a

$$\|u_{n,a}\|_{BV} \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} P(\{u \geq a + \tfrac{k}{n}\}),$$

l'inégalité provenant de ce que les marches proches de 0 ne sont pas prises avec toute leur hauteur. Par la formule de Fleming et Rishel, on a

$$\int_0^{1/n} \|Du_{n,a}\|_{BV} da \leq \frac{1}{n}\|Du\|_{BV}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, par une variante du théorème de la moyenne, il existe a_n tel que

$$\|Du_{n,a_n}\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}.$$

Si on prend $u_n = u_{n,a_n}$, on a

$$\|DSu_n\|_{BV} \leq \|Du_n\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}.$$

Puisqu'en outre Su_n converge vers Su, on a $Su \in BV(\Omega^*)$ et, par semi-confinuité inférieure de la variation [Giu84, théorème 7.17, p. 14],

$$\|DSu\|_{BV} \leq \liminf_{n\to\infty} \|DSu_n\|_{BV} \leq \liminf_{n\to\infty} \|Du_n\|_{BV} = \|Du\|_{BV}.$$

L'implication inverse est évidente. □

Comme pour le module de continuité, ces affirmations imposent en général une condition de Dirichlet sur les bords. Par exemple, pour le réarrangement de Schwarz S_1 de $[-1,1]$ dans $[-1,1]$, on doit exclure tous les intervalles sous-ensembles stricts de $[-1,1]$ contenant -1 ou 1. En effet, pour $0 \leq c < 1$, on a

$$P(S_1([-1,c])) = P([\tfrac{c-1}{2}, \tfrac{1-c}{2}]) = 2 \not\leq P([-1,c]) = 1$$

et pour $u : [-1,1] \to [-1,1] : x \mapsto x$,

$$\|S_1 u\|_{BV} = 4 > \|u\|_{BV} = 2.$$

Comme on le verra plus loin (proposition 5.3.4, p. 78), l'inégalité est vraie pour des fonctions de $W_0^{1,1}([-1,1])$.

Par ailleurs, l'inégalité sur les périmètres n'est pas suffisante pour avoir une inégalité de Pólya–Szegö. En effet, pour $k \in (0,1)$, posons

$$S_{1,k} : A \mapsto [\tfrac{k|A|-|A|}{2}, \tfrac{k|A|+|A|}{2}].$$

Alors, pour $u(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$, on a

$$\|\nabla u\|_p^p = 2$$

et

$$\|\nabla S_{1,k}u\|_p^p = (1-k)^p + (1+k)^p.$$

Ce réarrangement diminue les périmètres mais augmente certaines intégrales du gradient. L'explication réside en partie dans le fait que $S_{1,k}$ n'est pas lisse, mais nous ne savons pas si cette condition est suffisante.

Chapitre 5

Approximation des symétrisations

Les preuves des inégalités de réarrangement sont en général relativement simples pour des réarrangements de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et s'étendent souvent assez facilement à la symétrisation de Steiner, mais plus difficilement, quand c'est possible, à la symétrisation de Schwarz. Le fait qu'une fonction symétrique au sens de Schwarz soit symétrique au sens de Steiner par rapport à tous les plans passant par l'origine suggère d'approximer la symétrisation de Schwarz par une suite de symétrisations de Steiner $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et d'obtenir ainsi pour tout $u \in L^p_+(\mathbb{R}^N)$, une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^p_+(\mathbb{R}^N)$, avec $u_{n+1} = S_{n+1}u_n$, convergeant vers u^*. De telles suites ont effectivement été construites pour des fonctions caractéristiques d'ensembles [BLL74, LL01].

À partir d'une telle suite, nous pourrions étendre l'inégalité de Pólya–Szegö pour la symétrisation de Steiner, à la symétrisation de Schwarz. En effet, on établirait alors par récurrence

$$\|\nabla u_n\|_p \leq \|\nabla u\|_p.$$

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contiendrait une sous-suite convergeant faiblement vers u^* dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, de sorte que, par semi-continuité inférieure de la norme,

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \liminf_{n\to+\infty} \|\nabla u_n\|_p \leq \|\nabla u\|_p.$$

L'approximation de la symétrisation de Schwarz par des symétrisations de Steiner est donc un outil puissant pour la démonstration d'inégalités de réarrangement mais elle ne résout pas le problème de la preuve des inégalités pour la symétrisation de Steiner. (La preuve de l'inégalité de Pólya–Szegö par ensembles de niveau est plus compliquée pour la symétrisation de Steiner que pour la symétrisation de Schwarz.) C'est pourquoi nous approximerons les symétrisations avec un réarrangement encore plus simple, la polarisation, afin de démontrer des inégalités de Hardy–Littlewood et de Pólya–Szegö généralisées.

5.1 Polarisations

Réflexions et polarisations Étant donné que les polarisaton se définissent à partir des réflexions de l'espace $\mathbb{R}^N$, nous rassemblons quelques notations pour les réflexions.

Notation 5.1.1. Soit H un demi-espace fermé affine de $\mathbb{R}^N$. Nous notons σ_H la réflexion de l'espace $\mathbb{R}^N$ par rapport au plan ∂H, $x_H = \sigma_H(x)$ et D_H la dérivée de σ_H, donnée par

$$D_H y = y^H - 0^H.$$

Pour une fonction $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, nous notons

$$\sigma_H u : x \mapsto u(x_H).$$

Une polarisation est une transformation qui échange les valeurs de fonctions entre deux demi-espaces et qui rassemble les valeurs maximales dans l'un d'eux.

Définition 5.1.2. Soit H un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^N$ et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$. La *polarisation* associée à H est une transformation de fonction

$$P_H : u \mapsto P_H u = u^H$$

avec

$$u^H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R} : x \mapsto u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(x_H)\} & \text{si } x \in H, \\ \min\{u(x), u(x_H)\} & \text{si } x \notin H. \end{cases}$$

Notons que la polarisation conserve les valeurs de u sur ∂H :

$$u^H(x) = \max\{u(x), u(x_H)\} = u(x).$$

Polarisation d'ensemble Une polarisation P_H commute avec toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ croissantes. Par le théorème 2.4.1 (p. 35), elle est induite par une transformation d'ensemble, donnée explicitement par

$$\begin{aligned} P_H : \wp(X) \to \wp(X) : \\ A \mapsto P_H(A) = \big(H \cap (\sigma_H(A) \cup A)\big) \cup \big(A \cap \sigma_H(A)\big). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Cette transformation d'ensembles est continue, monotone et bien définie.

Fonctions continues La polarisation de toute fonction continue est elle-même continue.

Proposition 5.1.1. *Soit P_H une polarisation de $\mathbb{R}^N$. Si $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ est continue, alors u^H est continue.*

Démonstration. Notons que

$$\sigma_H(P_H(\sigma_H(u))) = P_{\sigma_H(H)}u = -P_H(-u) = (P_H)_c(u) \tag{5.2}$$

et donc

$$(P_H)_c(A) = (\sigma_H \circ P_H \circ \sigma_H)(A).$$

D'après (5.1), P_H est fermée. De plus, d'après (5.2) son complémentaire est aussi fermée (composée de transformation de transformations fermées). La transformation P_H étant monotone, on peut appliquer le critère de continuité de la proposition 4.1.3 (p. 53). □

Module de continuité La polarisation préserve aussi le module de continuité (définition 4.2.1, p. 53), ce qui nous permettra d'utiliser le théorème d'Arzelá–Ascoli pour des suites de polarisations.

Proposition 5.1.2. *Soit P_H une polarisation.*
Alors, pour tout $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ uniformément continue,

$$\omega_{u^H} \leq \omega_u.$$

La transformation P_H est lisse.

Démonstration. Fixons $\delta > 0$. Nous avons

$$\omega_u(\delta) = \sup_{d(x,y)<\delta} |u(x) - u(y)|.$$

Soient x, y in $\mathbb{R}^N$ tels que $d(x, y) < \delta$. Si $u^H(x) = u(x)$ et $u^H(y) = u(y)$ ou si $u^H(x) = u(x_H)$ et $u^H(y) = u(y_H)$, il est évident que

$$|u^H(x) - u^H(y)| \leq \omega_u(\delta).$$

Sinon, on peut supposer $u^H(x) = u(x)$ et $u^H(y) = u(y_H)$.
– Si $x \in H$ et $y \notin H$, on a $d(x, y_H) \leq d(x, y)$ et donc

$$|u^H(x) - u^H(y)| = |u(x) - u(y_H)| \leq \omega_u(\delta).$$

– Si $x \in H$ et $y \in H$, si $u^H(x) \geq u^H(y) \geq u(y)$, on a

$$\begin{aligned} |u^H(x) - u^H(y)| &= u^H(x) - u^H(y) \\ &\leq u(x) - u(y) = |u(x) - u(y)| \\ &\leq \omega_u(\delta). \end{aligned}$$

– Les autres cas se traitent de manière semblable.

