Université catholique de Louvain

Faculté des sciences

Symétrisations : mesure, géométrie et approximation

Travail de
diplôme d'études approfondies en mathématiques
présenté par

Jean Van Schaftingen

sous la direction du professeur

Michel Willem

Juin 2003

Mode d'emploi

Ce travail se compose de trois parties : la première, intitulée *Symétrisations : mesure, géométrie et approximations*, est à la fois introduction, guide de lecture et extension de ce qui suit. La deuxième partie, *Set transformations, symmetrizations and isoperimetric inequalities*, écrite avec Michel Willem, sera publié en *Lecture Notes* chez Springer tandis que la dernière, *Universal approximation of symmetrization by polarizations* a été soumis aux *Proceedings of the American Mathematical Society.*

Je tiens à remercier Michel Willem pour le temps qu'il me consacre, ses relectures et ses conseils et aussi de m'avoir proposé d'écrire avec lui la deuxième partie.

Jean Van Schaftingen

Symétrisations: mesure, géométrie et approximations

Jean Van Schaftingen

1 Problème isopérimétrique et symétrisations

Le problème isopérimétrique consiste à chercher parmi toutes les figures géométriques d'aire donnée, celle qui a le plus petit périmètre. La solution en est connue depuis l'antiquité, mais la preuve complète demandera deux millénaires au cours desquels seront définies progressivement les notions de figure, aire et périmètre.

C'est pour prouver la propriété isopérimétrique du disque qu'au début du XIX^e siècle, Jakob Steiner [1] a créé un outil, appelé plus tard symétrisation de Steiner. En voici une description géométrique. Étant donnée une figure géométrique compacte du plan F et une droite D, pour chaque perpendiculaire P à D, l'intersection $P \cap F$ est remplacée par un segment de même mesure centré en $P \cap D$. Le résultat de ce processus est la symétrisation de Steiner de F par rapport à D, notée F^D.

La symétrisation de Steiner possède plusieurs propriétés remarquables. Les figures F et F^D ont la même aire. La figure F^D est symétrique par rapport à la droite D ; elle est même symétrique au sens de Steiner : pour tout $x \in F^D$, si x_D est le symétrique de x par rapport à D, alors F^D contient le segment $[x, x_D]$. Enfin, le périmètre de F^D est plus petit que celui de F. La symétrisation est donc une transformation qui à la fois : augmente la symétrie, préserve certaines propriétés — l'aire et la compacité — et en améliore d'autres, ici le périmètre.

Si nous retournons au problème isopérimétrique et que F est un minimiseur, alors F^D en est aussi un. De plus, si la figure F n'est pas un disque, il existe une droite D telle que F ne soit pas isométrique à F^D et telle que le périmètre de F^D soit strictement inférieur à celui de D. La seule solution possible au problème isopérimétrique est le disque. Il reste à prouver l'existence d'une solution. Pour une suite de droites $(D_n)_{n \geqslant 1}$ passant toutes par un même point, la suite $(F^{D_1 \cdots D_n})_{n \geqslant 1}$ est précompacte pour la distance de Hausdorff. De plus, pour une suite $(D_n)_{n \geqslant 1}$ bien choisie — en fait presque toutes les suites conviennent [23] —, la limite est un disque. Le théorème isopérimétrique est démontré à condition que soit prouvé que l'aire est conservée à la limite et que le périmètre diminue à la limite.

À côté de la symétrisation de Steiner, nous pouvons définir une autre symétrisation, relativement triviale sur les ensembles mais par laquelle nous voulons illustrer ce qui se fait dans les cas les plus complexes. La symétrisation de F par

1. À son sujet, J. J. O'Connor et E. F. Robertson écrivent : *« He disliked algebra and analysis and believed that calculation replaces thinking while geometry stimulates thinking. »* (*The MacTutor History of Mathematics*, http ://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/)

rapport à un point o du plan est le disque de même aire centré en o. De nouveau cette transformation conserve les aires. De plus, puisque F^o est approximable par des symétrisation de Steiner, par le même argument que pour le théorème isopérimétrique, le périmètre de F^o est inférieur à celui de F. Les propriétés de la symétrisation par rapport à un point se déduisent donc de celles de la symétrisation par rapport à une droite par un processus d'approximation.

Voici donc résumés les trois aspects de l'étude des symétrisations : mesure, géométrie et approximation, qui se retrouvent dans la plupart des symétrisations, étendues depuis Steiner des ensembles aux fonctions et à de nouvelles géométries : cylindrique, anisotrope ou ensembles non bornés [2, 3, 19, 20, 25, 28].

Les symétrisations sont devenues un outil important dans l'étude de l'existence et des propriétés de solutions de problèmes variationnels (pour n'en citer qu'un échantillon [5, 12, 15, 24, 25]) et dans la preuve d'inégalités comme l'inégalité de Sobolev [30].

Comme dans notre court exemple introductif, nous distinguerons l'étude individuelle des propriétés des symétrisations de l'étude par approximation où les propriétés d'une symétrisation se déduisent des propriétés d'une autre symétrisation. Une étude détaillée des propriétés individuelles est faite dans la deuxième partie de ce travail [34] ; nous proposons ici un survol des différentes approches et des différents résultats dans la section 2. L'étude des approximations est l'objet de la troisième partie [32] et de la fin de la deuxième [34], dont les résultats sont étendus aux espaces d'Orlicz dans la section 3.

2 Axiomatique

2.1 Propriétés liées à la mesure

Les symétrisations partagent un noyau de propriétés liées d'assez près à la théorie de la mesure : la monotonie, la conservation de la mesure et la continuité. Elles permettent d'utiliser les symétrisations dans de nombreux problèmes non linéaires.

La première définition de réarrangement de fonction apparaît chez Hardy, Littelwood et Pólya [19]. Partant d'une notion combinatoire de réarrangement, qui consiste à changer l'ordre d'un n-uplet de nombres, ils démontrent les inégalités maintenant classiques de réarrangement. Ensuite, ils introduisent le réarrangement décroissant d'une fonction défini comme inverse de la fonction de répartition. Le réarrangement continu est sans rapport avec le réarrangement discret jusqu'à ce qu'une propriété commune, l'équimesurabilité entre une fonction et son réarrangement, soit mise en évidence. La conservation de la mesure est donc au cœur de l'idée de leur idée de réarrangement. La monotonie est présente, séparée de l'idée de réarrangement, dans la qualification des réarrangements de *décroissant* ou de symétrique *décroissant*. Quand Pólya et Szegő [25] définissent plusieurs réarrangements, ils mettent en évidence l'équimesurabilité tandis que la monotonie reste implicite.

Sarvas, en 1972, développe une théorie axiomatique des transformations d'ensembles. Il insiste sur les propriétés de continuité et de monotonie, alors que la conservation de la mesure est réduite à un rôle auxiliaire [28]. Crandall et Tartar [13] démontrent la contractivité du réarrangement en mettant en évidence la monotonie d'une classe importante d'opérateurs. Une première définition axiomatique se trouve chez Crowe, Zweibel et Rosenbloom [14], où apparaissent la conservation de la mesure et une version très forte de la monotonie : les ensembles image forment une famille croissante d'ensembles.

Un énoncé systématique énonce un certain nombre de propriétés communes à certains réarrangements et leurs relations se trouve chez Kawohl [21] ; les propriétés de monotonie, de conservation de la mesure et de continuité sont clairement mises en évidence chez Brock et Solynin [9]. C'est la démarche que nous avons suivie dans [34], dont nous synthétisons ici les idées. Le cadre axiomatique que nous présentons s'adapte aux symétrisations de Schwarz, Steiner, par calottes sphériques, au réarrangement croissant de Carbou-Alberti, au réarrangement croissant, qui sont toutes définies dans [32, 34] ; il s'adapte aussi à la symétrisation anisotrope [3, 31].

Définition 2.1. Soient Ω et Ω^* deux ensembles. Une *transformation d'ensembles* S de Ω vers Ω^* est une fonction définie sur un domaine $D(S)$, sous-ensemble de parties de Ω, dans l'ensemble des parties de Ω^*. On impose en outre que si $\phi \in D(S)$, alors $S(\phi) = \phi$ et que si $\Omega \in D(S)$, alors $S(\Omega) = \Omega^*$.

Notation 2.2. Si u est une fonction définie sur un ensemble X à valeurs dans $\bar{\mathbb{R}}$ et $c \in \bar{\mathbb{R}}$, on note les sous-ensembles de niveau ouvert et fermé respectivement

$$\{u > c\} = \{x \in X \mid u(x) > c\} \qquad \{u \geqslant c\} = \{x \in X \mid u(x) \geqslant c\}.$$

Inversément, la fonction caractéristique de l'ensemble $A \subseteq X$ est

$$\chi_A : X \to \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A. \end{cases}$$

La transformation d'ensembles S s'étend aux fonctions par la formule

$$\bar{S}u(x) = \max(\sup\{c \geqslant \inf u \mid \{u > c\} \in D(S) \text{ et } x \in S(\{u > c\})\}, \inf u),$$

où le second terme du maximum tombe si $\Omega \in D(S)$. C'est une extension dans le sens où, pour tout $A \in D(S)$,

$$\bar{S}\chi_A = \chi_{S(A)}.$$

La transformation de fonctions héritera des propriétés de la transformation d'ensembles, pourvu qu'elle soit restreinte à un ensemble de fonctions qui peuvent être décrites par des ensembles de $D(S)$. Ces fonctions seront dites admissibles.

Définition 2.3. L'*ensemble d'admissibilité* de la fonction u est

$$E_u = \left\{c \in \bar{\mathbb{R}} \mid \{u > c\} \in D(S) \text{ et } \{u \geqslant c\} \in D(S)\right\}.$$

La fonction u est *admissible* si $(\inf u, \sup u) \subset E_u$.

Remarque 2.4. L'ensemble d'admissibilité mesure la régularité d'une fonction par rapport au réarrangement.

Monotonie La première propriété qui définit un réarrangement est la monotonie.

$(\mathcal{M}_1)$ *Pour tout $A, B \in D(S)$, si $A \subset B$, alors $S(A) \subset S(B)$.*

La monotonie implique une propriété de commutation avec les fonctions continues. Si $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ est continue et si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ est admissible, alors

$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u.$$

Elle entraine aussi la monotonie de $\bar{S}$: si u et v sont des fonctions admissibles et si $u \leqslant v$, alors $\bar{S}u \leqslant \bar{S}v$. Par ailleurs, toute transformation de fonctions induite par une transformation d'ensembles monotone est une contraction pour la distance uniforme. Enfin, la monotonie rend équivalentes de nombreuses définitions de réarrangement de fonctions [34].

Conservation de la mesure Si (Ω, μ) et (Ω^*, ν) sont des espaces mesurés, nous pouvons introduire la propriété de conservation de la mesure. Une première formulation est

$(\mathcal{M}_2^0)$ *Si $A \in D(S)$, alors A est mesurable et $\mu(A) = \nu(S(A)) < \infty$.*

Cette formulation peut être étendue pour englober le cas des ensembles de mesure infinie :

$(\mathcal{M}_2)$ *Pour tout $A, B \in D(S)$, si $A \subset B$, alors A et B sont mesurables et $\mu(B \setminus A) = \nu(S(B) \setminus S(B)) < \infty$.*

Remarquons que les propriétés $(\mathcal{M}_1)$ et $(\mathcal{M}_2^0)$ impliquent $(\mathcal{M}_2)$ et que la conservation de la mesure restreint fortement la classe des ensembles admissibles $D(S)$.

Continuité presque partout La continuité peut se formuler de plusieurs manières qui ne sont pas équivalentes. Une première est la continuité presque partout. Elle demande que Ω^* soit muni d'une mesure ν.

$(\mathcal{M}_{3p})$ *Pour toute suite croissante d'ensembles $(A_n)_{n \geqslant 1} \in D(S)$, $A_n \subseteq A_{n+1}$, si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in D(S)$, alors $\nu(S(A) \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} S(A_n)) = 0$.*
Pour toute suite décroissante d'ensembles $(A_n)_{n \geqslant 1} \in D(S)$, $A_n \supseteq A_{n+1}$, si $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in D(S)$, alors $\nu(S(A) \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} S(A_n)) = 0$.

Les propriétés précédents permettent alors d'obtenir la conservation d'intégrales [34]. Ainsi

$$\int_\Omega f(u)\, d\mu = \int_{\Omega^*} f(Su)\, d\nu,$$

pour u admissible et $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ borélienne s'annulant en dehors de l'ensemble d'admissibilité E_u. Elles donnent aussi des inégalités de Hardy-Littlewood généralisées :

$$\int_\Omega F(u(x), v(x))\, d\mu \leqslant \int_{\Omega^*} F(Su(y), Sv(y))\, d\nu,$$

pour des fonctions u et v admissibles l'une par rapport à l'autre et pour $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que pour $a \leqslant c$, $b \leqslant d$,

$$F(a,c) + F(b,d) \leqslant F(a,d) + F(b,c),$$

et $F(a,b) = F(b,a)$. (Cette hypothèse peut être levée si la condition $(\mathcal{M}_2^0)$ est vérifiée [14,35].) En particulier, nous avons l'inégalité de Hardy-Littlewood

$$\text{(HL)} \qquad \int_\Omega u(x)v(x)\,d\mu \leqslant \int_{\Omega^*} u^*(y)v^*(y)\,d\nu$$

et la non-expansivité du réarrangement : pour toute fonction convexe positive $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'annulant en 0,

$$\int_{\Omega^*} J(u^*(y) - v^*(y))\,d\mu \leqslant \int_\Omega J(u(x) - v(x))\,d\nu.$$

Continuité en tout point La continuité presque partout exclut des ensembles admissibles les ensembles de mesure infinie mais ne permet pas d'obtenir le moindre résultat de continuité ponctuel. Il faut donc introduire une autre notion de continuité, la continuité intérieure.