Le domaine de P_H étant lisse, P_H est lisse par la condition nécessaire et suffisante de la proposition 4.2.2 (p. 54). □

Inégalités intégrales Puisqu'une polarisation consiste à échanger des valeurs de fonctions, nous pouvons prédire le comportement d'une classe importante de fonctionnelles intégrales. En particulier, la polarisation conserve les normes p $(1 \leq p < +\infty)$ et est non expansive dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Définition 5.1.3. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et $f : \mathbb{R}^l \times \Omega \to \bar{R}$. La fonction f vérifie la condition de Carathéodory si

1. $f(\cdot, x)$ est continue pour tout $x \in \Omega$,
2. $f(s, \cdot)$ est mesurable pour tout $s \in \mathbb{R}^l$.

Proposition 5.1.3. *Soit H un demi-espace fermé de $\mathbb{R}^N$.*

1. *Soient $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory mesurable telle que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$*

$$f(\cdot, x) = f(\cdot, x^H)$$

et $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurable. Alors,

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x, u)\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(x, u^H)\, dx,$$

si l'une des intégrales existe.

2. *Soit $F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ une fonction de Carathéodory qui vérifie la condition R_2 pour ses n premières variables et telle que pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$,*

$$F(\cdot, x) = F(\cdot, x_H),$$

alors pour toutes les fonctions $(u^i)_{1 \leq i \leq n}$ mesurables, si $F(u)$ est intégrable, on a

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u^1, \ldots, u^n, x)\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} F((u^1)^H, \ldots, (u^n)^H, x)\, dx,$$

si l'une des intégrales existe.

3. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ continue et $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante. Si F vérifie la condition R_2, alors, pour tout $u, v : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ mesurables*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(u(x), v(y)) w(d(x,y))\, dx\, dy \\ \leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} F(u^H(x), v^H(y)) w(d(x,y))\, dx\, dy,$$

si l'une des intégrales existe.

Démonstration. Les deux premières parties sont évidentes. Pour la dernière, on a pour tout $x, y \in H$

$$F\big(u(x), v(y)\big) + F\big(u(x_H), v(y_H)\big) \leq F\left(u^H(x), v^H(y)\right) + F\left(u^H(x_H), v^H(y_H)\right).$$

et

$$d(x,y) = d(x_H, y_H) \leq d(x, y_H) = d(x_H, y)$$

d'où, puisque w est décroissante

$$w(d(x,y)) = w(d(x_H, y_H)) \geq w(d(x, y_H)) = w(d(x_H, y)).$$

Cela nous donne

$$\begin{aligned}
&F\big(u(x), v(y)\big) w\big(d(x,y)\big) + F\big(u(x_H), v(y)\big) w\big(d(x_H, y)\big) \\
&\quad + F\big(u(x), v(y_H)\big) w\big(d(x, y_H)\big) + F\big(u(x_H), v(y_H)\big) w\big(d(x_H, y_H)\big) \\
&= w(d(x_H, y))\big(F(u(x), v(y)) + F(u(x_H), v(y)) \\
&\quad + F(u(x), v(y_H)) + F(u(x_H), v(y_H))\big) \\
&\qquad + \big(w(d(x,y)) - w(d(x_H, y))\big)\big(F(u(x), v(y)) + F(u(x_H), v(y_H))\big) \\
&\leq w\big(d(x_H, y)\big)\big(F(u^H(x), v^H(y)) + F(u^H(x_H), v^H(y)) \\
&\quad + F(u^H(x), v^H(y_H)) + F(u^H(x_H), v^H(y_H))\big) \\
&\qquad + \big(w(d(x,y)) - w(d(x_H, y))\big)\big(F(u^H(x), v^H(y)) + F(u^H(x_H), v^H(y_H))\big) \\
&= F\big(u^H(x), v^H(y)\big) w(d(x,y)) + F\big(u^H(x_H), v^H(y)\big) w(d(x_H, y)) \\
&\quad + F\big(u^H(x), v^H(y_H)\big) w(d(x, y_H)) + F\big(u^H(x_H), v^H(y_H)\big) w(d(x_H, y_H)).
\end{aligned}$$

L'inégalité intégrale s'obtient en intégrant sur $H \times H$. □

L'inégalité de Hardy–Littlewood généralisée obtenue est optimale puisque la condition est nécessaire (proposition 3.3.4, p. 46) et la restriction sur la dépendance en x est assez naturelle.

5.2 Approximation par polarisations

5.2.1 Symétrisations de Steiner et de Schwarz

Polarisation et symétrisation Toute symétrisation de Steiner (k, N) $S_* = *$ — nous noterons indifféremment $S_* u = u^*$ et $S_* A = A^*$ — est caractérisée par le sous-espace vectoriel $\Sigma_* = \{0\} \times \mathbb{R}^{N-k}$ de dimension $N-k$, intersection des plans de symétrie compatibles avec la symétrie Steiner. Nous noterons $\mathcal{H}_*$ l'ensemble des demi-espaces fermés H de $\mathbb{R}^N$ tels que $H \supset \Sigma_*$. Le lemme suivant résume les relations entre les polarisations de $\mathcal{H}_*$ et la symétrisation S_*.

Lemme 5.2.1. *Soit S_* une symétrisation de Steiner (k, N).*
Pour tout $H \in \mathcal{H}_*$, pour tout $A \in \operatorname{dom} S_*$ et pour tout $u \in \operatorname{dom} S_*$, on a

$$A^* = (A^*)^H = (A^H)^*$$

et

$$u^* = (u^*)^H = (u^H)^*.$$

Pour tout $A \in \operatorname{dom} S_*$ on a

$$A = A^* \iff \forall H \in \mathcal{H}_*,\ A = A^H.$$

et pour tout $u \in \operatorname{dom} S_*$ on a

$$u = u^* \iff \forall H \in \mathcal{H}_*,\ u = u^H.$$

Compacité des suites d'approximation Pour une fonction positive continue à support compact $u \in \mathcal{K}_+(\Omega)$ donnée, nous cherchons une suite de polarisations $(H_m)_{m\geq 1}$ telle que la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 = u, \\ u_{m+1} = (u_m)^{H_{m+1}}, \quad m \geq 0, \end{cases}$$

converge vers u^* en norme p pour $1 \leq p \leq \infty$. D'après les relations de compatibilité du lemme 5.2.1 et la contractivité de la proposition 5.1.3, pour tout $H \in \mathcal{H}_*$ et pour $1 \leq p \leq \infty$, on a

$$\|u^H - u^*\|_p = \|u^H - (u^*)^H\|_p \leq \|u - u^*\|_p. \tag{5.3}$$

Les itérées successives u_m ne s'éloignent donc pas de leur objectif u^*. De plus, le simple fait de choisir les polarisations dans $\mathcal{H}_*$ implique la convergence d'une sous-suite vers un certain $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$, qui n'est pas forcément u^*.

Lemme 5.2.2. *Soient S_* une symétrisation de Steiner (k, N) et $u \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$. Alors, pour toute suite de polarisation $(H_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}_*$, la suite $(u^m)_{m\geq 0}$*

$$\begin{cases} u_0 = u, \\ u_{m+1} = (u_m)^{H_{m+1}}, \quad m \geq 0, \end{cases}$$

possède une sous-suite convergente dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ pour tout $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. Puisque u est à support compact, il existe $R > 0$ tel que $\{u > c\} \subseteq B[0, R]$. Par monotonie et par récurrence, on a, pour $m \in \mathbb{N}$,

$$\{u_{m+1} > c\} \subseteq \{u_m > 0\} \subseteq B[0, R]$$

et, puisque u est positive, on a alors $\operatorname{supp} u_m \subset B[0, R]$. L'application récurrente de la proposition 5.1.2 donne

$$\omega_{u_m} \leq \omega_u,$$

tandis que

$$\|u_m\|_\infty = \|u\|_\infty.$$

Par le théorème d'Arzelá–Ascoli, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite convergente dans $\mathcal{BC}(B[0, R])$. On vérifie sans peine qu'elle converge aussi dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$ et dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. □

Choix des polarisations Pour converger vers u^*, nous devons choisir un peu mieux nos polarisation. Nous imposerons que, pour une sous-suite strictement croissante d'indices $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$, le plan de polarisation soit presque optimal : pour $0 < \kappa < 1$ fixé et pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\|{u_{m_k}}^{H_{m_k}} - u^*\|_1 - \|u_{m_k} - u^*\|_1 \leq \kappa \inf_{H\in\mathcal{H}_*} \left(\|{u_{m_k}}^H - u^*\|_1 - \|u_{m_k} - u^*\|_1\right). \tag{5.4}$$

Puisque pour tout $H \in \mathcal{H}_*$

$$\|{u_m}^H - u^*\|_1 - \|u_m - u^*\|_1 \leq 0,$$

la définition de H_{m_k} a toujours un sens. Par le lemme 5.2.2, on peut extraire de la suite $(u_{m_k})_{k\geq 0}$ une sous-suite $\left(u_{m'_k}\right)_{k\geq 0}$ convergeant vers v dans $L^1(\mathbb{R}^N)$. Si $v = u^*$, alors la suite $(u_m)_{m\geq 0}$ converge vers u^* en norme 1, puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $m'_k \geq k$ et donc

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u^*\|_1 \leq \lim_{k\to\infty} \|u_{m'_k} - u^*\|_1 = 0.$$

La suite converge vers u^* Supposons $v \neq u^*$. Pour $H \in \mathcal{H}_*$, on a, par contractivité des polarisations (proposition 5.1.3),

$$\begin{aligned}
&\|(u_{m'_k})^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1 \\
&\qquad \leq \|(u_{m'_k})^H - v^H\|_1 + \|v^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - v\|_1 + \|v - u^*\|_1 \\
&\qquad\qquad \leq 2\|u_{m'_k} - v\|_1 - \|v^H - u^*\|_1 - \|v - u^*\|_1
\end{aligned}$$

et donc, puisque $u_{m'_k}$ tend vers v,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{k\to\infty} \big(\|(u_{m'_k})^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1\big) \\
&\qquad \leq \limsup_{k\to\infty} \big(2\|u_{m'_k} - v\|_1 - \|v^H - u^*\|_1 - \|v - u^*\|_1\big) \\
&\qquad\qquad = \|v^H - u^*\|_1 - \|v - u^*\|_1. \quad (5.5)
\end{aligned}$$

Par ailleurs, la suite $\|u_{m'_k+1} - u^*\|_p$ étant décroissante (inégalité (5.3)) et bornée inférieurement par 0, on a

$$\lim_{k\to\infty} (\|u_{m'_k+1} - u^*\|_p - \|u_{m'_k} - u^*\|_p) = 0$$

et, par définition de la suite $u_{m'_k}$ (équation (5.4)),

$$\|u_{m'_k+1} - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1 \leq \kappa(\|(u_{m'_k})^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1),$$

d'où on tire

$$\liminf_{i\to\infty} \big(\|(u_{m'_k})^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1\big) \geq 0. \quad (5.6)$$

S'il existe $H \in \mathcal{H}_*$ tel que

$$\|v^H - u^*\|_1 - \|v - u^*\|_1 < 0, \quad (5.7)$$

alors les équations (5.5) et (5.6) amènent une contradiction.

Nous allons montrer que si $v \neq u^*$, un tel H existe. Pour cela notons que v et u ont même réarrangement. En effet, puisque S_* est un réarrangement, il est contractant (proposition 3.3.9, p. 50) et donc

$$\|u^* - v^*\|_p \leq \liminf_{k\to\infty} \big(\|u^* - (u_{m'_k})^*\|_p + \|(u_{m'_k})^* - v^*\|_p\big) \leq \lim_{k\to\infty} \|u_{m'_k} - v\|_p = 0,$$

d'où

$$v^* = u^*.$$

Lemme 5.2.3. *Soit S_* une symétrisation Steiner (k, N) et $v \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$.*
Si $v \neq v^*$,
Alors il existe $H \in \mathcal{H}_*$ tel que

$$\|v^H - v^*\|_p < \|v - v^*\|_p.$$

Démonstration. Puisque $v \neq v^*$, il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que l'ouvert

$$\{u > c\} \Delta \{u^* > c\}$$

ne soit pas vide. Il existe donc $x' \in \mathbb{R}^{N-k}$ tel que

$$(\{u > c\} \Delta \{u^* > c\}) \cap \left(\{x'\} \times \mathbb{R}^k\right)$$

soit ouvert non vide dans $\{x'\} \times \mathbb{R}^k$. Puisqu'il est ouvert, sa mesure $\mathcal{L}^{N-k}$ est strictement positive. Par conséquent

$$(\{u > c\} \setminus \{u^* > c\}) \cap (x', \mathbb{R}^k)$$

et

$$(\{u^* > c\} \setminus \{u > c\}) \cap (x', \mathbb{R}^k)$$

qui ont même mesure, sont de mesure strictement positive. Il existe alors

$$x_1 = (x', x_1'') \in \{u > c\} \setminus \{u^* > c\}$$

et

$$x_2 = (x', x_2'') \in \{u^* > c\} \setminus \{u > c\}.$$

On peut construire H tel que $x_1 = \sigma_H(x_2)$ et $x_2 \in H$. Vu que $u^*(x_2) > u^*(x_1)$, on a $H \in \mathcal{H}_*$. De plus, pour tout x dans un voisinage N de x_2, on a

$$u^H(x) = u(x_H) > c \geq u^*(x_H)$$

et

$$u^*(x) > c \geq u(x) = u^H(x_H),$$

d'où, pour tout $x \in N$,

$$\begin{aligned}
|u(x) - u^*(x)| &+ |u(x_H) - u^*(x_H)| \\
&= |u^H(x) - u^*(x)| + \max\left\{u^H(x), u^*(x)\right\} \\
&\quad - \min\left\{u^H(x_H), u^*(x_H)\right\} + |u^H(x_H) - u^*(x_H)| \\
&> |u^H(x) - u^*(x)| + |u^H(x_H) - u^*(x_H)|,
\end{aligned}$$

ce qui, intégré sur N, donne

$$\int_N |u-u^*|+|\sigma_H u-\sigma_H u^*|\,dx > \int_N |u^H-u^*|+|\sigma_H u-\sigma_H u^H|\,dx.$$

Par ailleurs, puisque $|\cdot|$ est convexe, par la proposition 5.1.3, on a

$$\int_{H\setminus N} |u-u^*|+|\sigma_H u-\sigma_H u^*|\,dx \geq \int_{H\setminus N} |u^H-u^*|+|\sigma_H u-\sigma_H u^H|\;dx.$$

L'addition des deux intégrales permet de conclure. □

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ converge donc vers u^* en norme 1, mais aussi en norme p, $1\leq p\leq+\infty$. En effet, par le lemme 5.2.2, la suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ possède une sous-suite $(u_{m_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge vers $v=u^*$ pour tout $1\leq p\leq+\infty$. Par contractivité des polarisations (proposition 5.1.3), on a

$$\lim_{k\to\infty}\|u_k-u^*\|_p \leq \lim_{k\to\infty}\|u_{m_k}-u^*\|_p=0.$$

Pour symétriser simultanément une famille dénombrable de fonctions $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}$, on impose pour chacune la condition

$$\|(u^n_{m^n_k+1})^{H_{m^n_k}}-u^*\|_1-\|u^n_{m^n_k}-u^*\|_1 \leq \kappa \inf_{H\in\mathcal{H}_*}(\|(u^n_{m^n_k})^H-u^*\|_1-\|u^n_{m^n_k}-u^*\|_1)$$

pour une sous-suite croissante d'indices $(m^n_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Nous énonçons le résultat auquel nous sommes arrivés.

Proposition 5.2.4. *Soient S_* une symétrisation Steiner (k,N) et une famille dénombrable de fonctions $(u^n)_{n\in\mathbb{N}}\in\mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$.*
Alors, il existe une suite de polarisations $(H_m)_{m\geq 0}\subset\mathcal{H}_*$ telle que si on pose pour toute fonction $v:\mathbb{R}^N\to\mathbb{R}$

$$\begin{cases} T_0 v = v,\\ T_{m+1}v = P_{H_m}T_m v, \quad m\geq 0,\end{cases}$$

on a, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et pour tout $1\leq p\leq+\infty$,

$$\lim_{m\to\infty}\|T_m u^n - S_* u^n\|_p = 0.$$

Par séparabilité de $\mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$ et sa densité dans $L^p_+(\mathbb{R}^N)$ pour $1\leq p<+\infty$ et dans $C_{0,+}(\mathbb{R}^N)$, nous pouvons étendre ce résultat à ces espaces tout entiers.

Proposition 5.2.5. *Soit S_* une symétrisation de Steiner (k, N).*
Alors, il existe une suite de polarisations $H_m \subset \mathcal{H}_*$ telle que pour tout $1 \leq p < +\infty$, pour tout $u \in L^p_+(\mathbb{R}^N)$ on ait

$$\lim_{m \to +\infty} \|T_m u - S_* u\|_p = 0$$

et, pour tout $u \in C_{0,+}(\mathbb{R}^N)$, on ait

$$\lim_{m \to +\infty} \|T_m u - S_* u\|_\infty = 0.$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{K}_+(\Omega)$ est séparable, il possède partie dense dénombrable de $\mathcal{K}_+(\Omega)$ que nous noterons $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit $(H_m)_{m \in \mathbb{N}}$ la suite donnée par la proposition précédente pour $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soient $1 \leq p \leq +\infty$, $v \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$ et $\epsilon > 0$ quelconques. Par densité de $(u^n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $\mathcal{K}_+(\Omega)$, il existe u^n tel que

$$\|u^n - v\|_p \leq \epsilon/3.$$

Par la proposition précédente, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que, pour $m \geq k$,

$$\|T_m u^n - S_* u^n\|_\infty \leq \epsilon/3.$$

et donc

$$\begin{aligned} \|T_m v - S_* v\|_p &\leq \|T_m v - T_m u^n\|_p + \|T_m u^n - S_* u^n\|_p + \|S_* u^n - S_* v\|_\infty \\ &\leq 2\|v - u^n\|_p + \|T_m u^n - S_* u^n\|_p \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Puisque ϵ est arbitraire, la suite $T_m v$ converge vers $S_* v$ en norme p.