$(\mathcal{M}_{3i})$ *Pour toute suite croissantes d'ensembles $A_n \in D(S)$, $A_n \subset A_{n+1}$, si $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, alors $A \in D(S)$ et $S(A) = \bigcup_{n=1}^\infty S(A_n))$.*

Remarquons que $(\mathcal{M}_{3i})$ est en fait la première condition de $(\mathcal{M}_{3p})$ où Ω^* est muni de la mesure ν discrète.

Dans les applications, la continuité intérieure permet d'obtenir deux résultats clefs : si $\{u > c\} \in D(S)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ alors pour tout $d \in \mathbb{R}$,

$$S(\{u > d\}) = \left\{\bar{S}u > d\right\}$$

et si $\{u_n > c\} \in D(S)$ pour tout $c \in \mathbb{R}$ et si $u_n \nearrow u$ en tout point, alors $\bar{S}u_n \nearrow \bar{S}u$ en tout point [31].

La propriété $(\mathcal{M}_{3p})$ demande en général une restriction suffisante du domaine de définition tandis que $(\mathcal{M}_{3i})$ demande une construction précis des ensembles symétrisés. Il n'y a pas en général à choisir entre les propriétés $(\mathcal{M}_{3p})$ et $(\mathcal{M}_{3i})$ lors de la définition d'un réarrangement, mais plutôt à restreindre leurs domaines aux sous-domaines adaptés aux propriétés désirées dans les différentes applications.

2.2 Propriétés géométriques

Les considérations que nous avons faites jusqu'ici n'ont fait appel au plus qu'à la théorie de la mesure. La résolution de problèmes du calcul des variations fait en général intervenir la structure géométrique du domaine à travers les opérations de différentiation et de convolution.

Dès le début, la symétrisation s'est intéressées aux propriétés géométriques : elles conservaient l'aire (mesure) et réduisaient le périmètre (géométrie). Dans *Inequalities* [19], la géométrie des réarrangements entre avec l'inégalité de Riesz-Sobolev (RS, ci-dessous), dont le caractère géométrique est mis en évidence par le fait qu'elle est la seule inégalité dont la démonstration soit illustrée par des figures dans l'ouvrage [2]. Dans ce même ouvrage, des inégalités sur l'aire du graphe d'une fonction sont citées. C'est à partir de ce type d'inégalité que Pólya et Szegő démontrent leur inégalité [25]. Les extensions seront nombreuses : extension de l'inégalité de Pólya-Szegő aux espaces de Sobolev [20], extension de de l'inégalité de Riesz-Sobolev à des produits beaucoup plus généraux [7], conditions nécessaires d'égalité [10], inégalités intermédiaires [4]...

Inégalité de Reisz-Sobolev La généralisation la plus simple de l'inégalité de Hardy-Littlewood à des intégrales multiples est l'inégalité des Riesz-Sobolev

$$\text{(RS)} \quad \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u(x)\, v(y)\, w(x-y)\, dx\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} u^*(x)\, v^*(y)\, w^*(x-y)\, dx\, dy.$$

Les inégalités (HL) et (RS) sont les deux premières de la famille d'inégalités démontrée pour la symétrisation de Schwarz [7]. L'inégalité (RS) fait intervenir le produit de convolution et donc la structure de groupe de $\mathbb{R}^N$. Alors que l'inégalité (HL) ne restreint en rien la géométrie, (RS) impose des conditions géométriques rigides aux transformation d'ensemble dans $\mathbb{R}^N$ pour lesquelles elle est valable : les symétrisations d'ellipsoïdes doivent être envoyés sur des ellipsoïdes. C'est pourquoi (RS) est fausse pour la polarisation, pour la symétrisation par calottes sphériques et pour les symétrisations anisotropes en général [31,32].

Proposition 2.5. *Soit S une transformation d'ensembles qui vérifie $(\mathcal{M}_2^0)$ et soit $E \in D(S)$ un ellipsoïde. Si l'inégalité* (RS) *a lieu pour $u = v = w = \chi_E$, alors, à un ensemble de mesure nulle près, $S(E)$ est un ellipsoïde.*

Démonstration. Soit $E \in D(S)$ un ellipsoïde. Soit T la symétrisation qui envoie tout ensemble de mesure finie sur une image homothétique de E de même mesure. À un changement linéaire de variable près, c'est la symétrisation de Schwarz, qui vérifie l'inégalité (RS). Nous avons $\bar{T}\bar{S}\chi_E = \chi_E$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \chi_E(x)\, \chi_E(y)\, \chi_E(x-y)\, dx\, dy = \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \bar{S}\chi_E(x)\, \bar{S}\chi_E(y)\, \bar{S}\chi_E(x-y)\, dx\, dy.$$

D'après les conditions nécessaires et suffisantes d'égalité dans l'inégalité (RS) pour la symétrisation de Schwarz de Burchard [10], ceci ne peut avoir lieu que si $S(E)$ est un ellipsoïde à un ensemble de mesure nulle près. □

Inégalité de Riesz-Sobolev faible Pour la polarisation et la symétrisation par calottes sphériques, on a toutefois une famille d'inégalité intermédiaire entre (RS) et de (HL) a lieu : si $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est continue, si $F(a,c) + F(b,d) \geqslant F(a,d) + F(b,c)$ pour $a \leqslant b$ et $c \leqslant d$ et si $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ est décroissante, alors

$$\text{(RS}^*\text{)} \quad \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} F(u(x), v(y)) w(|x-y|_2)\, dx\, dy \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} F(u^*(x), v^*(y)) w(|x-y|_2)\, dx\, dy.$$

2. Deux figures sur le modèle « avant/après » sont consacrées à l'inégalité discrète et une à chacune des deux preuves de l'inégalité continue.

Cette inégalité se trouve avec $F(s,t) = st$ chez Donoghue qui n'a pas besoin de l'inégalité de Riesz-Sobolev générale [16]. Elle est démontrée par Baernstein pour $F(s,t) = J(|s-t|)$ où $J : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction paire convexe et positibe et pour de nombreuses symétrisations chez qui elle joue un rôle d'inégalité maitresse d'où découlent les autres propriétés des symétrisations [4]. Cette inégalité est fausse en général pour la symétrisation anisotrope [31].

Il est facile de montrer que des inégalités (RS) et (RS*) sont vraies pour un réarrangement si et seulement si elles sont vraies pour des fonctions caractéristiques d'ensembles et les propriétés de transformation de fonctions se déduisent donc des propriétés de transformation d'ensembles.

Dans le cas de fonctions caractéristiques, les inégalités (RS) et (RS*) rappellent l'inégalité de Brunn-Minkowski

$$\text{(BM)} \qquad \mathcal{L}^N(K+L)^{\frac{1}{N}} \geqslant \mathcal{L}^N(K)^{\frac{1}{N}} + \mathcal{L}^N(L)^{\frac{1}{N}},$$

où K et L sont des ensembles mesurables [18]. Les inégalités impliquent toutes les deux l'inégalité de Brunn-Minkowski dans le cas où les ensembles réarrangés sont homothétiques à K. Malheureusement, les inégalités (RS) et (RS*) ne valent pas pour un réarrangement par rapport à un convexe qui n'est pas un ellipsoïde K, alors que (BM) est valable pour convexe quelconque K. Ces inégalités ne peuvent donc pas se déduire de (BM).

Inégalité de Pólya-Szegő L'inégalité de Pólya-Szegő

$$\text{(PS)} \qquad \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \leqslant \int_\Omega |\nabla u|^p$$

a tout d'abord été démontrée par des propriétés de transformations d'ensemble : d'abord la diminution de l'aire du graphe [25], ensuite par la diminution du périmètre des sous-ensembles de niveau par la formule de la co-aire [3, 5, 24]. Elle peut aussi se déduire de l'inégalité (RS*) et d'une caractérisation intégrale des espaces de Sobolev. Si $(\rho_n) \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$ est une suite de fonctions positives et radiales décroissantes ($\rho_n(x) = \rho_n'(|x|)$ avec $\rho_n' : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ décroissante), si S est une symétrisation qui préserve les boules, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\left|\bar{S}u(x) - \bar{S}u(y)\right|^p}{|x-y|^p} \rho_n'(|x-y|)\,dx\,dy \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^p} \rho_n'(|x-y|)\,dx\,dy.$$

En passant à la limite et en utilisant une caractérisation des espaces de Sobolev de Bourgain, Brezis et Mironescu [6, 8, 26, 34], on obtient l'inégalité (PS).

Nous démontrons une condition nécessaire sur les réarrangements ensembles pour que l'inégalité (PS) ait lieu : il faut que la symétrisation diminue la p-capacité des condensateurs.

Définition 2.6. Soient A et B deux sous-ensembles de Ω mesurables. La p-capacité du condensateur (A, B) est

$$\operatorname{capa}_{p,\Omega}(A,B) = \inf\left\{ \int_\Omega |\nabla u|^p \mid u \in W^{1,1}_{loc}(\Omega), \quad 0 \leqslant u \leqslant 1 \right. \\ \left. u(x) = 1 \text{ si } x \in A \text{ et } u(x) = 0 \text{ si } x \notin B \right\}.$$

Remarque 2.7. D'après la définition si $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ est un ouvert régulier, A est compact et $B \supset A$ est ouvert, alors $\operatorname{capa}_{p,\Omega} < \infty$ et la capacité coïncide avec les définitions classiques [17, 28] (en prenant chez Dubinin comme deuxième ensemble $\Omega \setminus B$). Si nous prenons $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$, $A = [b, c]$ et $B = [a, d]$, alors on peut calculer

$$\operatorname{capa}_{p,\Omega}(A, B) = (b-a)^p + (d-c)^p.$$

Si la mesure de A et de B sont fixées, la capacité minimale est atteinte lorsque les centres des intervalles coïncident.

Enfin, si $\mathcal{L}^N(A \setminus B) \neq 0$, la classe de fonctions sur laquelle l'infimum est pris est vide et $\operatorname{capa}_p(A, B) = \infty$.

Proposition 2.8. *Soit S un réarrangement et $1 < p < \infty$. Si pour tout $A, B \in D(S)$,*

$$\operatorname{capa}_p(S(A), S(B)) \leqslant \operatorname{capa}_p(A, B).$$

et si $u \in W^{1,p}(\Omega)$ admissible et positive, alors $Su \in W^{1,p}(\Omega^*)$ et

$$\int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p \leqslant \int_{\Omega} |\nabla u|^p .$$

Démonstration. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ et $\alpha > 1$, nous avons, par définition de la capacité,

$$\operatorname{capa}_{p,\Omega}(\{u > \alpha^{k+1}\}, \{u > \alpha^k\}) \leqslant \frac{1}{(\alpha-1)^p \alpha^{pk}} \int_{\Omega \cap \{\alpha^k < u < \alpha^{k+1}\}} |\nabla u|^p \, dx.$$

En additionnant ces inégalités, nous obtenons

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^p \, dx \geqslant \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha-1)^p \alpha^{pk} \operatorname{capa}_p(\{u > \alpha^{k+1}\}, \{u > \alpha^k\}).$$

Par ailleurs, par définition de la capacité, pour tout $k \geqslant 0$, il existe $v_{\alpha,k} \in W^{1,1}_{loc}(\Omega)$ tel que

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega^*} |\nabla v_{\alpha,k}|^p \, dx \leqslant \operatorname{capa}_p(S(\{u > \alpha^{k+1}\}), S(\{u > \alpha^k\})) + \frac{1}{2^{|k|}\alpha^k}, \\
&\qquad v_{\alpha,k}(x) = 0 \qquad \text{si } x \notin S(\{u > \alpha^k\}), \\
&\qquad v_{\alpha,k}(x) = 1 \qquad \text{si } x \in S(\{u > \alpha^{k+1}\}), \\
&\qquad 0 \leqslant v_{\alpha,k} \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Si nous posons

$$v_\alpha = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (\alpha-1)^p \alpha^{pk} v_{\alpha,k},$$

alors

$$\lim_{\alpha \to 1} \|v_\alpha - Su\|_p = 0,$$

et

$$\|\nabla v_\alpha\|_p \leqslant \|\nabla u\|_p + 2(1-\alpha),$$

d'où, puisque la suite v_α est bornée dans $W^{1,p}(\Omega)$ et converge vers Su dans L^p, on déduit [35, lemme 23.7] que $v_\alpha \rightharpoonup Su$ quand $\alpha \to 1$ dans $W^{1,p}(\Omega)$ et que

$$\|\nabla Su\|_p \leqslant \|\nabla u\|_p . \qquad \square$$

Remarque 2.9. Si toutes les fonctions de $u \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{R}^N)$ telles que $0 \leqslant u \leqslant 1$, $u(x) = 1$ sur A et $u(x) = 0$ en dehors de B sont admissibles et vérifient l'inégalité (PS), alors

$$\operatorname{capa}_p(S(A), S(B)) \leqslant \operatorname{capa}_p(A, B).$$

Il y a des conditions semblables lorsque $p = 1$ ou $p = \infty$. Pour $p = 1$, la condition suffisante pour que le réarrangement d'une fonction à variation bornée soit une fonction avec une variation plus petite, est que le réarrangement fasse décroître le périmètre au sens de Giorgi des ensembles [24, 33]. Si $p = \infty$, pour obtenir la diminution de la constante de Lipschitz, il faut que pour tout couple d'ensembles (A, B), la distance entre courbes de niveau augmente [9]

$$\sup_{x \in A} \inf_{y \in B} d(x, y) \leqslant \sup_{x \in S(A)} \inf_{y \in S(B)} d(x, y).$$

Le problème de la capacité n'est pas plus facile a résoudre que le problème de l'inégalité (PS). Cette méthode a toutefois déjà été utilisée dans des cadres géométriques suffisament simples [24].

Les inégalités (RS), (RS*) et (PS) dépendent très fort de la géométrie de la symétrisation. Si une approche axiomatique des propriétés en améliore la compréhension, elle n'en simplifie néanmoins pas la preuve.

3 Approximation

L'étude axiomatique des propriétés géométriques des réarrangements montre qu'une approche directe est complexe. Le fait que certaines symétrisation sont plus simples que d'autres à étudier incite à approcher des symétrisations complexes par des symétrisations plus simples afin d'étendre les propriétés des cas simples aux cas complexes.

Les premières approximations de symétrisation se trouvent dans la preuve de l'inégalité isopérimétrique par symétrisation de Steiner, où l'on montre qu'une suite de symétrisations itérées convergeait vers le disque. Après les ensembles, elles sont appliquées aux p-capacités de condensateurs par J. Sarvas, qui approxime toute symétrisation à partir de la symétrisation par calottes sphériques $(1, N)$, afin de montrer que les symétrisations par calottes sphériques et les symétrisations de Steiner diminuent la p-capacité [28]. Enfin, l'approximation est étendue aux symétrisations de fonctions par Brascamp, Lieb et Luttinger, qui approximent toute symétrisation de Steiner par des symétrisations de Steiner d'ordre inférieur afin de prouver l'inégalité de Riesz-Sobolev et ses généralisations en N dimensions [7]. Les suites de symétrisations de Steiner approximantes sont en général assez simples à construire explicitement [22]. Par ailleurs, il est possible de montrer que presque toute suite de symétrisations de Steiner d'ensembles approxime une symétrisation d'ordre supérieur [23].

Ces symétrisations et d'autres peuvent être approximées par des symétrisations encore plus simples. La polarisation, appelée aussi réarrangement à deux points et qu'on pourrait logiquement appeler symétrisation par calottes sphériques $(0, N)$ est probablement la symétrisation non triviale la plus simple possible. Par un procédé ingénieux, Dubinin réduit la symétrisation d'union finies de « pavés » à un nombre fini de polarisations. Étant donné que ces unions finies de pavés approximent bien tout ensemble, il peut ainsi montrer qu'une grande classe de capacités est réduite par symétrisation de Steiner ou par calottes sphériques [17]. À partir des idées de Baernstein [4], l'existence de suites universelles d'approximation des symétrisations de Steiner (dans le plan, l'espace hyperbolique et sur la sphère), la symétrisation par calottes sphériques (*spherical-cap symmetrization*), le réarrangement croissant à l'infini a été prouvée [9, 29, 32].

Les résultats d'approximations peuvent s'énoncer grossièrement de la manière suivante : pour une symétrisation, il existe une suite d'approximations par des symétrisations, telle que pour toute fonction continue à support compact, la suite itérées des symétrisations approximantes converge vers la symétrisation. On en déduit qu'on peut aussi approximer beaucoup de fonctions admissibles dans un espace d'Orlicz (voir plus bas) et n'importe quel ensemble mesurable en mesure.

Les preuves de convergence se basent sur le phénomène remarquable suivante : le caractère contractant des symétrisations implique que les approximations ne s'éloigneront jamais. On peut donc faire autant de mauvaises itérations qu'on veut, pourvu qu'il reste une infinité de bonnes itérations. Des considérations un peu plus fines permettent de montrer que toute suite d'approximation est précompacte. On sait donc qu'une sous-suite des approximations converge vers quelque chose et il suffit de montrer que ce quelque chose est ce qu'on veut approximer pour avoir la convergence de la suite entière. C'est le cœur des preuves de théorèmes d'approximations de symétrisations auxquels nous avons fait référence. Sans entrer dans le détail de la preuve [32], nous montrons ici comment les résultats déjà obtenus dans les espaces L^p s'étendent facilement aux espaces d'Orlicz.

Nous supposons que nous avons un réarrangement S qui est approximé par une suite de réarrangements S_n. Pour une fonction u, nous notons

$$u_n = \bar{S}_n \dots \bar{S}_1 u \qquad\qquad u^* = \bar{S}u.$$

et pour un ensemble A

$$A_n = S_n \circ \dots \circ S_1(A) \qquad\qquad A^* = S(A).$$

L'indice $*$ pour un espace fonctionnel désigne le sous-ensemble des fonctions admissibles pour $*$ de cet espace : ainsi si $*$ est la symétrisation de Steiner, $\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ désignera l'ensemble des fonctions positives continues à support compact. Si $*$ est la symétrisation par calottes sphériques, ce sera l'ensemble tout entier. Nous imposons une condition de compatibilité entre la suite (S_n) et S. Pour tout $A \in D(S)$ et $n \in \mathbb{N}$, $S(A) \in D(S_n)$ et $S_n(S(A)) = S(A)$. Cela implique que pour tout u admissible, $\bar{S}_n\bar{S}u = \bar{S}u$ et en particulier que pour $\Phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ semi-continue inférieure et convexe,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u^* - u_n|)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(|u - u_n|)\, dx.$$

Nous supposons enfin que pour toute fonction admissible continue à support compact, $u_n \to u$ uniformément. Ces hypothèses sont vérifiées dans tous les théorèmes d'approximation que nous connaissons.

Nous rappelons quelques faits au sujet des espaces d'Orlicz. Pour les détails des résultats énoncés ci-dessous, nous renvoyons à l'ouvrage de M. M. Rao et Z. D. Ren [27].

Définition 3.1. La fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de Young si elle est convexe, $\Phi(\xi) = \Phi(-\xi)$, $\lim_{\xi \to 0} \Phi(\xi) = 0$ et $\lim_{|\xi| \to \infty} \Phi(\xi) = \infty$.

Définition 3.2. Soit Φ une fonction de Young. L'espace d'Orlicz $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$ est le quotient par l'ensemble des nulles presque partout de l'ensemble des fonctions mesurables telles que la norme de Luxemburg

$$\|f\|_\Phi = \inf \left\{ \rho \;\middle|\; \int_{\mathbb{R}^N} \Phi(\rho^{-1} f) < 1 \right\}$$

est finie.

On démontre que les espaces d'Orlicz sont des espaces de Banach.

Remarque 3.3. Si $1 \leqslant p < \infty$ et $\Phi(\xi) = |\xi|^p$, alors $L^\Phi(\mathbb{R}^N) = L^p(\mathbb{R}^N)$. Si

$$\Phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |\xi| \leqslant 1 \\ \infty & \text{si } |\xi| > 1, \end{cases}$$

alors $L^\Phi(\mathbb{R}^N) = L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

La proposition suivante se transcrit instantanément du cas $L^p(\mathbb{R}^N)$ [32].

Proposition 3.4. *Soit (S_n) une suite de symétrisations et S une symétrisation de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}^N$. Supposons que pour tout $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$, on ait*

$$u_n \to Su$$

pour la convergence uniforme. S'il existe un recouvrement de $\mathbb{R}^N$ par une famille croissante d'ouverts de mesure finie invariants $(U_i)_{i \in I}$ (c'est-à-dire $\mathbb{R}^N = \cup_{i \in I} U_i$ et $S(U_i) = U_i$ pour tout $i \in I$), alors pour toute fonction de Young Φ et pour tout u de l'adhérence de $\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ dans $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$,

$$\lim_{n \to \infty} \|u^* - u_n\|_\Phi = 0.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$ donné et u dans l'adhérence de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ dans $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$. Par hypothèse, il existe un $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $n \geqslant 1$ $\|v - u\|_\Phi < \varepsilon/3$. Puisque v est à support compact, il existe un $i \in I$ tel que $\operatorname{supp} v \subset U_i$; par monotonie, $v_n \in U_i$. Puisque Φ est une fonction de Young, il existe $\eta > 0$ tel que pour $\xi \leqslant \eta$, $\mathcal{L}^N(U_i)\Phi(\xi) \leqslant 1$. Enfin, par hypothèse, il existe $k \geqslant 0$ tel que pour $n \geqslant k$, on ait $3\,\|v_n - v^*\|_\infty \leqslant \eta\varepsilon$. Tout cela mis ensemble donne

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{v_n - v}{\varepsilon/3}\right) dx \leqslant \mathcal{L}^N(U_i)\Phi\left(\frac{\|v_n - v^*\|_\infty}{\varepsilon/3}\right) \leqslant 1,$$

d'où $\|v_n - v\|_\Phi \leqslant \varepsilon/3$. Le caractère contractant des réarrangements S et (S_n) donne enfin

$$\|u_n - u^*\|_\Phi \leqslant \|u_n - v_n\|_\Phi + \|v_n - v^*\|_\Phi + \|v^* - u^*\|_\Phi \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Remarque 3.5. La simplicité de la preuve ci-dessus cache un problème : quelles fonctions d'un espace d'Orlicz sont approximables par des fonctions continues admissibles à support compact ? Ce sont toutes les fonctions admissibles de $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si Φ vérifie la condition Δ_2 (voir ci-dessous). Sinon, la question se pose de savoir si toutes les fonctions sont approximables par polarisation est ouverte. Par exemple, pour $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, l'adhérence des fonctions continues à support compact est le sous-espace strict $C_0(\mathbb{R}^N)$ des fonctions continues qui tendent vers 0 à l'infini. Par ailleurs, les fonctions caractéristiques d'ensembles non symétrisables en un nombre fini de transformation ne sont pas approximable dans L^∞, puisque la distance à la symétrisée vaut soit 0 soit 1 pour une fonction caractéristique. L'ensemble des fonctions dont la symétrisation est approximable A^* vérifie donc $C_{0,*}(\mathbb{R}^N) \subseteq A^* \subseteq L^\infty_*(\mathbb{R}^N)$.

Définition 3.6. Une fonction de Young Φ satisfait la condition Δ_2 s'il existe $K > 0$ tel que pour tout $\xi \geqslant 0$,

$$\Phi(2\xi) \leqslant K\Phi(\xi).$$

Remarque 3.7. Si Φ vérifie la condition Δ_2, alors Φ est continue.

Proposition 3.8. *L'ensemble $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^\Phi(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si Φ satisfait la condition Δ_2.*

Remarque 3.9. Ce résultat doit être connu, mais nous ne l'avions pas sous la main. La preuve de la condition suffisante est une adaptation de [35] qui approche systématiquement les fonctions mesurables par des fonctions continues à support compact tandis que celle de la condition nécessaire vient de [27] qui ne considèrent pas la structure topologique de l'ensemble Ω à partir duquel est défini un espace d'Orlicz $L^\Phi(\Omega)$.

Démonstration. Soit $u \in L^\Phi(\mathbb{R}^N)$. Comme u est mesurable, il existe une suite de fonctions $(u_n) \subset \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \to u$ presque partout. En prenant

$$v_n = \max(\min(|u_n|\,, u), -|u_n|),$$

nous avons alors $\Phi\left(\frac{v_n - u}{\varepsilon}\right) \to 0$ presque partout par semi-continuité inférieure de Φ et

$$\Phi\left(\frac{v_n - u}{\varepsilon}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right)$$

par convexité de Φ. Puique Φ vérifie la condition Δ_2, le second membre est intégrable. Par le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on a $\|u_n - u\|_\Phi \leqslant \varepsilon$.

Nous pouvons donc supposer qu'il existe $f \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ tel que $|u| \leqslant f$ presque partout. Posons

$$w_n = \max(\min(f, u_n), -f).$$

Les fonctions w_n sont continues à support compact. Puisque Φ est convexe et paire,

$$\Phi\left(\frac{w_n - f}{\varepsilon}\right) \leqslant \Phi\left(\frac{2f}{\varepsilon}\right),$$

où le second membre est intégrable comme fonction continue à support compact et

$$\Phi\left(\frac{w_n - u}{\varepsilon}\right) \to 0$$

presque partout. Le théorème de la convergence dominée de Lebesgue permet de conclure.

Pour la condition nécessaire, supposons que Φ ne satisfasse pas la condition Δ_2. Si $\Phi(\xi) > 0$ pour tout $\xi > 0$, il existe une suite $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ telle que $\Phi(\xi_n) < \infty$ et

$$\Phi(2\xi_n) > n\Phi(\xi_n).$$

On doit avoir $\xi_n > 0$ pour tout n. On peut construire une suite d'ensembles compacts disjoints F_n tels que

$$\mathcal{L}^N(F_n) = \frac{1}{n^2\Phi(\xi_n)}$$

et que $F_n \subseteq \mathbb{R}^N \setminus B(0,n)$. Posons $u = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \chi_{F_n}$. On a $\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(u) = 1$, d'où $u \in L^{\Phi}_{+}(\mathbb{R}^N)$. Soit $v \in \mathcal{K}$. Puisque v a un support compact, il existe n_0 tel que $v(x) = 0$ si $x \notin B(0,n_0)$. On a donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(2|v-u|)\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N\setminus B(0,n_0)} \Phi(2u)\,dx \geqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{n\Phi(\xi_n)}{n^2\Phi(\xi_n)} = +\infty,$$

et donc $\|v-u\|_{\Phi} > \frac{1}{2}$.