La densité de $\mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$ dans $L^p_+(\mathbb{R}^N)$ et dans $C_{0,+}(\mathbb{R}^N)$ permet de répéter les mêmes arguments de densité pour conclure. □

A. Baernstein utilise le même style d'arguments pour prouver des inégalités par polarisations sans construire de suite d'approximations [Bae95]. F. Brock et Y. Solynin prouvent que pour tout p et pour tout $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ il existe une suite de polarisations approximant la symétrisation, à condition de choisir chaque polarisation de manière optimale et admettent implicitement que l'argument reste vrai pour un nombre fini de fonctions [BS99]. Nous avons repris leur preuve, en choisissant les polarisations presque optimales (équation 5.4), ce qui nous évite de montrer l'existence d'un optimum et nous permet de montrer l'existence d'une suite universelle d'approximations.

Si elle semble miraculeuse au premier abord, l'existence d'une suite universelle approchant la symétrisation de Steiner prolonge le résultat de J. Sarvas qui a démontré que pour toute symétrisation de Steiner $S_{k,N}$, si S^1 et S^2 sont deux symétrisations S^1 et S^2 de Steiner dont l'intersection est $\Sigma_{k,N}$ et telles que l'angle séparant les plans n'est pas commensurable avec π, alors, pour tout ensemble A, on a,

$$S(A) = \lim_{m \to +\infty} (S^1 \circ S^2)^m(A)$$

la limite se faisant par rapport à la distance de Hausdorff [Sar72, lemme 3.34, p. 24].

Cette démarche d'approximation peut être étendue à d'autres symétrisations. Les étapes fondamentales de la démonstration consistent en effet à définir un ensemble de polarisations $\mathcal{H}_*$ qui soient compatibles avec la symétrisation approchée (lemme 5.2.1), suffisamment restreint pour que la suite d'approximations soit précompacte (lemme 5.2.2) et suffisamment large pour se rapprocher strictement de u^* (lemme 5.2.3). Dans la suite, nous esquissons leur généralisation à la symétrisation sphérique et au réarrangement croissant.

5.2.2 Symétrisations sphériques

Sans trop nous étendre, pour approximer la symétrisation sphérique $S_{s,N}$, nous prenons

$$\Sigma_{s,N} = \mathbb{R}^+ \times \{0\}\,.$$

Les polarisations compatibles avec $S_{s,N}$ sont

$$\mathcal{H}_{s,N} = \{H \mid \Sigma \subset H \text{ et } 0 \in \partial H\}\,.$$

L'ensemble $\mathcal{H}_{s,N}$ étant un sous-ensemble du $\mathcal{H}_{N,N}$ de la symétrisation de Schwarz, la compacité est évidente. La preuve de l'existence d'une polarisation vérifiant l'inégalité (5.7) est très proche de celle du lemme 5.2.3 (p. 69).

5.2.3 Réarrangement croissant

Le réarrangement croissant de $\Omega = \mathbb{R} \times \Omega''$ peut être vu comme une symétrisation de Steiner $(1, N)$ dont le plan a été envoyé à l'infini, avec $\Sigma = \{+\infty\} \times \Omega''$. Nous posons alors

$$\mathcal{H}_{\infty,N} = \{[c, \infty) \times \Omega'' \mid c \in \mathbb{R}\}\,,$$

en généralisant au passage la notion de demi-espace affine fermé, et

$$h(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x_1 \leq -1, \\ (x+1)/2 & \text{si } -1 < x_1 < +1, \\ 1 & \text{si } x_1 \geq 1. \end{cases} \tag{5.8}$$

Lemme 5.2.6. *Soit une suite de polarisation* $(H_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}_{\infty,N}$. *Alors, pour tout* $u \in (\mathcal{K}(\Omega) + h) \cap \operatorname{dom} S_{\infty,N}$, *la suite* $(u_m)_{m\geq 0}$ *définie par*

$$u_0 = u, \quad u_{i+1} = u_i^{H_{i+1}}.$$

est relativement compacte dans $\mathcal{BC}(\Omega)$ *et dans* $L^p(\Omega) + h$ *pour tout* $1 \leq p < +\infty$.

Démonstration. La fonction h est uniformément continue. Il en est donc de même pour tout $u \in (\mathcal{K}(\Omega) + h)$. L'application récurrente de la proposition 5.1.2 donne, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\omega_{u_m} \leq \omega_u.$$

Puisque $u \in (\mathcal{K}(\Omega) + h) \cap \operatorname{dom} S_{\infty,N}$

$$0 \leq u_m(x) \leq 1.$$

La suite $(u_m)_{m\in\mathbb{N}}$ est donc uniformément équicontinue et équibornée. Pour tout $R \geq 1$ suffisamment grand, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$1 \geq \inf_{x\in[R,+\infty)\times\Omega''} u_n(x) \geq \inf_{x\in[R,+\infty)\times\Omega''} u(x) = 1$$

et

$$0 \leq \sup_{x\in(-\infty,-R]\times\Omega''} u_n(x) \leq \sup_{x\in(-\infty,-R]\times\Omega''} u(x) = 0.$$

Par le théorème d'Arzelá–Ascoli, la suite est précompacte dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$. Elle possède donc une sous-suite convergente dans $\mathcal{BC}(\mathbb{R}^N)$, qui converge en norme p puisque les supports des $(u_m - h)$ sont contenus dans un même compact de Ω. □

La preuve de ((5.7)) est semblable à celle pour la symétrisation de Steiner (lemme 5.2.3). Nous pouvons donc construire une suite de polarisations qui approxime le réarrangement croissant pour tout $u \in (C_0(\Omega) + h) \cap \operatorname{dom} S_{\infty,N}$ et pour tout $u \in (h + L^p(\Omega)) \cap \operatorname{dom} S_{\infty,N}$, $1 \leq p < +\infty$,.

Remarque 5.2.1. En pratique, pour traiter des problèmes variationnels avec le réarrangement croissant, on désirera avoir $\|\nabla u\|_p$ fini pour certains $u \in (L^p(\Omega) + h) \cap W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Pour cela, il faut et il suffit que $\mathcal{L}^{N-1}(\Omega'') < +\infty$. En effet, si c'est le cas, on a

$$\|\nabla h\|_p = 2\mathcal{L}^{N-1}(\Omega'')^{\frac{1}{p}}$$

et donc, pour $u \in (W^{1,p}(\Omega) + h)$,

$$\|\nabla u\|_p \leq \|\nabla h\|_p + \|\nabla u - h\|_p < +\infty.$$

Inversement, s'il existe $u \in (L^p(\Omega) + h)$ tel que $\|\nabla u\|_p < +\infty$, alors

$$u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_- \times \Omega''),$$
$$1 - u \in W^{1,p}(\mathbb{R}_+ \times \Omega'').$$

Ces fonctions possèdent des traces v et $1 - v$ sur $\{0\} \times \Omega''$, toutes deux dans $L^p(\Omega'')$, d'où $1 \in L^p(\Omega'')$ et donc $\mathcal{L}^{N-1}(\Omega'') < +\infty$.

5.3 Propriétés des symétrisations

L'approximation des symétrisations par polarisations nous permet de démontrer plusieurs propriétés des symétrisations en suivant le schéma suivant : on définit une fonctionnelle invariante, on démontre qu'elle est suffisament continue et on passe à la limite pour la suite d'approximations. Nous prouverons des propriétés de continuité, des inégalités intégrales ainsi que les inégalités isopérimétrique et isodiamétrique.

Notation 5.3.1. Dans la suite, $* = S_*$ désignera un réarrangement approximable par polarisation : la symétrisation de Schwarz, une symétrisation de Steiner, la symétrisation sphérique ou le réarrangement croissant, définis sur l'ensemble $\Omega = \Omega^*$.

Si $\mathcal{X}$ est un espace fonctionnel, $\mathcal{X}_*$ désignera

$$\{u \in \mathcal{X} \mid u \geq 0\} \cap \operatorname{dom} S_*$$

si S_* est une symétrisation de Schwarz, de Steiner ou sphérique et

$$\{u \in \mathcal{X} + h \mid 0 \leq u \leq 1\} \cap \operatorname{dom} S_*$$

si S_* est le réarrangement croissant, avec h défini en (5.8, p. 72).

5.3.1 Module de continuité

Proposition 5.3.1. *Soit S_* un réarrangement approximable par polarisation. Alors, pour toute fonction $u \in \operatorname{dom} S_*$ uniformément continue, on a*

$$\omega_{u^*} \leq \omega_u.$$

La transformation S_* est lisse.

Démonstration. Cela découle de la convergence uniforme de la suite $(T_m u)_{m\in\mathbb{N}}$ (proposition 5.2.5) et de ce que, par la proposition 5.1.2,

$$\omega_{T_m u} \leq \omega_u.$$

La transformation est lisse par la proposition 4.2.2 (p. 54). □

L'inégalité de Brunn-Minkowski, qui, dans le langage des symétrisations, s'écrit

$$\mathcal{L}^N((A^*)_r) \leq \mathcal{L}^N(A_r),$$

est une conséquence directe de cette proposition. En particulier, pour tout r, la boule minimise à volume donné la quantité $\mathcal{L}^N(A_r)$. Cette inégalité avait entre autres déjà été démontrée par approximation par symétrisations de Steiner, en utilisant l'inégalité de Brunn-Minkowski pour la symétrisation de Steiner $(1, N)$ [Sar72].

5.3.2 Inégalités intégrales

Nous pouvons par les polarisations, démontrer une large classe d'inégalités intégrales.

Notation 5.3.2. Le groupe des isométries de Ω engendré par les réflexions associées aux polarisation de $\mathcal{H}_*$ est noté G^*.

Définition 5.3.3. La fonctionnelle ϕ définie sur un sous-ensemble des fonctions de Ω dans $\mathbb{R}$, est $*$-invariante si pour tout $g \in G^*$ et pour tout $u \in \operatorname{dom}\phi$, $u \circ g^{-1} \in \operatorname{dom}\phi$ et

$$\phi(u \circ g^{-1}) = \phi(u).$$

À la suite de F. Brock, qui a démontré la première partie [Bro00b], nous énonçons des inégalités de Hardy–Littlewood généralisée.

Proposition 5.3.2. *Soit S_* un réarrangement approximable par polarisations et $F : \mathbb{R}^n \times \Omega$ telle que*

1. *pour tout $x \in \Omega$, $F(\cdot, x)$ vérifie la condition R_2 (définition 3.3.2, p. 43),*
2. *$\int_\Omega F(x, u)\, dx$ est $*$-invariante.*

Alors, si F est continue, pour tout $u \in \mathcal{K}_*(\Omega)^n$,

$$\int_\Omega F(u^*, x)\, dx \leq \int_\Omega F(u, x)\ dx.$$

Si F est une fonction de Carathéodory (définition 5.1.3), s'il existe $C > 0$ et $p \geq 1$ tels que, pour tout $s \in \mathbb{R}^n$ et $x \in \Omega$,

$$F(s, x) \leq C \sum_{i=1}^{n} |s_i|^p,$$

si $\int_\Omega F(u, x)\, dx$ est $*$–invariante et si $F(\cdot, x)$ vérifie la condition R_2 pour presque tout $x \in \Omega$, alors, pour tout $u \in L^p_*(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega F(u^*, x)\, dx \leq \int_\Omega F(u, x)\ dx.$$

Démonstration. Dans le premier cas, puisque les fonctions u^i sont à support compact et que F est continue, la suite $F(T_m u)$ converge uniformément vers $F(u^*)$. De plus, puisque F est continue et $*$–invariante, on peut appliquer la proposition 5.1.3 (p. 64) et

$$\int_\Omega F(u^*)\, dx = \lim_{m\to\infty} \int_\Omega F(T_m u)\, dx \leq \int_\Omega F(u)\, dx.$$

Pour le second cas, posons

$$G(s_1, \ldots, s_n, x) = F(s_1, \ldots, s_n, x) - C \sum_{i=1}^{n} |s_i|^p \leq 0.$$

Par le principe de Cavalieri (proposition 3.2.1, p. 39), on a

$$\int_\Omega C \sum_{i=1}^{n} |{u_i}^*|^p\, dx = \int_\Omega C \sum_{i=1}^{n} |u_i|^p\, dx.$$

Il suffit donc de prouver l'inégalité pour une fonction de Carathédory $G \leq 0$ telle que $\int_\Omega G(u, x)\, dx$ soit $*$–invariante. Pour tout $1 \leq i \leq n$, la suite $(S_m u^i)_{m\in\mathbb{N}}$ converge vers $(S_m u^i)^*$ dans L^p et a donc une sous-suite convergeant presque partout vers $(u^i)^*$ [Sch93, corollaire 5.8.11, p. 260]. Par continuité de G, pour presque tout $x \in \Omega$, on a

$$\lim_{j\to\infty} G(T_{m_j} u, x) = G(u^*, x).$$

Par ailleurs, puisque G est $*$–invariante, par l'inégalité de Hardy–Littlewood généralisée pour les polarisations (proposition 5.1.3, p. 64), la suite

$$\int_\Omega G(T_{m_j} u, x)\, dx$$

croît et donc, par le lemme de Fatou [Sch93, corollaire 5.5.23, p. 166],

$$\int_\Omega G(u, x)\, dx \leq \liminf_{j\to\infty} \int_\Omega G(T_{m_j} u, x)\, dx \leq \int_\Omega G(u^*, x)\, dx. \qquad \square$$

Nous pouvons aussi obtenir des inégalités de Riesz–Sobolev où une fonction est déjà symétrique.

Proposition 5.3.3. *Soit $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ décroissante.*

Si F est continue et si $F(s,0) = F(0,t) = 0$, alors pour tout $u, v \in \mathcal{K}_*(\Omega)$ on a

$$\int_\Omega F(u(x), v(y)) w(|x-y|_2)\, dx \leq \int_\Omega F(u^*(x), v^*(y)) w(|x-y|_2)\, dx.$$

Si F est continue et si pour tout $s, t \in \mathbb{R}$ on a

$$F(s,t) \leq C|s|^p|t|^q,$$

alors, pour tout $u \in L^p_*(\Omega)$ et $v \in L^q_*(\Omega)$, on a

$$\int_\Omega F(u(x), v(y)) w(|x-y|_2)\, dx \leq \int_\Omega F(u^*(x), v^*(y)) w(|x-y|_2)\, dx.$$

Démonstration. Puisque $u, v \in \mathcal{K}_*(\Omega)$, on a

$$\operatorname{supp} u \times \operatorname{supp} v \subset B[0,R].$$

En outre, F est continue, $w(|\cdot - \cdot|_2)$ est bornée sur $B[0,R]$, et donc la suite

$$F(T_m u(\cdot), T_m v(\cdot)) w(|\cdot - \cdot|_2)$$

converge uniformément vers $(F(u^*) - F(v^*))w$ et est nulle en dehors de $B[0,R]$. Par la version de cette inégalité pour les polarisations (proposition 5.1.3, p. 64), on obtient l'inégalité en passant à la limite.

Pour $u, v \in \mathcal{K}_*(\Omega)$, on pose

$$G(s,t) = F(s,t) - C|s|^p|t|^q \leq 0.$$

La suite $G(T_m u, T_m v))w$ converge presque partout vers $(F(u^*) - F(v^*))w$. On utilise alors de nouveau la proposition 5.1.3 et on applique le lemme de Fatou. □

En particulier, pour $F(s,t) = st \leq s^2 + t^2$, $u = v = \chi_A$ et $w(r) = -r^k$, $k \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\int_{(A^*)^2} |x-y|_2^k \, dx\, dy \leq \int_{A^2} |x-y|_2^k \, dx\, dy.$$

La symétrisation diminue la distance moyenne entre deux points, propriété à rapprocher de l'inégalité isodiamétrique (théorème 5.3.12, p. 86).

Remarque 5.3.1. Dans le cas particulier où $F(s,t) = st$, cette inégalité est une inégalité de Riesz–Sobolev où la troisième fonction est déjà symétrisée. La preuve par polarisations ne peut être étendue aux inégalités de Riesz–Sobolev puisqu'elle est fausse pour les polarisations. Nous avons en effet le contre-exemple suivant : pour $\Omega = \mathbb{R}$ et $H = [0, +\infty)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[0,-1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[1,2]}(x-y)\,dx\,dy = \frac{1}{2}&\\ \not\leq \int_{\mathbb{R}^2} {\chi_{[0,-1]}}^H(x){\chi_{[0,1]}}^H(x-y){\chi_{[1,2]}}^H(y)\,dx\,dy&\\ = \int_{\mathbb{R}^2} \chi_{[0,1]}(x)\chi_{[0,1]}(y)\chi_{[1,2]}(x-y)\,dx\,dy = 0.&\end{aligned}$$

Fonctions faiblement dérivables Avant d'énoncer les propriétés du réarrangement de fonctions faiblement dérivables, nous examinons les propriétés des polarisations de fonctions faiblement dérivables.

Proposition 5.3.4. *Soit P_H une polarisation de Ω et $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. Alors*

$$u^H \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega).$$

En outre, si $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction de Carathéodory vérifiant pour tout $(s, f, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \Omega$

$$F(s, f, x) = F(s, D_H f, x_H), \tag{5.9}$$

Alors

$$\int_\Omega F(u, \nabla u, x)\,dx = \int_\Omega F(u^H, \nabla u^H, x)\,dx$$

si l'une des intégrales existe.