S'il existe un $\xi > 0$ tel que $\Phi(\xi) = 0$, on peut supposer sans perte de généralité que $\Phi(2\xi) > 0$. Si nous posons $u(x) = \xi$, et si v est une fonction à support compact K, nous avons $\|u\|_{\Phi} < 1$ et

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi(2|v-u|)\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^N\setminus K} \Phi(2\xi)\,dx = \infty,$$

d'où $\|v-u\|_{\Phi} \geqslant \frac{1}{2}$.[3] □

Remarque 3.10. Le résultat s'étend immédiatement aux espaces de fonctions définies sur un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. De plus, le résultat est vrai pour les fonctions positives. On a donc que pour les symétrisations par calottes sphériques et de Steiner, $L^{\Phi}_{*}(\mathbb{R}^N)$ est l'adhérence de $\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ si et seulement si Φ satisfait la condition Δ_2.

Dans d'autres cas, il est possible de calculer explicitement la fermeture de l'ensemble des fonctions continues à support compact.

Proposition 3.11. *Si Φ est continue et si $\Phi(\xi) > 0$ si $\xi > 0$, la fermeture ensemble des fonctions continues à support compact est*

$$M^{\Phi} = \left\{ u \;\middle|\; \forall \rho > 0,\ \int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{u}{\rho}\right)\,dx < \infty \right\}.$$

Remarque 3.12. Par la proposition 3.8, on a en général $M^{\Phi}(\Omega) \neq L^{\Phi}(\Omega)$.

Démonstration. Il suffit de noter que dans la preuve de la proposition 3.8, la condition Δ_2 peut-être remplacée par la continuité de Ψ et le fait que $u \in M^{\Psi}$.

Inversément, supposons que u soit dans l'adhérence de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ et que $\rho > 0$. Alors il existe $v \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|v-u\|_{\Phi} \leqslant \rho/2$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{u}{\rho}\right)\,dx \leqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{2(u-v)}{\rho}\right)\,dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \Phi\left(\frac{2v}{\rho}\right)\,dx < \infty,$$

puisque Φ est continue et convexe. □

3. En fait, on peut montrer que la meilleure approximation par des fonctions continues à support compact d'une fonction constante est la fonction nulle !

La convergence du gradient a aussi lieu faiblement dans les espaces d'Orlicz. La preuve est particulièrement simple pour les espaces d'Orlicz qui sont les duaux d'un autre espace.

Dans la suite, la fonction Ψ sera définie comme suit :

$$\Psi(\zeta) = \sup_{\xi \in \mathbb{R}^+} \zeta \cdot \xi - \Phi(\xi).$$

La relation suivante de dualité nous sera utile :

Proposition 3.13. *Si Ψ est une fonction de Young continue et si $\Psi(x) > 0$ si $x > 0$, alors le dual topologique de M^Ψ est isomorphe à L^Φ.*

Remarque 3.14. Pour la preuve voir, [27, théorème 4.1.7]. L'isomorphisme n'est pas une isométrie en général. On peut obtenir une isométrie en remplaçant la norme de Luxemburg dans un des deux espaces par une norme équivalente, la norme d'Orlicz.

Proposition 3.15 (Inégalité de Pólya-Szegő dans les espaces d'Orlicz)**.** *Soit Ψ une fonction de Young continue telle que $\Psi(\xi) > 0$ pour tout $\xi > 0$ et $u \in W^{1,1}_{loc,+}$. Si $|\nabla u| \in L^\Phi(\mathbb{R}^N)$, alors $|\nabla u^*| \in L^\Phi(\mathbb{R}^N)$ et*

$$\|\nabla u^*\|_\Phi \leqslant \|\nabla u\|_\Phi .$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que u soit intégrable. Alors, pour tout $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^N)$, nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^* \operatorname{div} \phi \, dx = \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \operatorname{div} \phi \, dx \leqslant \varliminf_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_\Phi \|\phi\|_\Psi \leqslant \|\nabla u\|_\Phi \|\phi\|_\Psi .$$

Par la proposition 3.11, c'est une fonctionnelle continue définie sur M^Ψ, d'où $|\nabla u^*| \in L^\Psi(\mathbb{R}^N)$ et

$$\|\nabla u^*\|_\Phi \leqslant \|\nabla u\|_\Phi .$$

Dans le cas général, si u n'est pas intégrable, elle est intégrable sur tout ensemble de mesure finie par l'inégalité de Sobolev pour les espaces d'Orlicz-Sobolev [1], on peut construire une suite

$$u_m = \max(\min(u - 1/m, m), 0).$$

Puisque la suite u_m est croissante et converge presque partout vers u, la suite u_m^* est croissante aussi et converge presque partout vers u^*, elle converge donc vers u^* dans $L^1(\Omega)$ pour tout Ω de mesure finie, et donc aussi dans $L^1_{loc}(\Omega)$. Par ailleurs, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^N$, $\nabla u_m^*(x)$ est constant à partir d'un certain m avant lequel il vaut 0. Soit v cette limite. On a donc que $\nabla u_m^* \to v$ dans $L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, d'où $v = \nabla u^*$ au sens faible. Par la première partie et le théormée de la convergence monotone, on a

$$\|\nabla u^*\|_\Phi = \|v\|_\Phi = \lim_{m\to\infty} \|\nabla u_m^*\|_\Phi \leqslant \varliminf_{m\to\infty} \|\nabla u_m\|_\Phi \leqslant \|\nabla u\|_\Phi . \qquad \square$$

Remarque 3.16. L'approximation de symétrisation n'a en général pas lieu en norme dans les espaces de Sobolev [11].

L'étude de la convergence des ensembles est aussi intéressante. Une conséquence immédiate de la proposition 3.4 est la convergence en mesure des ensembles.

Corollaire 3.17. *Soit $A \in D(S)$ un ensemble de mesure finie. Sous les hypothèses de la proposition 3.4, la suite des symétrisations itérées A_n converge en mesure vers A :*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^N(A \,\Delta\, A_n) = 0.$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 3.4 à la fonction $u = \chi_A$. □

Dans l'étude de la géométrie des ensembles, une distance importante est la distance de Hausdorff :

$$d_H(A,B) = \max(\sup_{x\in A}\inf_{y\in B} d(x,y), \inf_{y\in B}\sup_{x\in A} d(x,y)).$$

L'espace des compacts non vides de $\mathbb{R}^N$ muni de d_H est un espace métrique complet. Mais nous avons défini nos transformations de manière à toujours avoir comme résultat des ensembles ouverts. Or il est assez facile de montrer l'ensemble des ouverts d'un espace métrique (X,d) muni de la distance de Hausdorff n'est pas un espace métrique. En effet, si U est un ouvert et $x \in U$, alors $d_H(U, U \setminus \{x\}) = 0$. De plus, il n'est pas complet s'il existe un point $x \in X$ tel que $\{x\}$ n'est pas ouvert. En effet toute suite de boules de rayon tendant vers 0 centrée en x est une suite de Cauchy. La limite ne peut être l'ensemble vide, et ne peut contenir que x, c'est donc $\{x\}$, qui n'est pas un ouvert. Nous pouvons toutefois obtenir un résultat de semi-convergence en distance de Hausdorff.

Proposition 3.18. *Supposons qu'on ait une suite d'ensembles mesurables $G_n \subset \mathbb{R}^N$ et un ensemble ouvert, non vide et borné G. Si*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^N(G \setminus G_n) = 0,$$

alors

$$\lim_{n\to 0}\sup_{x\in G} d(x, G_n) = 0.$$

Remarque 3.19. Dan l'énoncé et la preuve de cette proposition, nous ne supposons pas que les G_n sont obtenus par symétrisations successives.

Démonstration. Soit la suite $x_n \in G^*$ tels que

$$d(x_n, G_n) \geqslant \frac{1}{2}\sup_{y\in G} d(y, G_n).$$

Puisque G est borné, toute sous-suite de la suite (x_n) contient une sous-suite convergente x_{n_k} pour laquelle il existe $x \in \bar{G}^*$ tel que $x_{n_k} \to x$. Vu que

$$G_n \cap B(x, d(x, G_n)) = \phi,$$

on a

$$0 = \lim_{n\to\infty} \mathcal{L}^N(G \setminus G_{n_k}) \geqslant \overline{\lim_{k\to\infty}}\, \mathcal{L}^N(B(x, d(x, G_{n_k})) \cap G).$$

Étant donné que G est un voisinage de x, on a nécessairement

$$\lim_{k\to\infty} d(x, G_{n_k}) = 0,$$

d'où

$$2 \varlimsup_{k\to\infty} \sup_{y\in G} d(y, G_{n_k}) \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} d(x_{n_k}, G_{n_k}) \leqslant \lim_{k\to\infty} d(x_{n_k}, x) + d(x, G_{n_k}) = 0.$$

La sous-suite choisie au départ étant quelconque, la proposition est démontrée. □

Les hypothèses que nous avons mises ne sont pas suffisantes pour entraîner la convergence en distance de Hausdorff : les G_n peuvent tous avoir un morceau qui reste loin de G.

Corollaire 3.20. *Soit G un ensemble ouvert. Soit*

$$\delta_G(t) = \sup_{x\in G} \langle t, x\rangle.$$

Alors, en utilisant les conventions du début de la section,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sup_{t\in\mathbb{R}^N} \frac{\delta_{G^*}(t) - \delta_{G_n}(t)}{|t|} \leqslant 0. \tag{3.1}$$

Remarque 3.21. Ce résultat peut aussi s'écrire

$$\delta_{G^*}(t) \leqslant \delta_{G_n}(t) + o(|t|), \quad n \to \infty,$$

nous avons ainsi une manière d'approximer par le haut $\delta_{G^*}(t)$. Cela permet de dériver certaines inégalités de symétrisation du type

$$\int_{\Omega^*} G_*(\nabla u^*(x))\, dx \leqslant \int_{\Omega} G(\nabla u(x))\, dx,$$

où G_* est une symétrisation duale (la transformée de Fenchel de la symétrisée de la transformée de Fenchel) [31].

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Par la proposition 3.18, il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geqslant k$ et $x \in G^*$, il existe $y \in G_n$ tel que $|x - y| \leqslant \varepsilon$. Ceci entraine que

$$\delta_{G^*}(t) = \sup_{x\in G^*} \langle t, x\rangle \leqslant \varepsilon\, |t| + \sup_{y\in G_n} \langle t, y\rangle = \varepsilon\, |t| + \delta_{G_n}(t),$$

ou encore

$$\frac{\delta_{G^*}(t) - \delta_{G_n}(t)}{|t|} \leqslant \varepsilon.$$

□

Remarque 3.22. Si on avait la convergence en distance de Hausdorff dans la proposition 3.18, on aurait le même résultat avec en valeur absolue dans le corollaire 3.20.

Remarque 3.23. Ce résultat s'étend aisément à la transformée de Fenchel d'une fonction prenant un nombre fini de valeurs [31].

Références

[1] R. A. Adams, *Sobolev spaces*, Pure and Applied Mathematics, vol. 65, Academic Press, New York-London, 1975.

[2] G. Alberti, *Some remarks about a notion of rearrangement*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 2, 457–472.

[3] A. Alvino, V. Ferone, G. Trombetti, and P.-L. Lions, *Convex symmetrization and applications*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **14** (1997), no. 2, 275–293.

[4] A. Baernstein, II, *A unified approach to symmetrization*, Partial equations of Elliptic Type (A. Alvino et al., eds.), Symposia Mathematica, no. 35, Cambridge University Press, 1995, pp. 47–49.

[5] C. Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1980.

[6] J. Bourgain, H. Brezis, and P. Mironescu, *Another look at Sobolev spaces*, Optimal Control and Partial Differential Equations. (A Volume in honour of A. Benssoussan's 60th birthday) (J. M. et al., ed.), IOS Press, Amsterdam, 2001, pp. 439–455.

[7] H. J. Brascamp, E. H. Lieb, and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 227–237.

[8] H. Brezis, *How to recognize constant functions. Connections with Sobolev spaces*, Russ. Math. Surv. **57** (2002), no. 4, 693–708.

[9] F. Brock and A. Y. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (1999), no. 4, 1759–1796.

[10] A. Burchard, *Cases of equality in the Riesz rearrangement inequality*, Ann. of Math. (2) **143** (1996), no. 3, 499–527.

[11] ———, *Steiner symmetrization is continuous in* $W^{1,p}$, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), no. 5, 823–860.

[12] G. Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1995), no. 3, 305–318.

[13] M. G. Crandall and L. Tartar, *Some relations between nonexpansive and order preserving mappings*, Proc. Amer. Math. Soc. **78** (1980), no. 3, 385–390.

[14] J. A. Crowe, J. A. Zweibel, and P. C. Rosenbloom, *Rearrangements of functions*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 432–438.