En particulier, si $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $1 \leq p \leq \infty$, alors $u^H \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$\|\nabla u^H\|_p = \|\nabla u\|_p. \tag{5.10}$$

Si V est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^N$ parallèle à ∂H ou contenant la direction orthogonale à ∂H, alors

$$\|\nabla_V u^H\|_p = \|\nabla_V u\|_p. \tag{5.11}$$

Démonstration. Soit $u \in W^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. La fonction u^H peut se réécrire

$$u^H = \begin{cases} \dfrac{u + \sigma_H u + |u - \sigma_H u|}{2} & \text{si } x \in H,\\ \dfrac{u + \sigma_H u - |u - \sigma_H u|}{2} & \text{si } x \notin H.\end{cases}$$

Chacun des deux morceaux est dans $W^{1,1}_{\text{loc}}(H)$ et $W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega \setminus H)$. En outre, sur tout compact de ∂H, les traces des deux morceaux existent et sont égales. Par conséquent,

$$u \in W^{1,1}_{\text{loc}}(\Omega).$$

Puisque u est mesurable, l'ensemble

$$A = \big\{x \in \Omega \mid u^H(x) \neq u(x)\big\}$$

est mesurable et vérifie $\sigma(A) = A$. Puisque

$$\begin{cases} \nabla u^H(x) = \nabla u(x) & \text{si } x \in \Omega \setminus A, \\ \nabla u^H(x) = D_H(\nabla u(x_H)) & \text{si } x \in A, \end{cases} \tag{5.12}$$

on a, par (5.12) et (5.9),

$$\begin{aligned} \int_A F(u^H(x), \nabla u^H(x), x)\, dx &= \int_A F(u(x^H), D_H \nabla u(x^H), x)\, dx \\ &= \int_{\sigma_H(A)} F(u(x), D_H \nabla u(x), x_H)\, dx \\ &= \int_A F(u(x), \nabla u(x), x)\, dx, \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(u^H, \nabla u^H, x)\, dx &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} F(u^H, \nabla u^H, x)\, dx + \int_A F(u^H, \nabla u^H, x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N \setminus A} F(u, \nabla u, x)\, dx + \int_A F(u, \nabla u, x)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} F(u, \nabla u, x)\, dx. \end{aligned}$$

Les égalités (5.10) et (5.11) se démontrent en notant que $F(s, y, x) = |y|_2^p$ et $F(s, y, x) = |P_V y|_2^p$ (P_V désignant la projection orthogonale sur V) vérifient (5.9). □

Nous montrons que nos suites d'approximations convergent dans les espaces de Sobolev et nous en déduisons des inégalités de Pólya–Szegö généralisées.

Proposition 5.3.5 (Convergence dans les espaces de Sobolev)**.** *Soit S_* un réarrangement approximable par polarisations, $1 \leq p < \infty$ et $u \in W^{1,p}_*(\mathbb{R}^N)$. Alors, si T_m désigne la suite d'approximations (proposition 5.2.5,*

$$u_n \rightharpoonup u^* \quad \textit{dans } W^{1,p}_*(\mathbb{R}^N) \textit{ faible}$$

et

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p$$

En outre, si $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \Omega$ satisfait les hypothèses suivantes

1. *F est une fonction de Carathéodory,*
2. *$\int_\Omega F(u, \nabla u, x)\, dx$ est $*$–invariante,*
3. *il existe $a \in L^{p'}(\Omega)^N$ et $b \in L^1(\Omega)$ tels que pour tout $(c, f, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \Omega$ on ait*
$$F(c, f, s) \geq (a(s)|f) + b(s),$$
où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^N$,
4. *pour tout $x \in \Omega$ et pour tout $s \in \mathbb{R}$, $F(s, \cdot, x)$ est convexe,*

Alors

$$\int_\Omega F(u^*, \nabla u^*, x)\, dx \leq \int_\Omega F(u, \nabla u, x)\, dx$$

si les intégrales existent.

De plus, si S_* n'est pas le réarrangement croissant et si $U \in \operatorname{dom} S_*$ est un ouvert borné régulier, pour tout $u \in W_0^{1,p}(U)$, on a $u^* \in W_0^{1,p}(U^*)$ et

$$\int_{U^*} F(u^*, \nabla u^*, x)\, dx \leq \int_U F(u, \nabla u, x)\, dx.$$

Démonstration. Soit $1 < p < +\infty$. La suite $u_m = T_m u$ d'approximations converge dans $L^p(\Omega)$. Par conséquent, pour toute fonction test $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$, on a

$$\begin{aligned}\langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u^* \operatorname{div} \phi\, dx = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_m \operatorname{div} \phi\, dx = -\lim_{m \to \infty} \int_{\mathbb{R}^N} (\nabla u_m, \phi)\, dx \\ \leq \liminf_{m \to \infty} \|\nabla u_m\|_p \|\phi\|_{p'} = \|\nabla u\|_p \|\phi\|_{p'},\end{aligned}$$

l'égalité des normes des gradients découlant de la proposition 5.3.4. Puisque f est une application linéaire de $L^p(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$ bornée, par le théorème de représentation de Riesz, il existe $v \in L^p(\mathbb{R}^N)^N$ tel que pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)^N$,

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v|\phi)\, dx = \langle f, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^N} u^* \operatorname{div} \phi\, dx.$$

La fonction u^* est donc faiblement dérivable avec $\nabla u^* = -v$.

Pour $p = 1$, le raisonnement est le même, si ce n'est qu'a priori la dérivée faible de u est une mesure (voir proposition 5.3.7, p. 83). Les fonctions $|\nabla u|_2$ et $|\nabla T_m u|_2$ ayant le même réarrangement, pour tout $\delta > 0$, on a

$$\sup \left\{ \int_E |\nabla T_m u|_2\ dx \mid \mathcal{L}^N(E) < \delta \right\} = \sup \left\{ \int_E |\nabla T u|_2\ dx \mid \mathcal{L}^N(E) < \delta \right\}.$$

La quantité de droite tendant vers 0 lorsque ϵ tend vers 0, le critère de Dunford et Pettis de compacité faible dans $L^1(\Omega)^N$ s'applique [Edw65, théorème 4.2.21, p. 275]. La suite convergeant vers u^* dans $L^1(\Omega)$ et possédant une sous-suite faiblement convergente vers $v \in W^{1,1}(\Omega) \subset L^1(\Omega)$, elle converge faiblement vers u^* dans $W^{1,1}(\Omega)$.

Les hypothèses sur la fonctionnelle assure la semi-continuité inférieure faible de la fonctionnelle considérée [Dac89, théorème 3.4, p. 74] et la possibilité d'appliquer la proposition 5.3.4, d'où on tire le résultat en passant à la limite.

Enfin, si $u \in W_0^{1,p}(U)$, cela signifie que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $\{u > 0\} \subseteq U$. Par ce qui précède $u^* \in W^{1,p}(\Omega)$ et par monotonie et continuité p.p. (théorème 2.3.5, p. 34),

$$\{u^* > 0\} = \{u > 0\}^* \subseteq U^*$$

et donc $u \in W_0^{1,p}(U)$. Le reste suit aisément. □

Les restrictions sur le sous-espace vectoriel V dans l'inégalité

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p$$

ne peuvent pas être levées. Soit $S_{k,N}$ la symétrisation de Steiner (k, N), $V = \mathbb{R}^{k'} \times \{0\}$ suos-espace vectoriel de dimension $k' = k - k'' < k$ et $u \in \mathcal{D}_+(\Omega)$ avec $\operatorname{supp} u \subseteq B(0, R) \subseteq \Omega$. Si on pose, pour $\lambda > 1$ et $(x', x'', y) \in \mathbb{R}^{k'} \times \mathbb{R}^{k''} \times \mathbb{R}^{N-k}$

$$u_\lambda(x', x'', y) = \lambda^{\frac{k'}{p} - 1} u(\lambda x', x'', y),$$

on a

$$\frac{\|\nabla_V u_\lambda\|_p}{\|\nabla_V S_{k,N} u_\lambda\|_p} = \lambda^{\frac{-k''}{k}} \frac{\|\nabla_V u\|_p}{\|\nabla_V S_{k,N} u\|_p}.$$

De même, si on pose pour $\mu > 1$,

$$u^\mu(x', x'', y) = \mu^{\frac{k''}{p}} u(x', \mu x'', y),$$

on a

$$\frac{\|\nabla_V u^\mu\|_p}{\|\nabla_V S_{k,N} u^\mu\|_p} = \mu^{\frac{k''}{k}} \frac{\|\nabla_V u\|_p}{\|\nabla_V S_{k,N} u\|_p}.$$

Le quotient

$$\frac{\|\nabla_V u\|_p}{\|\nabla_V S_{k,N} u\|_p}$$

peut donc prendre toutes les valeurs réelles strictement positives. Le raisonnement s'étend à la symétrisation sphérique.

La méthode des polarisations ne résout pas le problème des conditions nécessaires d'égalité dans l'inégalité de Pólya–Szegö. Si pour pour $1 < p < \infty$

$$\|\nabla u^*\|_p = \|\nabla u\|_p,$$

on a alors

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \liminf_{m\to\infty} \|\nabla T_m u\|_p = \|\nabla u\|_p,$$

de sorte que la suite $T_m u$ converge fortement dans $W^{1,p}(\Omega)$. Le problème des conditions d'égalité est donc équivalent à celui des conditions de convergence forte de la suite de polarisations dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Remarque 5.3.2. Puisqu'une symétrisation conserve la norme gradient, on peut se demander si elle est continue de $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ (elle l'est toujours en 0). Aucune n'est lipschitzienne dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, mais la symétrisation de Schwarz $S_{1,1}$ est continue dans $W^{1,p}(\mathbb{R})$, tandis que pour pour $N \geq 2$, les ensembles des points de continuité et des points de discontinuité de $S_{N,2}$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ sont tous les deux denses dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ [AL89b, AL89a].

5.3.3 Propriété isopérimétrique de la boule

Pour démontrer la propriété isopérimétrique de la boule, nous examinons les propriétés des symétrisations de fonctions à variation bornée.

Lemme 5.3.6. *Soient P_H une polarisation de $\mathbb{R}^N$ et $u \in BV(\mathbb{R}^N)$ (voir p. 57).*
Alors

$$\|Du^H\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}.$$

Démonstration. Pour toute fonction $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite de fonctions $(u)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$u_n \to u \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N),$$
$$\|Du_n\|_{BV} = \|\nabla u\|_1 \to \|Du\|_{BV}$$

(voir [Giu84, héorème 1.9, p. 17]). Par contractivité des polarisations (proposition 5.1.3, p. 64), on a aussi

$$(u_n)^H \to u^H \qquad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N).$$

Pour toute fonction test, $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})^N$ avec $\|\phi\|_\infty \leq 1$, on a, en utilisant les propriétés des dérivées faibles des polarisations (proposition 5.1.3, p. 64),

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} u^H \operatorname{div} \phi \, dx &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} {u_n}^H \operatorname{div} \phi \, dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|\nabla {u_n}^H\|_1 = \liminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_1 = \|Du\|_{BV}.\end{aligned}$$

En passant au supremum sur ϕ, on obtient

$$\|Du^H\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}. \qquad \square$$

Proposition 5.3.7. *Soit S_* un réarrangement approximable par polarisations. Pour tout $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, on a $u^* \in BV(\mathbb{R}^N)$ et*

$$\|Du^*\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}$$

Démonstration. Par convergence de la suite d'approximations, on a

$$T_m u \to u^* \quad \text{dans } L^1(\mathbb{R}^N),$$

avec, par le lemme 5.3.6,

$$\|DT_m u\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV},$$

d'où on tire $u^* \in BV(\Omega)$ et

$$\|Du^*\|_{BV} \leq \liminf_{m\to\infty} \|DT_m u\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}. \qquad \square$$

Nous pouvons énoncer la propriété isopérimétrique de la boule.

Corollaire 5.3.8 (Théorème isopérimétrique)**.** *Pour tout ensemble de Caccioppoli $A \subset \mathbb{R}^N$, on a*

$$P(A^*) \leq P(A).$$

Démonstration. Par définition du périmètre (p. 57) et la proposition 5.3.7, on a

$$P(A^*) = \|D\chi_A^*\|_{BV} \leq \|D\chi_A\|_{BV} = P(A). \qquad \square$$

La preuve que nous avons obtenue de l'inégalité isopérimétrique n'est pas plus compliquée que des preuves classiques [Tal93b] et a l'avantage de s'inscrire dans le cadre d'inégalités isopérimétriques générales.

5.3.4 Propriété isodiamétrique de la boule

La sœur jumelle de la propriété isopérimétrique de la boule est la propriété isodiamétrique : « à volume donné, la boule a le plus petit diamètre. » Comme la propriété isopérimétrique classique, elle peut être prouvée pour la symétrisation Steiner $(1, N)$ et être étendue ensuite à la symétrisation de Schwarz [Str99, pp. 74–79]. Comme l'inégalité isopérimétrique, l'inégalité isodiamétrique peut être démontrée par approximation par polarisations. Le diamètre d'un ensemble mesurable A est

$$\operatorname{diam} A = \sup_{(x,y)\in A^2} \operatorname{ess} d(x,y).$$

Ce diamètre est le supremum de la distance lorsque A est ouvert.

Nous commençons par dériver un résultat de semi-continuité pour une classe de fonctions définies sur les ensembles mesurables d'un espace mesuré (Ω,μ).

Définition 5.3.4. Une suite d'ensembles mesurables $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\Omega)$ tend vers $\Gamma \in \wp(\Omega)$ ($\Gamma_n \to \Gamma$) si $\mu(\Gamma_n \,\Delta\, \Gamma) \to 0$.

La convergence pour les ensembles mesurables définie ci-dessus est équivalente à la convergence dans $L^1(\Omega,\mu)$ de χ_{Γ_n} vers χ_Γ.

Notation 5.3.5. Pour $f : \Omega\times\Omega \in \mathbb{R}$ et $\Gamma \in \Sigma$, nous notons

$$\sigma_f(\Gamma) = \sup_{(x,y)\in \Gamma^2} \operatorname{ess} f(x,y).$$

Nous prouvons la semi-continuité inférieure des fonctions σ_f.

Lemme 5.3.9. *Si la suite d'ensembles mesurables* $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \wp(\Omega)$ *tend vers* Γ, *alors, pour tout* $f : \Omega\times\Omega \in \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_f(\Gamma_n) \geq \sigma_f(\Gamma).$$

Démonstration. Soit $\delta > 0$ et notons, pour tout ensemble $G \subset \Omega$,

$$G^\delta = \{(x,y) \in G^2 \mid f(x,y) > \sigma_f(G) - \delta\}.$$

Par définition de $\sigma_f(\Gamma)$, nous avons $\mu^2(\Gamma^\delta) > 0$. De plus, la convergence de Γ_n vers Γ implique celle de $\mu(\Gamma\cap\Gamma_n)$ vers $\mu(\Gamma)$. Pour $n \geq k$ suffisamment grand, on a alors

$$\mu^2((\Gamma\cap\Gamma_n)^2) + \mu^2(\Gamma^\delta) = (\mu(\Gamma\cap\Gamma_n))^2 + \mu^2(\Gamma^\delta) > (\mu(\Gamma))^2 = \mu^2(\Gamma^2)$$

et donc

$$\mu^2({\Gamma_n}^2 \cap \Gamma^\delta) > 0.$$

Puisque

$${\Gamma_n}^2 \cap \Gamma^\delta \subset {\Gamma_n}^\delta,$$

la mesure de ${\Gamma_n}^\delta$ est strictement positive, de sorte que

$$\sigma_f(\Gamma_n) > \sigma_f(\Gamma) - \delta$$

et donc, puisque $n \geq k$ est arbitraire

$$\liminf_{n\to\infty} \sigma_f(\Gamma_n) > \sigma_f(\Gamma) - \delta.$$

L'inégalité étant valable pour tout $\delta > 0$, on obtient l'inégalité désirée. □

Nous pouvons appliquer ce résultat à $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}^N)$ avec des suites de polarisations.

Proposition 5.3.10. *Soit $*$ une symétrisation approximable par polarisations et une fonction $f : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ telle que $\sigma_f(A^H) \leq \sigma_f(A)$ pour toute polarisation $H \in \mathcal{H}_*$.*
Alors

$$\sigma_f(A^*) \leq \sigma_f(A).$$

Démonstration. Soit T_m la suite des opérateurs d'approximation. Par récurrence, la suite des $\sigma_f(T_m(A))$ est décroissante, d'où

$$\sigma_f(A^*) \leq \lim_{m\to+\infty} \sigma_f(T_m(A)) \leq \sigma_f(A).$$ □

Si f est la fonction distance, nous avons

$$\sigma_d(A) = \operatorname{diam}(A).$$

Pour prouver l'inégalité isodiamétrique, il nous reste à montrer que les polarisations diminuent le diamètre.

Lemme 5.3.11. *Soit $A \subset \mathbb{R}^n$ et P_H une polarisation. Alors,*

$$\operatorname{diam}(A^H) \leq \operatorname{diam}(A).$$

Démonstration. Nous devons prouver que pour tout $x, y \in A^H$, il existe $\tilde{x}, \tilde{y} \in A$ tels que

$$d(x,y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Si $x, y \in A$ (resp. $x, y \in \sigma(A)$), alors il suffit de prendre $\tilde{x} = x$ et $\tilde{y} = y$ (resp. $\tilde{x} = x_H$ et $\tilde{y} = y_H$). Sinon, on peut supposer $x \in A$ et $y \in \sigma(A)$. Alors, $\tilde{x} = x$ et $\tilde{y} = \sigma(y)$ conviennent. Puisque

$$A^H = (A \cap \sigma_H(A)) \cup ((A \cup \sigma_H(A)) \cap H)$$

(équation 5.1, p. 62), les points x et y appartiennent tous les deux à $H \cap A^H$ et donc $\tilde{y} \in \mathbb{R}^N \backslash H$. Il existe donc un point $z \in \partial H$ tel que

$$d(\tilde{x}, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, z) + d(z, \tilde{y}).$$

Puisque $z = z_H$ et que $\sigma(\cdot)$ est une isométrie, nous avons d'une part

$$d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(z_H, y_H) = d(\tilde{x}, z) + d(z, \tilde{y}) = d(\tilde{x}, \tilde{y})$$

et d'autre part, par l'inégalité triangulaire,

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y).$$

Nous avons donc

$$d(x,y) \leq d(\tilde{x}, \tilde{y}),$$

d'où, en passant au supremum dans A^H et dans A,

$$\operatorname{diam}(A^H) \leq \operatorname{diam}(A). \qquad \square$$

Nous avons démontré la propriété isodiamétrique de la boule.

Théorème 5.3.12. *Soit A un ensemble mesurable de $\mathbb{R}^n$ et S_* un réarrangement approximable par polarisations. Alors*

$$\operatorname{diam}(A^*) \leq \operatorname{diam}(A).$$

5.4 Approximation par symétrisations de Steiner

Nous avons vu au début de ce chapitre que l'approximation de Steiner n'était pas le meilleur outil pour démontrer des inégalités de réarrangement. Toutefois, les approximations de symétrisations par symétrisations de Steiner ont été permettent de démontrer l'inégalité de Riesz–Sobolev [AL89b, AL89a], objectif que nous impossible à atteindre par polarisations (remarque 5.3.1, p. 78). Nous pouvons toutefois la démontrer par une adaptation de la preuve de l'approximation d'approximation par polarisations.