[15] J. Denzler, *Windows of given area with minimal heat diffusion*, Trans. Amer. Math. Soc. **351** (1999), no. 2, 569–580.

[16] W. F. Donoghue, Jr., *Distributions and Fourier transforms*, Pure and Applied Mathematics, vol. 32, Academic Press, New York-London, 1969.

[17] V. N. Dubinin, *Capacities and geometric transformations of subsets in n-space*, Geom. Funct. Anal. **3** (1993), no. 4, 342–369.

[18] R. J. Gardner, *The Brunn-Minkowski inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) **39** (2002), no. 3, 355–405.

[19] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[20] K. Hildén, *Symmetrization of functions in Sobolev spaces and the isoperimetric inequality*, Manuscripta Math. **18** (1976), no. 3, 215–235.

[21] B. Kawohl, *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1150, Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[22] E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, second ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[23] P. Mani-Levitska, *Random Steiner symmetrizations*, Studia Sci. Math. Hungar. **21** (1986), no. 3-4, 373–378.

[24] J. Mossimo, *Inégalités isopérimétriques et applications en physique*, Travaux en cours, Hermann, Paris, 1984.

[25] G. Pólya and G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[26] A. C. Ponce, *A new approach to Sobolev spaces and* Γ*-convergence*, Calc. Var. Partial Differential Equations, soumis.

[27] M. M. Rao and Z. D. Ren, *Theory of Orlicz spaces*, Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics, vol. 146, Marcel Dekker Inc., New York, 1991.

[28] J. Sarvas, *Symmetrization of condensers in* n*-space.*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I **522** (1972), 44 p.

[29] S. Secchi, D. Smets, and M. Willem, *Remarks on a sobolev-hardy inequality*, ARMA, ? ? ? ?

[30] G. Talenti, *Best constant in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **110** (1976), 353–372.

[31] J. Van Schaftingen, *Anisotropic cylindrical symmetrization*, en préparation.

[32] ———, *Universal approximation of symmetrizations by polarizations*, Proc. Amer. Math. Soc., Submitted.

[33] ———, *Réarrangements et problèmes elliptiques non linéaires*, Master's thesis, Université catholique de Louvain, 2002.

[34] J. Van Schaftingen and M. Willem, *Set transformations, symmetrizations and isoperimetric inequalities*, Lecture Notes in Math., Springer.

[35] M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.

Introduction

The first section of these lectures is devoted to an informal discussion of the notion of symmetrization (or rearrangement). The second section is devoted to an axiomatic treatment. Concrete instances of the theory are classical, but the level of generality is new and brings up some light on older results. The third section contains a new characterization of functions of bounded variation and of Sobolev functions, due to Bourgain, Brezis and Mironescu. We deduce the isoperimetric inequality and the Pólya-Szegö inequality from this characterization.

The original results of section 2 are due to the second author and are contained in his diploma thesis [18].

1 Symmetrizations

Since solutions of most differential equation can not be written down, qualitative properties of solutions help understanding them. Determining when the solutions inherits some symmetries of the equation and the domain, helps imagining solutions, and computing them numerically. In case solutions are minimizers of some functional, symmetric rearrangement consists in constructing, for any minimizer, a more symmetric one. The simplest setting is minimization on a class of real-valued positive measurable functions defined on $\mathbb{R}$.

Let $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $\mathscr{L}^N$ denote the N-dimensional Lebesgue measure, χ_A denote the characteristic function of set A and $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ denote the symmetric difference of A and B. Finite-measure subsets of $\mathbb{R}$ are said admissible sets; the symmetrization of admissible set $A \subset \mathbb{R}$ is

$$A^* = \left(-\frac{\mathscr{L}^1(A)}{2}, \frac{\mathscr{L}^1(A)}{2} \right).$$

Symmetrization of sets has the following properties: if A, B are admissible and $A \subseteq B$, then $A^* \subseteq B^*$ (monotonicity) and $\mathscr{L}^1(B \setminus A) = \mathscr{L}^1(B^* \setminus A^*)$ (preservation of measure). Since $\emptyset$ is admissible, $\mathscr{L}^1(B) = \mathscr{L}^1(B^*)$ for any admissible B. Furthermore, for any sequence (A_n) of sets with $\mathscr{L}^1(A \Delta A_n) \to 0$, $\mathscr{L}^1(A^* \Delta {A_n}^*) \to 0$ (continuity).

We extend then this construction to functions.

Notation 1.1. For $u : X \to \mathbb{R}$ and $c \in \bar{\mathbb{R}}$, the sublevel sets of u are

$$\{u > c\} = \{x \in X \mid u(x) > c\} \qquad \text{and} \qquad \{u \geq c\} = \{x \in X \mid u(x) \geq c\}.$$

A function u is admissible if, for any $c > \inf u$, $\mathscr{L}^1(\{u \geq c\}) < +\infty$. Its symmetric decreasing rearrangement is function $u^* : \mathbb{R} \to \bar{\mathbb{R}}$

$$u^*(x) = \sup \{c > \inf u \mid x \in \{u \geq c\}^*\}.$$

This is an extension in the sense that for any admissible set A, function χ_A is admissible and $\chi_{(A^*)} = (\chi_A)^*$. As shown in next section, it is a consequence of basic properties of symmetrization that u^* is a function whose sublevel sets are the symmetrization of corresponding sublevel sets of u up to a set of measure zero. The same properties also imply that symmetrization preserves integrals and brings functions closer with respect to p–norm:

$$\int_{\mathbb{R}} f(u^*(t))dt = \int_{\mathbb{R}} f(u(t))dt,$$
$$\int_{\mathbb{R}} |u^*(t)-v^*(t)|^p \leq \int_{\mathbb{R}} |u(t)-v(t)|^p\, dt.$$

Symmetrization also decreases the energy of functions in the following way

$$\int_{\mathbb{R}} \left|(u^*)'(t)\right|^p dt \leq \int_{\mathbb{R}} \left|u'(t)\right|^p dt.$$

Therefore, if functional, defined on $H^1(\mathbb{R})$,

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}} (\left|u'(t)\right|^2 + f(u(t)))dt$$

has a minimizer, it has a symmetric decreasing minimizer. Sharper symmetrization techniques prove all minimizers are symmetricaly decreasing around some point [11].

This construction has many extensions to spaces with higher dimension. Let us describe some of the most representative rearrangements in the variety and techniques (see [11, 16] for more complete lists).

The first generalization of intervals centered on 0 are open balls centered on 0. Any finite-measure $A \subset \mathbb{R}^N$ is admissible for the Schwarz symmetrization. Its symmetrization (also called symmetric decreasing rearrangement [13]) is

$$A^* = B\left(0, \left(\mathscr{L}^N(A)/\mathscr{L}^N(B(0,1))\right)^{1/N}\right).$$

Preservation of measure and monotonicity hold. Admissible function are defined as above. Schwarz symmetrized function are radial and radially decreasing ($|x| \leq |y|$ implies $u^*(x) \geq u^*(y)$). A similar symmetrization can be constructed on any connected Riemann manifold M, with some point $p \in M$ playing the role of 0 — in particular on the sphere and the hyperbolic sphere [2].

The Steiner symmetrization applies symmetric decreasing rearrangement on all straight lines parallel to the first vector in the canonical basis of $\mathbb{R}^N$. For $C \subset \mathbb{R}^N$ and $x'' \in \mathbb{R}^{N-1}$, let

$$C_{x''} = \left\{x_1 \in \mathbb{R} \mid (x_1, x'') \in C\right\}.$$

Set A is admissible if $A_{x''}$ has finite measure for all $x'' \in \mathbb{R}^{N-1}$. For any admissible set A, A^* is the unique set such that for all $x'' \in \mathbb{R}^N$,

$$(A^*)_{x''} = (A_{x''})^\star,$$

where $\star$ denotes the symmetrical rearrangement in $\mathbb{R}$. Symmetrized functions verify $u(x_1,x'') = u(-x_1,x'')$ and $u(x_1,x'') \geq u(y_1,x'')$ for $0 \leq x_1 \leq y_1$. This symmetrization is useful to prove functionals like

$$J(u) = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + F(u,x'')dx$$

have symmetric decreasing minimizers in the x_1 direction. Generalizations of this constructions are to be found in [16, 4].

If spherical coordinates are used on $\mathbb{R}^N$, spherical symmetrization performs Schwarz symmetrization on all spheres centered around the origin. For any set $B \subset \mathbb{R}^N$ and $r \geq 0$, the normalized intersection with the ball of radius r is denoted $B_r = \{e \in \partial B(0,1) \mid re \in B\}$. Set $A \subseteq \mathbb{R}^N$ is admissible if it is measurable. The spherical cap symmetrization of finite measure set A is the unique set A^* such that, for all $r \in \mathbb{R}_0^+$,

$$(A_r)^\star = (A^*)_r,$$

where $\star$ denotes the Schwarz symmetrization in $\partial B(0,1)$ around the first vector of the canonical basis $e_1 \in \partial B(0,1)$. Symmetrized functions depend on but two coordinates $r = |x|$ and $\phi \in [0,\pi]$ with $r\cos\phi = x_1$. They decrease for fixed r and increasing ϕ. It is used to show solutions of some problems keep axial symmetry while central symmetry is broken [19]. This transformation can be generalized to cylindrical geometries [16].

In some variational problems, monotonically decreasing functions are sought. The increasing rearrangements is adapted to such problems [5, 1]. Suppose $\Omega \subset \mathbb{R}^{N-1}$ has finite measure. $A \subset \mathbb{R}\times\Omega$ is admissible if $\mathscr{L}^N(A\,\Delta\,\mathbb{R}^+\times\Omega) < +\infty$ and its increasing rearrangement is

$$A^* = \left(\frac{\mathscr{L}^N((\mathbb{R}^+\times\Omega)\setminus A) - \mathscr{L}^N(A\setminus(\mathbb{R}^+\times\Omega))}{\mathscr{L}^{N-1}(\Omega)}, +\infty\right)\times\Omega.$$

Admissible functions are functions for which $\{u \geq c\}$ and $\{u > c\}$ are admissible for all $c \in (\inf u, \sup u)$. This is the monotone increasing rearrangement. Among admissible functions are positive functions bounded whose range is in $[0,1]$ of $(L^p(\mathbb{R}\times\Omega) + \chi_{\mathbb{R}^+\times\Omega})$. For this rearrangement, the condition $\mathscr{L}^N(A) = \mathscr{L}^N(A^*)$ has not much sense any more and is weaker then

$$\mathscr{L}^N(B\setminus A) = \mathscr{L}^N(B^*\setminus A^*).$$

The symmetric decreasing, Schwarz, Steiner and spherical cap symmetrization together with the monotone increasing rearrangement, have in common monotonicity, preservation of measure and continuity properties.

2 Set transformations

2.1 Monotone set transformations

The rearrangements defined above share many properties that we shall prove within an axiomatic treatment. Let us begin with a rather general definition of set transformation.

Definition 2.1. If X and X^* are sets and $\mathscr{S} \subset \wp(X)$, the mapping $S : \mathscr{S} \to \wp(X^*)$ is a set transformation, where $\wp(Y)$ denotes the set of subsets of set Y, with the condition that if $\emptyset \in \mathscr{S}$, then $S(\emptyset) = \emptyset$ and if $X \in \mathscr{S}$, then $X^* \in \mathscr{S}$. The elements of $\mathscr{S}$ are called admissible sets.

This transformation induces a function transformation.

Definition 2.2. If S is a set transformation from X to X^*, the *admissibility set* of $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ is the interior of set of admissible levels $\{c \in \mathbb{R} \mid \{u \geq c\} \in \mathscr{S} \text{ and } \{u > c\} \in \mathscr{S}\}$. It is denoted E_u. Function $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ is admissible for S if $(\inf u, \sup u) \subseteq E_u$.

Admissibility set indicates where it has sense to transform the function. For admissible functions, it determines on which part of the boundary of the image behavior of the transformed function can be predicted by the set transformation. For Schwarz, Steiner and spherical cap symmetrization, it will be $(\inf u, +\infty)$. For increasing rearrangement, $(\inf u, \sup u)$. In the first case, $\{u = \sup u\}$ will have a regular behavior but not in the latter.

Definition 2.3. For any admissible u, the induced closed (open) function transformations is $\bar{S}u$ ($\breve{S}u$), with

$$\bar{S}u(x) = \max(\sup\{c \in E_u \mid x \in S(\{u \geq c\})\}, \inf E_u),$$
$$\breve{S}u(x) = \max(\sup\{c \in E_u \mid x \in S(\{u > c\})\}, \inf E_u).$$

Note that if $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ is admissible, $a \in \mathbb{R}^+$ and $b \in \mathbb{R}$, then $au + b$ is admissible and $\bar{S}(au+b) = a\bar{S}u + b$. This is the strongest result towards linearity valid for all rearrangements. We can not state whether $S(\{u \geq c\}) = \{\bar{S}u \geq c\}$. The only statements we can make in that direction is that for any $c \geq \inf u$

$$S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\},$$

and

$$S(\{u > c\}) \subseteq \{\breve{S}u \geq c\},$$

We now introduce monotonicity.

Definition 2.4. Set transformation S is monotone if for any admissible sets $A, B \in \mathscr{S}$, $A \subseteq B$ implies

$$S(A) \subseteq S(B).$$

Proposition 2.5. *For any set transformation S, the following statements are equivalent:*

1. *S is monotone,*
2. *$\bar{S}$ is monotone (for any admissible functions $u \leq v$, $\bar{S}u \leq \bar{S}v$),*
3. *for any nondecreasing continuous function $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ and any admissible function $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$, $f \circ u$ is admissible and*
$$\bar{S}(f \circ u) = f \circ (\bar{S}u), \tag{2.1}$$
4. *$\bar{S}$ is a contraction for the uniform norm: for any admissible functions $u, v : X \to \bar{\mathbb{R}}$,*
$$\|\bar{S}u - \bar{S}v\|_\infty \leq \|u - v\|_\infty.$$

Any of these condition implies that for any admissible $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$

$$\bar{S}u = \breve{S}u \tag{2.2}$$

and, for any $c \in E_u$,

$$\{\breve{S}u > c\} \subseteq S(\{u > c\})$$

Remark 2.6. For a similar result on transformation of functions, see [6].

Proof. (1) $\iff$ (2) is evident. If (2) holds, then

$$\bar{S}u \leq \bar{S}(v + \|u - v\|_\infty) \leq \bar{S}v + \|u - v\|_\infty,$$

from which (4) holds. Conversely, for $A, B \in \mathscr{S}$, letting $u = 2\chi_A$ and $v = \chi_B$ in (4) leads to $S(A) \subseteq S(B)$.

If S is monotone and u admissible, then for any $\varepsilon > 0$,

$$\breve{S}u \leq \bar{S}u < \breve{S}u + \varepsilon.$$

Since ε is arbitrary, $\breve{S}u = \bar{S}u$. Furthermore, for any $c \in E_u$, $\{Su > c\} \subseteq S(\{u > c\})$.

Now we prove (3). Since f is nondecreasing and continuous, it has left- and right-continuous left inverses f^L and f^R. For any $d \in E_{f\circ u}$,

$$S(\{f \circ u \geq d\} = S(\{u \geq f^{-L}(d)\} \subseteq \{\bar{S}u \geq f^{-L}(d)\} = \{f \circ \bar{S}u \geq d\},$$

and

$$S(\{f \circ u > d\} = S(\{u > f^{-R}(d)\} \supseteq \{\bar{S}u > f^{-R}(d)\} = \{f \circ \bar{S}u > d\}.$$

This implies $\bar{S}(f \circ u) \leq f \circ \bar{S}u$ and $\breve{S}(f \circ u) \leq \breve{S}(f \circ u)$ from which (2.1) holds since (2.2). Conversely if $A, B \in \mathscr{S}$, $A \subseteq B$ and $f_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous nondecreasing function such that $f_c(t) = 0$ for $t \leq c$ and $f_c(t) = 1$ for $t \geq c+1$, then $\chi_{S(A)} = f_2 \circ S(\chi_A + \chi_B) \leq f_1 \circ S(\chi_A + \chi_B) = \chi_B$. That causes $S(A) \subseteq S(B)$. $\square$

2.2 Well-definiteness

When defining a mapping from a space of measurable functions to another, it is often important to know whether maps equivalence classes of functions equal almost everywhere (a.e.) to other equivalence classes. In particular its restriction to admissible functions of $L^p(X,\mu)$ to $L^p(X^*,\nu)$ is well-defined.

Definition 2.7. Set transformation S from (X,μ) to (X,ν) is well-defined if, for any $A \in \mathscr{S}$, A is μ-measurable and if $A, B \in \mathscr{S}$, $\mu(A \Delta B) = 0$, implies $\nu(S(A) \Delta S(B)) = 0$.

Proposition 2.8. *If S is a monotone well-defined set transformation, and if (X,μ) and (X^*,ν) are measure spaces, then, for any admissible functions $u, v : X \to \mathbb{R}$, with $u \leq v$ almost everywhere, $\bar{S}u \leq \bar{S}v$ almost everywhere.*

The proof involves Fubini theorem as is rather tedious. The monotonicity hypothesis is needed to ensure measurability of the set

$$\{(x,c) \in X^* \times (\operatorname{inf\,ess} u, \operatorname{sup\,ess} v) \mid x \in S(\{u \geq c\}) \setminus S(\{v \geq c\})\}.$$

Note that modified definitions of rearrangement, with an essential supremum replacing the supremum, do not allow to suppress the monotonicity hypothesis. In fact, it is possible to construct rearrangements that verify all hypotheses of the proposition except monotonicity and for which the conclusion is false with an essential supremum in the definition . Finally, if S is well-defined, then

$$\operatorname{sup\,ess}_{x\in X'} \left|\bar{S}u(x) - \bar{S}v(x)\right| \leq \operatorname{sup\,ess}_{x\in X} |u(x) - v(x)|.$$

2.3 Continuity

Rearrangements can intuitively be thought as acting on the sublevel sets of functions. But till now, we only know $S(\{u \geq c\}) \subseteq \{\bar{S}u \geq c\}$. The reverse inclusion does not hold unless S is a continuous set transformation, condition introduced by Sarvas [16].

Definition 2.9. Set transformation S from set X to measure space measure space (X^*,ν) is continuous if for any increasing sequence of $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$,$A_n \subseteq A_{n+1}$ with $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{S}$ then,

$$\nu\left(S\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \Delta \bigcup_{i\in\mathbb{N}} S(A_n)\right) = 0$$

and, for any decreasing sequence of admissible subsets (A_n) with $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ admissible,

$$\nu\left(S\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\Delta\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n)\right)=0.$$

Proposition 2.10. *If S is a monotone set transformation, the following properties are equivalent*

1. *S is continuous,*
2. *for any increasing (decreasing) sequence of admissible functions(u_n) converging towards and admissible function u, $\bar{S}u_n$ converges toward $\bar{S}u$,*
3. *for any $c\in\bar{\mathbb{R}}$ and u admissible function,*

$$S(\{u\geq c\})=\{\bar{S}u\geq c\}\quad\textit{and}\qquad S(\{u>c\})=\{\bar{S}u>c\},$$

4. *for any increasing function $f:\bar{\mathbb{R}}\to\bar{\mathbb{R}}$,*

$$f\circ\bar{S}u=\bar{S}(f\circ u)\quad\textit{almost everywhere},$$

furthermore, S is monotone.

Proof. (1) $\iff$ (2) is trivial. Suppose (1) holds. One has, up to sets of ν–measure zero

$$S(\{u\geq c\})\subseteq\{\bar{S}u\geq c\}\subseteq\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(\{u\geq c-1/n\}=S(\{u\geq c\}).$$

The proof is similar for $S\{u>c\}$.

From (3), S is monotone (for $A,B\in\mathscr{S}$, $A\subseteq B$, let $u=\chi_A+\chi_B$). Since f is non-decreasing, for any $d\in\bar{\mathbb{R}}$, $f^{-1}((d,+\infty])=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}[c_n,+\infty]$ for some nonincreasing sequence c_n. Then, up to a set of ν–measure zero

$$\{f\circ\bar{S}u\geq d\}=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{\bar{S}u\geq c_n\}=S(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{u\geq c_n\}).$$

and, from monotonicity, still up to a set of ν–measure zero,

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} S(\{u\geq c_n\})\subseteq S(\bigcup_{n\in\mathbb{N}}\{u\geq c_n\})=S(\{f\circ u\geq d\})=\{\bar{S}(f\circ u)\geq d\}.$$

From lemma 2.11 below, this implies $\bar{S}(f\circ u)=f\circ\bar{S}u$ a.e.

Finally, if (4) is verified, for any decreasing sequence of sets $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset\mathscr{S}$ with $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n=A$, let

$$u(x)=\sup\{-1/n\mid x\in A_n\}$$

and $f=\chi_{[0,+\infty]}$. Then, ν-almost everywhere,

$$\chi_{S(A)}=\bar{S}\chi_A=S(f\circ u)=f\circ\bar{S}u=\chi_{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} S(A_n)}$$

The proof is similar for increasing sequences of sets. ☐

Lemma 2.11. *If X,μ is a measure space and if u,v are two functions such that for any $c\in\bar{\mathbb{R}}$, $\mu(\{u\geq c\}\Delta\{v\geq c\})=0$, then $u=v$ μ-a.e.*

Proof. Suppose $u \neq v$. Without loss of generality $u < v$ on some positive-measure set. Then there exist $\varepsilon > 0$ such that $\mu(\{u + \varepsilon < v\}) > 0$. Since righthand side in

$$\{u + \varepsilon < v\} \subseteq \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} (\{v \geq n\varepsilon\} \setminus \{u \geq n\varepsilon\}).$$

has zero μ-measure, we obtain a contradiction. □

Continuity gives thus all the properties rearrangements should intuitively have. We can not construct nontrivial symmetrizations that have those for the cardinality measure. In fact, any strictly decreasing sequence of balls centered on 0 gives a counterexample for the Schwarz symmetrization. Luckily, the Lebesgue measure gives in the a.e. sense all properties we would like.

Commutation relations of the form $\bar{S}(f \circ u) = f \circ \bar{S}u$ allow many integrals of the form $\int_X f(u)$ to remain invariant. It can be asked wether it constructing a function transformation from a set transformation is not too restrictive. Next proposition answers the question.

Proposition 2.12. *Let X and X^* be sets and T a mapping from a set $D(T)$ of functions $u : X \to \bar{\mathbb{R}}$ to functions $Tu : X^* \to \bar{\mathbb{R}}$. If for any $u \in D(T)$ and $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ nondecreasing, $f \circ u \in D(T)$ and $T(f \circ u) = f \circ Tu$, then there exists a set transformation S such that for any $u \in D(T)$, u is admissible for $\bar{S}$ and $\bar{S}u = Tu$.*

Proof. Choose for $\mathscr{S}$ the sets $A \subset X$ such that $\chi_A \in D(T)$ and define $\chi_{S(A)} = T\chi_A$. The function transformation $\bar{S}$ is an extension of T with the desired properties. □

2.4 Rearrangements

Definition of rearrangements introduces measure in a more quantitative way. Classically, a rearrangement has been defined as monotone and measure preserving transformations [4]. Since we wish to embrace infinite-measure sets like the increasing rearrangement, preservation of measure must be replaced by preservation of measure of difference of sets.

Definition 2.13. A rearrangement is a set transformation S from measure space (X, μ) to measure space (X^*, ν) such that

1. for any $A, B \in \mathscr{S}$ with $A \subseteq B$, $S(A) \subseteq S(B)$ and $\nu(S(B) \setminus S(A)) = \mu(A \setminus B) < +\infty$,
2. for $A, B \in \mathscr{S}$, $A \cap B \in \mathscr{S}$ and $A \cup B \in \mathscr{S}$.

Any rearrangement is a monotone, continuous and well-defined set transformation. For any admissible sets, $\nu(S(A) \Delta S(B)) \leq \mu(A \Delta B)$. Furthermore,

$$\nu(S(B) \setminus S(A)) \leq \nu(S(B) \setminus S(A \cap B)) = \mu(B \setminus A).$$

Rearrangements preserve a broad class of integrals.

Proposition 2.14. *Is S is a rearrangement, and $f : \bar{\mathbb{R}} \to \bar{\mathbb{R}}$ is a nonnegative borelian function f, then, for any admissible function u such that $f|_{\bar{\mathbb{R}} \setminus E_u} = 0$,*

$$\int_X f(u) d\mu = \int_{X^*} f(Su) d\nu,$$

where both sides may be $+\infty$.

The restriction to function that vanish outside E_u comes from the fact that rearrangements of sublevel sets outside E_u is not well defined.

If S is Schwarz, Steiner or spherical cap symmetrization and u is a nonnegative function, $E_u = (0, +\infty)$ and function $f : t \mapsto t^p$ satisfies the hypotheses, and we have thus $\|u\|_p = \|\bar{S}u\|_p$. This means if u is admissible and nonnegative, $u \in L^p(X)$ iff $\bar{S}u \in L^p(X^*)$.

Proof. Equality is valid if f is the characteristic function of some interval $I \subset E_u$ such that $\bar{I} \subset E_u$

$$\int_X \chi_I \circ u d\mu = \mu(\{u(x) \in I\}) = \nu(\{\bar{S}u(x) \in I\}) = \int_X \chi_I \circ \bar{S}u d\nu.$$

It holds thus for any characteristic function of Borel set whose support lies in E_u. Let

$$f_n(t) = \begin{cases} \sup\left\{\frac{k}{2^n} \mid f(t) \geq \frac{k}{2^n} \text{ and } k \in \mathbb{N}\right\} & \text{if } (x - 2^{-n}, x + 2^{-n}) \subseteq E_u, \\ 0 & \text{else.} \end{cases}$$

The support of functions f_n lies in E_u and the f_n are Borel functions. One has

$$\int_X f_n(u) d\mu = \int_{X^*} f_n(Su) d\nu.$$

Since E_u is open by definition, $\lim_{n\to\infty} f_n(t) = f(t)$ for all $t \in \mathbb{R}$ and the result follows by monotone convergence theorem. $\square$

Now we would like to examine inequalities involving two functions of the form:

$$\int_X F(u,v) d\mu \leq \int_{X^*} F(Su, Sv) d\nu.$$

The simplest nontrivial rearrangement is defined on $X = \{1,2\}$ and maps sets $\{1\}$ and $\{2\}$ on $\{1\}$. If function F verifies inequality (2.4) for all admissible u and v, then, for any $a \leq b$, and $c \leq d$,

$$F(a,c) + F(b,d) \geq F(a,d) + F(b,c). \tag{2.3}$$

Such functions define a positive Radon measure in the following way. (For a proof, see [20]).