Puisque la symétrisation de Steiner conserve le module de continuité (proposition 5.3.1, p. 74) et qu'elle est compatible avec la symétrisation de Schwarz (cfr. lemme 5.2.1, p. 66), on peut établir l'analogue du lemme 5.2.2 (p. 67). Par ailleurs, si S_H est la symétrisation de Steiner par rapport au demi-plan passant par d'origine parallèle à ∂H, on a, par compatibilité entre P_H et S_H (lemme 5.2.1)

$$\|S_H u - u^*\|_p \leq \|P_H u - u^*\|_p.$$

L'existence de symétrisations permettant de se rapprocher strictement est alors une conséquence du lemme 5.2.3. L'équivalent de la proposition 5.2.5 (p. 71) se démontre alors sans problème.

La preuve de l'inégalité de Riesz–Sobolev découle alors de celle de l'inégalité de Ries–Sobolev pour la symétrisation de Steiner (voir [BLL74]) et de l'existence d'une suite de symétrisations de Steiner approximant la symétrisation de Schwarz. La preuve reste valable pour les symétrisations de Steiner (k, N).

Conclusion

Dans ce travail, nous avons étudié des méthodes de démonstration des inégalités de réarrangements, avec les approches complémentaires des ensembles de niveau et des approximations.

L'approche par ensembles de niveau devait au départ énumérer avec simplicité et rigueur un certain nombre d'équivalences entre propriétés de transformations d'ensembles et de fonctions. Or, « l'analyse par ensembles de niveau » s'est révélée beaucoup moins simple que nous le croyions : les développements du chapitre 2 nous ont appris à nous méfier de ce qui était trop évident, mais nous pensons y avoir rassemblé les principaux résultats utiles pour la théorie des réarrangements. Notre traitement des réarrangements du chapitre 3 nous a permis d'étendre la notion à des ensembles de mesure infinie en conservant les principes de Cavalieri et la contractivité du réarrangement. Le chapitre sur la régularité du réarrangement quant à lui rassemble le peu de chose qu'on peut dire sur le réarrangement de fonctions possédant une certaine régularité, l'inégalité de Pólya–Szegö restant difficile à relier aux propriétés des transformations d'ensembles.

Le développement des méthodes d'approximation fut surtout une simplification et une généralisation de ce qui existait déjà, avec quelques surprises : l'existence d'une suite universelle de polarisations approximant une symétrisation, la preuve de l'inégalité isodiamétrique, l'approximation du réarrangement croissant et la possibilité d'en déduire facilement l'existence d'une suite d'approximations par symétrisations de Steiner. Les deux méthodes d'approximations gagneraient à être présentées dans un cadre commun.

De l'étude des réarrangements, nous gardons l'impression que ce sont des transformations d'une grande richesse, comparable à certains égards à celle des transformations linéaires, ce qui est un avantage puisqu'ils s'adaptent à de nombreux problèmes, mais aussi un inconvénient, puisqu'un outil trop puissant est forcément limité. C'est aussi un domaine où les approches sont plurielles et où les liens que ces approches entretiennent sont encore en partie inexplorés.

Au terme de ce travail, nous voudrions formuler quelques questions sur les réarrangements.

- Est-il possible d'énoncer une condition nécessaire et suffisante pour les inégalité de Hardy–Littlewood généralisées pour plus de deux fonctions, quitte à introduire une hypothèse supplémentaire sur le réarrangement ?
- Y a-t-il des conditions géométriques relativement simples pour qu'un réarrangement S satisfasse l'inégalité

$$\|\nabla Su\|_2 \leq \|\nabla u\|_2 \ ?$$

- Que peut-on dire sur les versions strictes d'inégalités isopérimétriques par des méthodes d'approximation ? Peut-on faire intervenir l'asymétrie des données [Bha01] ?
- Les méthodes de polarisation et du plan mobile déplacent toutes les deux un plan à travers le domaine, l'analogie recèle-t-elle quelque chose ?
- L'inégalité de Pólya–Szegö pour le réarrangement croissant permet-elle de montrer l'existence de solutions de certains problèmes variationnels comme le fait G. Carbou avec un réarrangement semblable [Car95] ?

Bibliographie

[AL89a] Frederick J. Almgren, Jr. and Elliott H. Lieb, *Symmetric decreasing rearrangement can be discontinuous*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **20** (1989), no. 2, 177–180.

[AL89b] ———, *Symmetric decreasing rearrangement is sometimes continuous*, J. Amer. Math. Soc. **2** (1989), no. 4, 683–773.

[Alb00] Giovanni Alberti, *Some remarks about a notion of rearrangement*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 2, 457–472.

[Bae95] Albert Baernstein, II, *A unified approach to symmetrization*, Partial equations of Elliptic Type (A. Alvino et al., ed.), Symposia Mathematica, no. 35, Cambridge University Press, 1995, pp. 47–49.

[Ban80] Catherine Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1980.

[Bha01] Tilak Bhattacharya, *Some observations on the first eigenvalue of the p-laplacian and its connection with asymmetry*, Electronic Journal of Differential Equations **2001** (2001), no. 35, 1–15.

[BLL74] H. J. Brascamp, Elliott H. Lieb, and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 227–237.

[BN83] Haïm Brézis and Louis Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. **36** (1983), no. 4, 437–477.

[Bro00a] Friedemann Brock, *Continuous rearrangement and symmetry of solutions of elliptic problems*, Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. **110** (2000), no. 2, 157–204.

[Bro00b] ———, *A general rearrangement inequality à la Hardy-Littlewood*, J. Inequal. Appl. **5** (2000), no. 4, 309–320.

[BS99] Friedman Brock and Alexander Yu. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Transactions of the American Mathematical Society **352** (1999), no. 4, 1759–1796.

[Car95] Gilles Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1995), no. 3, 305–318.

[CK99] Steven J. Cox and Bernhard Kawohl, *Circular symmetrization and extremal Robin conditions*, Z. Angew. Math. Phys. **50** (1999), no. 2, 301–311.

[CNZ00] Goong Chen, Wei-Ming Ni, and Jianxin Zhou, *Algorithms and visualization for solutions of non-linear elliptic equations, part I : Dirichlet problem*, Int. J. Bifurcation and Chaos **7** (2000), 1565–1612.

[CZR86] J. A. Crowe, J. A. Zwaibel, and P. C. Rosenbloom, *Rearrangements of functions*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 432–438.

[Dac89] Bernard Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations*, Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[Edw65] R. E. Edwards, *Functional analysis. Theory and applications*, Holt, Rinehart and Winston, New York, 1965.

[FR60] Wendell H. Fleming and Raymond Rishel, *An integral formula for total gradient variation*, Arch. Math. **11** (1960), 218–222.

[Giu84] Enrico Giusti, *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.

[GNN79] B. Gidas, Wei Ming Ni, and L. Nirenberg, *Symmetry and related properties via the maximum principle*, Comm. Math. Phys. **68** (1979), no. 3, 209–243.

[HLP34] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[Kaw85] Bernhard Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[Kaw98] ______, *Symmetrization – or how to prove symmetry of solutions to a PDE*, Partial differential equations : theory and numerical solution. Proceedings of the ICM'98 satellite conference, Prague, Czech Republic, August 10–16, 1998. (W. Jäger, ed.), CRC Res. Notes Math., no. 406, Chapman & Hall/CRC, 1998, pp. 215–229.

[Kol92] Victor I. Kolyada, *On the differential properties of the rearrangements of functions*, Progress in approximation theory (Tampa, FL, 1990), Springer, New York, 1992, pp. 333–352.

[LL01] Elliott H. Lieb and Michael Loss, *Analysis*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[Lor53] G. G. Lorentz, *An inequality for rearrangements*, Amer. Math. Monthly **60** (1953), 176–179.

[Mos84] Jacqueline Mossimo, *Inégalités isopérimétriques et applications en physique*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[PS51] G. Pólya and G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[Sar72] Jukka Sarvas, *Symmetrization of condensers in n-space.*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I **522** (1972), 44 p.

[Sch93] Laurent Schwartz, *Analyse III, calcul intégral*, Collection Enseignement des Sciences, vol. 44, Hermann, Paris, 1993.

[SSW] D. Smets, J. Su, and M. Willem, *Non radial ground states for the hénon equation*, Comm. in Contemp. Math., à paraître.

[Str99] Daniel W. Stroock, *A concise introduction to the theory of integration*, third ed., Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1999.

[SW] Didier Smets and Michel Willem, *Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic problems*, Calculus of variations, à paraître.

[Tal76a] Giorgio Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372.

[Tal76b] ———, *Elliptic equations and rearrangements*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **3** (1976), no. 4, 697–718.

[Tal93a] ———, *On isoperimetric theorems of mathematical physics*, Handbook of Convex Geometry (P. M. Gruber and J.M. Wills, eds.), vol. B, Elsevier Science, Amsterdam, 1993, pp. 1131–1147.

[Tal93b] ———, *The standard isoperimetric theorem*, Handbook of convex geometry, Vol. A, B (P. M. Gruber and J.M. Wills, eds.), North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 73–123.

[Wil] Michel Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, en préparation.

[Wil95] ———, *Analyse harmonique réelle*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1995.

Table des matières