Lemma 2.15. *If $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is continuous and verifies condition* (2.3)*, there exist a unique positive Radon measure such that*

$$F(a,c) + F(b,d) - F(a,d) - F(b,c) = \int_{(a,b)\times(c,d)} d\phi.$$

Proposition 2.16. *If S is a rearrangement, if (X,μ) and (X^*,ν) are σ-finite and $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*

1. *symmetric ($F(s,t) = F(t,s)$),*
2. *continuous,*
3. *verifies* (2.3) *for any $a \leq b$ and $c \leq d$,*

then, for any admissible functions u, v such that

1. *$F(u,u)$ and $F(v,v)$ are summable,*

2. *$F(\cdot,\cdot)|_{\bar{\mathbb{R}}\setminus E_u \cap E_v} = 0$,*

3. *$D = [\inf u, \sup u] \cup [\inf v, \sup v] \subset E_u \cap E_v$ (u and v are admissible with respect to each other; that allows comparing u and v),*

then

$$\int_X F(u,v) d\mu \le \int_{X^*} F(Su,Sv) d\nu.$$

When rearrangement are restricted to finite measure, the proposition is proved without the symmetry assumption [7]. Furthermore, condition (2.3) is necessary if there exist $A, B \in \mathscr{S}$ such that $\mu(A \Delta B) = 0$, $S(A) = S(B)$ and $\mu(A) < +\infty$. (This was noted for a particular rearrangement in [14].)

First application is when J is a convex function such that $J(t) = J(-t)$, $J(0) = 0$, then $J(s-t)$ verifies the hypotheses of the proposition for any admissible functions u, v. Thus,

$$\|\bar{S}u - \bar{S}v\|_p \le \|u - v\|_p.$$

Another application is the Hardy-Littlewood inequality [9]: if $\emptyset \in \mathscr{S}$ is admissible and u and v are square-integrable,

$$\int_X uv d\mu \le \int_{X^*} \bar{S}u\bar{S}v d\nu.$$

Proof. Since $F(u,u)$ and $F(v,v)$ are summable, it is equivalent to prove the inequality for function $\tilde{F}(s,t) = F(s,t) - \frac{1}{2}F(s,s) - \frac{1}{2}F(t,t)$. For any s, t,

$$2F(s,t) = -\int_{[\min(s,t),\max(s,t)]^2} d\phi.$$

Thus, for any $x \in X$,

$$\begin{aligned} 2F(u(x),v(x)) &= -\int_{(\min(u(x),v(x)),\max(u(x),v(x)))^2} d\phi \\ &= \int_{\sigma \ge \tau \in D^2} \chi_{\{u>\sigma\}\setminus\{v\ge\tau\}} + \chi_{\{v>\sigma\}\setminus\{u\ge\tau\}} d\phi. \end{aligned}$$

and

$$2\int_X F(u,v)\, d\mu = -\int_X \int_{\sigma \ge \tau \in D^2} \chi_{\{u>\sigma\}\setminus\{v\ge\tau\}} + \chi_{\{v>\sigma\}\setminus\{u\ge\tau\}} d\phi d\mu,$$

where $D = E_u \cap E_v$. Since $F(u,v)$ is nonpositive, Fubini theorem applies and

$$2\int_X F(u,v)\, d\mu = -\int_{\sigma \ge \tau \in D^2} \mu(\{u \ge \sigma\} \setminus \{v > \tau\}) + \mu(\{v \ge \sigma\} \setminus \{u > \tau\}) d\phi.$$

Inequality follows from this identity and the integration of inequality,

$$\mu(\{u \ge \sigma\} \setminus \{v \ge \tau\}) \ge \mu(\{Su \ge \sigma\} \setminus \{Sv \ge \tau\}).$$ □

3 Characterization of Sobolev spaces

This section contains a recent characterization of the Sobolev spaces $W^{1,p}$, $1 < p < +\infty$, and the space BV of functions of bounded variation. This characterization is due to Bourgain, Brezis, and Mironescu (see [3] and []). We consider a sequence of radial mollifiers

$$\rho_n \geq 0, \quad \int_0^\infty \rho_n(r)\, r^{N-1}\, dr = 1, \quad \lim_{n\to\infty}\int_\delta^\infty \rho_n(r)\, r^{N-1}\, dr = 0, \quad \text{for all } \delta > 0.$$

For every $f \in \mathbb{R}^N$, we have

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left| g \cdot \tfrac{h}{|h|} \right|^p \rho_n(|h|)\, dh = \int_{S^{N-1}} |g\cdot\sigma|\, d\sigma \int_0^\infty \rho_n(r)\, r^{N-1}\, dr = K_{p,N}\, |g|^p,$$

where

$$K_{p,N} = \int_{S^{N-1}} |e\cdot\sigma|^p\, d\sigma, \quad e \in S^{N-1}.$$

Let us recall that the total variation of $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ is defined by

$$\|Du\|_{BV} = \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^N} u \operatorname{div} v : v \in \mathscr{D}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N), \sum_{k=1}^N v_k(x)^2 \leq 1 \right\}.$$

Theorem 3.1. *Let $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. If*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy < +\infty,$$

then $u \in BV(\mathbb{R}^N)$. If $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, then

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy = K_{1,N} \|Du\|_{BV}. \tag{3.1}$$

Theorem 3.2. *Let $1 < p < +\infty$ and $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. If*

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy < +\infty,$$

then $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. If $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, then

$$\liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy = K_{p,N} \|\nabla u\|_p^p. \tag{3.2}$$

Remark 3.3. The above results are due to Bourgain, Brezis and Mironescu, except formula (3.1) wich is due to Davila [8].

Remark 3.4. Using some arguments from [**?**] and [8], we give simple proofs. In particular, the proof of formula (3.1) is elementary.

Remark 3.5. We shall deduce from theorem 3.1 the isoperimetric inequality and from theorem 3.2 the Pólya-Szegö inequality.

Remark 3.6. The integral of a nonnegative measurable function may be infinite.

Lemma 3.7. *Let $1 \le p < +\infty$, $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, and let γ_k be a sequence of mollifiers. Then $u_k = \gamma_k * u$ is such that*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_k(y)-u_k(x)|^p}{|y-x|^p}\,\rho_n(|y-x|)\,dx\,dy \le \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|y-x|^p}\,\rho_n(|y-x|)\,dx\,dy.$$

Proof. We deduce from Jensen's inequality

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_k(y)-u_k(x)|^p}{|y-x|^p}\,\rho_n(|y-x|)\,dx\,dy \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\rho_n(|y-x|)}{|y-x|^p}\,dx\,dy \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_k(y-z)-u_k(x-z)|\,\gamma_k(z)\,dz\right)^p \\
&\qquad \le \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{\rho_n(|y-x|)}{|y-x|^p}\,dx\,dy \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u_k(y-z)-u_k(x-z)|^p\,\gamma_k(z)\,dz\right) \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^N} \gamma_k(z)\,dz \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y-z)-u(x-z)|^p}{|y-x|^p}\,\rho_n(|y-x|)\,dx \\
&\qquad = \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y-z)-u(x-z)|^p}{|y-x|^p}\,\rho_n(|y-x|)\,dx\,dy. \qquad \square
\end{aligned}$$

Lemma 3.8. *Let $1 \le p < \infty$ and $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap C^1(\mathbb{R}^N)$. Then*

$$K_{p,N}\|\nabla u\|_p^p \le \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p}\rho_n(|x-y|)\,dx\,dy.$$

Proof. Let $\varepsilon > 0$ and let K be a compact subset of $\mathbb{R}^N$. There exists $\delta > 0$ such that for $x \in K$ and $|h| < \delta$ we have

$$|u(x+h) - u(x) - \nabla u(x)\cdot h| \le \varepsilon\,|h|\,.$$

By convexity, we obtain, for $0 < \lambda < 1$,

$$|\nabla u(x)\cdot h|^p \le (1-\lambda)^{1-p}\,|u(x+h)-u(x)|^p + \lambda^{1-p}\varepsilon^p\,|h|^p\,.$$

It follows that

$$\begin{aligned}
K_{p,N}\int_K |\nabla u(x)|^p\,dx &= \int_K dx \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u(x)\cdot \tfrac{h}{|h|}\right|^p \rho_n(|h|)\,dh \\
&\le (1-\lambda)^{1-p}\int_K dx \int_{|h|<\delta} \frac{|u(x+h)-u(x)|^p}{|h|^p}\rho_n(|h|)\,dh \\
&\qquad + \lambda^{1-p}\varepsilon^p\,|K| + M^p\,|K| \int_\delta^\infty \rho_n(r) r^{N-1}\,dr,
\end{aligned}$$

where $M = \max_K |\nabla u|$. We have, since $\varepsilon > 0$ is arbitrary,

$$K_{p,N}\int_K |\nabla u(x)|^p\,dx \le (1-\lambda)^{1-p} \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p}\rho_n(|x-y|)\,dx\,dy.$$

Passing to the limit as $\lambda \to 0$, it is easy to conclude. $\square$

Lemma 3.9. *Let $1 \le p < +\infty$ and $u \in W^{1,p} \cap C^1(\mathbb{R}^N)$. Then, for any n,*

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p}\rho_n(|x-y|)\,dx\,dy \le K_{p,N}\|\nabla u\|_p^p.$$

Proof. Let $R > 0$ and let K be a compact subset of $\mathbb{R}^N$. We have, by Jensen inequality.,

$$\begin{aligned}
\int_K dx \int_{|h|<R} \frac{|u(x+h)-u(x)|^p}{|h|^p} \rho_n(|h|)\,dh \\
&\le \int_K dx \int_{|h|<R} \rho_n(|h|)\,dh \left[\int_0^1 \left|\nabla u(x+th)\cdot \tfrac{h}{|h|}\right| dt\right]^p \\
&\le \int_K dx \int_{|h|<R} \rho_n(|h|)\,dh \int_0^1 \left|\nabla u(x+th)\cdot \tfrac{h}{|h|}\right|^p dt \\
&\le \int_{|h|<R} \rho_n(|h|)\,dh \int_{K_R} \left|\nabla u(y)\cdot \tfrac{h}{|h|}\right|^p dy \\
&\le \int_{\mathbb{R}^N} dy \int_{\mathbb{R}^N} \left|\nabla u(y)\cdot \tfrac{h}{|h|}\right|^p \rho_n(|h|)\,dh = K_{p,N} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p\,dy.
\end{aligned}$$

Since R and K are arbitrary, the proof is complete. □

Proof of theorem 3.1. Let $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ and definie $u_k = \gamma_k * u$, where (γ_k) is a sequence of smooth mollifiers. If

$$c = \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy < +\infty,$$

we deduce from lemmas 3.7 and 3.8 that $K_{1,N}\|\nabla u_k\|_1 \le c$, so that (u_k) is bounded in $W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$, $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, $\lim_{k\to\infty}\|\nabla u_k\|_1 = \|Du\|_{BV}$ and $K_{1,N}\|Du\|_{BV} \le c$.

By Fatou's lemma and lemma 3.9, we have

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|}{|x-y|} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy \\
&\le \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_k(y)-u_k(x)|^p}{|x-y|^p} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy \\
&\le K_{1,N} \lim_{k\to\infty} \|\nabla u_k\|_1 = K_{1,N}\,|Du|_{BV}. \quad \square
\end{aligned}$$

The proof of theorem 3.2 is similar and is left to the reader.

4 Isoperimetric and Pólya-Szegö inequalities

Notation 4.1. For $x \in \mathbb{R}^N$ and a closed affine halfspace $H \subseteq \mathbb{R}^N$, x_H is the reflection of x with respect to ∂H.

Definition 4.2. The *polarization* of function $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ with respect to the closed affine subspace H is the function $u^H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, with

$$u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(x_H)\} & \text{if } x \in H, \\ \min\{u(x), u(x_H)\} & \text{if } x \notin H. \end{cases}$$

Proposition 4.3. *If $*$ is the Schwarz, Steiner, or spherical cap symmetrization, then there exist a sequence of halfspaces (H_n) such that for all $1 \le p < +\infty$, and $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ the sequence*

$$u_n = u^{H_1 H_2 \cdots H_n},$$

converges towards u^* in $L^p(\mathbb{R}^N)$ as $n \to \infty$.

For proofs see [**?**, **?**, 17]. In the first two references, the sequence H_n depends on u and p.

Proposition 4.4. *If H is a closed affine halfspace of $\mathbb{R}^N$, and $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ is a borelian function such that for $a \leq b$, $c \leq d$,*

$$F(a,c) + F(b,d) \leq F(a,d) + F(b,c),$$

then, for any measurable u, v

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} F(u(x), v(y))\, w(|x-y|)\, dx\, dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} F(u^H(x), v^H(y))\, w(|x-y|)\, dx\, dy$$

provided left side is not $-\infty$ or right side is not $+\infty$.

Proof. From definition of polarization and hypothesis on F, for all $x, y \in H$

$$F\big(u(x), v(y)\big) + F\big(u(x_H), v(y_H)\big) \leq F\left(u^H(x), v^H(y)\right) + F\left(u^H(x_H), v^H(y_H)\right).$$

Since $|x-y| = |x_H - y_H| \leq |x - y_H| = |x_H - y|$ and w is nonincreasing,

$$w(|x-y|) = w(|x_H - y_H|) \geq w(|x - y_H|) = w(|x_H - y|).$$

Whence

$$\begin{aligned}
&F\big(u(x), v(y)\big) w\big(|x-y|\big) + F\big(u(x_H), v(y)\big) w\big(|x_H - y|\big) \\
&\quad + F\big(u(x), v(y_H)\big) w\big(|x - y_H|\big) + F\big(u(x_H), v(y_H)\big) w\big(|x_H - y_H|\big) \\
&= w(|x_H - y|)\big(F(u(x), v(y)) + F(u(x_H), v(y)) \\
&\quad + F(u(x), v(y_H)) + F(u(x_H), v(y_H))\big) \\
&\qquad + \big(w(|x-y|) - w(|x_H - y|\big)\big(F(u(x), v(y)) + F(u(x_H), v(y_H))\big) \\
&\leq w\big(|x_H - y|\big)\big(F(u^H(x), v^H(y)) + F(u^H(x_H), v^H(y)) \\
&\quad + F(u^H(x), v^H(y_H)) + F(u^H(x_H), v^H(y_H))\big) \\
&\qquad + \big(w(|x-y|) - w(|x_H - y|)\big)\big(F(u^H(x), v^H(y)) + F(u^H(x_H), v^H(y_H))\big) \\
&= F\big(u^H(x), v^H(y)\big) w(|x-y|) + F\big(u^H(x_H), v^H(y)\big) w(|x_H - y|) \\
&\quad + F\big(u^H(x), v^H(y_H)\big) w(|x - y_H|) + F\big(u^H(x_H), v^H(y_H)\big) w(|x_H - y_H|).
\end{aligned}$$

Integrating on $H \times H$ gives the integral inequality . □

Theorem 4.5. *If F is a nonpositive continuous function such that for $a \leq b$, $c \leq d$,*

$$F(a,c) + F(b,d) \leq F(a,d) + F(b,c),$$

$w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ is nonincreasing, then for all $u, v \in L^p(\mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} F(u(x), v(y))\, w(|x-y|)\, dx\, dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} F(u^*(x), v^*(y))\, w(|x-y|)\, dx\, dy.$$

Proof. Let u_m the sequence given by polarizations of proposition 4.3. Function $w : r \mapsto \rho_n(r)/r^{Np}$ is nonincreasing. Proposition 4.4 implies

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u_m(y) - u_m(x)|^p}{|x-y|^p}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y) - u(x)|^p}{|x-y|^p}\, \rho_n(|x-y|)\, dx\, dy.$$

Letting $m \to \infty$, Fatou's lemma implies

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^*(y)-u^*(x)|^p}{|x-y|^p} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy.$$

Conclusion follows from theorem 3.2. □

A generalization, due to Hilden [10], of the isoperimetric inequality follows directly from theorem 3.1. We denote by u^* the Schwarz, Steiner or spherical cap symmetrization of u, $BV_+(\mathbb{R}^N)$ (resp. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$) the space of nonnegative functions in $BV(\mathbb{R}^N)$ (resp. $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$).

Theorem 4.6. *If $u \in BV(\mathbb{R}^N)$, then $u^* \in BV_+(\mathbb{R}^N)$ and $\|Du^*\|_{BV} \leq \|Du\|_{BV}$.*

Similarly, the Pólya-Szegö inequality follows directly from theorem 3.2.

Theorem 4.7. *If $u \in W_+^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, $1 < p < +\infty$, then $u^* \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ and*

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p.$$

Proof of theorem 4.6. Let ρ_n be a sequence of nonincreasing radial mollifiers. By theorem **??**, we have

$$\int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u^*(y)-u^*(x)|^p}{|x-y|^p} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^{2N}} \frac{|u(y)-u(x)|^p}{|x-y|^p} \rho_n(|x-y|)\,dx\,dy.$$

It suffices then to use theorem 3.1. □

The proof of theorem 4.7 is similar.

References

[1] Giovanni Alberti. Some remarks about a notion of rearrangement. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 29(2):457–472, 2000.

[2] Albert Baernstein, II. A unified approach to symmetrization. In A. Alvino et al., editor, *Partial equations of Elliptic Type*, number 35 in Symposia Mathematica, pages 47–49. Cambridge University Press, 1995.

[3] Jean Bourgain, Haïm Brezis, and Petru Mironescu. Another look at Sobolev spaces. In J.L. Menaldi, E. Rofman, and A. Sulem, editors, *Optimal Control and Partial Differential Equations*, pages 439–455. IOS Press, 2001. a volume in honor of A. Bessouans's 60th birthday.

[4] Friedman Brock and Alexander Yu. Solynin. An approach to symmetrization via polarization. *Transactions of the American Mathematical Society*, 352(4):1759–1796, 1999.

[5] Gilles Carbou. Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 12(3):305–318, 1995.

[6] Michael G. Crandall and Luc Tartar. Some relations between nonexpansive and order preserving mappings. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 78(3):385–390, 1980.

[7] J. A. Crowe, J. A. Zweibel, and P. C. Rosenbloom. Rearrangements of functions. *J. Funct. Anal.*, 66:432–438, 1986.

[8] J. Dávila. On an open question about functions of bounded variation. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 15(4):519–527, 2002.

[9] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya. *Inequalities*. Cambridge University Press, Cambridge, 1934.

[10] Keijo Hildén. Symmetrization of functions in Sobolev spaces and the isoperimetric inequality. *Manuscripta Math.*, 18(3):215–235, 1976.

[11] Bernhard Kawohl. *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, volume 1150 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.

[12] Elliott H. Lieb. Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation. *Studies in Appl. Math.*, 57(2):93–105, 1976/77.

[13] Elliott H. Lieb and Michael Loss. *Analysis*, volume 14 of *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edition, 2001.

[14] G. G. Lorentz. An inequality for rearrangements. *Amer. Math. Monthly*, 60:176–179, 1953.

[15] G. Pólya and G. Szegö. *Isoperimetric Inequalities in Mathematical Physics*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1951.

[16] Jukka Sarvas. Symmetrization of condensers in n-space. *Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I*, 522:44 p., 1972.

[17] Jean Van Schaftingen. Universal approximation of symmetrizations by polarizations. *Proc. Amer. Math. Soc.* Submitted.

[18] Jean Van Schaftingen. Réarrangements et problèmes elliptiques non linéaires. Travail de fin d'études, Université catholique de Louvain, 2002.

[19] Didier Smets, Michel Willem, and Jiabao Su. Non-radial ground states for the Hénon equation. *Commun. Contemp. Math.*, 4(3):467–480, 2002.

[20] Michel Willem. *Analyse fonctionnelle élémentaire*. Cassini. to appear.

PROCEEDINGS OF THE
AMERICAN MATHEMATICAL SOCIETY
Volume 00, Number 0, Pages 000–000
S 0002-9939(XX)0000-0

UNIVERSAL APPROXIMATION OF SYMMETRIZATIONS BY POLARIZATIONS

JEAN VAN SCHAFTINGEN

(Communicated by David S. Tartakoff)

Abstract. Any symmetrization (Schwarz, Steiner, cap or increasing rearrangement) can be approximated by a universal sequence of polarizations which converges in L^p norm for any admissible function in L^p for $1 \le p < +\infty$ and uniformly for admissible continuous functions. A new Pólya-Szegö inequality is proved for the increasing rearrangement.

1. Introduction

A symmetrization $*$ (or rearrangement) maps any function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ to a more symmetrical function $u^* : \Omega^* \to \mathbb{R}$. Under some technical assumptions, it has the following properties:

$$\int_\Omega f(u)\, dx = \int_{\Omega^*} f(u^*)\, dx, \tag{C}$$

$$\int_{\Omega^*} |u^* - v^*|^p\, dx \le \int_\Omega |u - v|^p\, dx, \tag{HL}$$

$$\int_\Omega |\nabla u|^p\, dx \le \int_{\Omega^*} |\nabla u^*|^p\, dx. \tag{PS}$$

Rearrangements are used to prove the symmetry and the existence of solutions of some variational problems.

The symmetrization is defined for sets before being extended to to functions. The inequalities (C) and (HL) are straightforward consequences of the preservation of the inclusions and of the measure of sets by the rearrangement of sets. Pólya-Szegö's inequality (PS) involves the gradient, and a proof that uses directly the definition form rearrangement of sets relies on an isoperimetric inequality for sets and on the coarea formula. The inequality (PS) can also be proved by approximation by polarizations, as Brock and Solynin did [5] and as we do in corollary 6.3. Lieb and Loss [9] and Baernstein [3] deduced it from Riesz-like inequalities that they obtained by approximation.

The first approximation of symmetrizations by simpler symmetrizations appeared in the proof of the classical isoperimetric theorem. A well-chosen sequence of Steiner symmetrization of a convex body converges with respect to the Hausdorff distance to a ball of the same volume. Mani-Levitska proved that random sequences of Steiner symmetrizations converge [10]. Brascamp, Lieb and Luttinger

2000 *Mathematics Subject Classification.* 26D10 (28D05,46E30).

The author is research fellow of the Fonds National de la Recherche Scientifique (Belgium).

approximated in measure the Schwarz symmetrization of sets by lower order symmetrizations in order to prove a generalized Riesz rearrangement inequality [4, 9]. Sarvas approximated the symmetrization of sets by spherical cap and Steiner symmetrizations [12], while Baernstein [3], Brock and Solynin used polarizations [5]. This result was extended to the cap symmetrization by Smets and Willem [13].

For all the methods of approximations of symmetrizations by polarizations cited above, the sequence of polarizations depends of the function that has to be symmetrized. Our main result (theorem 4.4) is that there exists a sequence that does not depend on the function nor on the function space, and that the increasing rearrangement can also be approximated by polarizations. This symmetrization coincides in the one-dimensional case, with the rearrangement introduced by Carbou [6] and studied by Alberti [1]. The increasing rearrangement inequalities allow to prove the existence of solutions of variational problems that increase in some direction. Badiale obtained with the moving plane method similar results concerning the monotonicity of solutions to some elliptic systems [2].

By the same method, we prove that cap and Steiner symmetrizations approximate higher order Steiner and cap symmetrization. The approximating symmetrizations can be of any order, but they must be compatible with the symmetrization that they approximate.

The definitions and basic properties of symmetrizations (section 2) and of polarizations (section 3) are recalled. Section 4 is devoted to the proof of the main result. Finally the method is briefly extended to approximation by symmetrization (section 5) and a Pólya-Szegö inequality is proven (section 6).

2. Symmetrizations

Lebesgue's outer on $\mathbb{R}^N$ is denoted $\mathcal{L}^N$, Hausdorff's k-dimensional outer measure on $\mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}^k$, the scalar product between x and y, $x \cdot y$, and the Euclidean norm $|x| = \sqrt{x \cdot x}$. If $x \in \mathbb{R}^N$, $0 \le r \le +\infty$, then

$$B(p, r) = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid |x - p| < r \right\}.$$

The characteristic function of a set A is denoted χ_A, and the symmetric difference of the sets A and B is denoted $A \,\Delta\, B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Definition 2.1. If T is a proper affine subspace of $\mathbb{R}^N$, the *Steiner symmetrization* of a set $A \subset \mathbb{R}^N$ with respect to T is the unique set A^T for which the following holds: for any $p \in T$, if L is the maximal affine subspace orthogonal to T that contains p, then

$$A^T \cap L = B(p, r) \cap L,$$

where r is defined such that $\mathcal{H}^{N-\dim T}(B(p, r) \cap L) = \mathcal{H}^{N-\dim T}(A \cap L)$.

Remark 2.2. The Schwarz symmetrization with respect to $p \in \mathbb{R}^N$ is the Steiner symmetrization with respect to $\{p\}$, it is also sometimes the Steiner symmetrization with respect to a straight line [9, 11].

Definition 2.3. A set $S \subset \mathbb{R}^N$ is a *closed half affine subspace:* of $\mathbb{R}^N$ if it is a closed affine halfspace with respect to its affine span. The boundary of S with respect to its affine span is denoted ∂S and its dimension is $\dim S = \dim \partial S + 1$.

Definition 2.4. If S is a closed half affine subspace $\mathbb{R}^N$ and $0 < \dim S < N$, the *cap symmetrization* of a set A with respect to S is the unique set A^S for which the following holds: $A^S \cap \partial S = A \cap \partial S$ and, for any $q \in \partial S$ and any $s > 0$, if L is the maximal affine subspace orthogonal to ∂S that contains q, and p is the only point in the intersection $S \cap (L \cap \partial B(q, s))$, then

$$A^S \cap (L \cap \partial B(q, s)) = B(p, r) \cap (L \cap \partial B(q, s)),$$

where $0 \leq r \leq +\infty$ is defined by $\mathcal{H}^{N-\dim S}(B(p,r)\cap(L\cap\partial B(q,s))) = \mathcal{H}^{N-\dim S}(A\cap(L \cap \partial B(q, s)))$.

Definition 2.5. Let $A \subseteq \mathbb{R}^N$ and $v \in \mathbb{R}^N \cap \partial B(0, 1)$,

$$c_v(A) = \mathcal{H}^1(\{x \in A \mid v \cdot x > 0\}) - \mathcal{H}^1(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus A \mid v \cdot x \leq 0\})$$

if the formula has sense and $c_v(A) = -\infty$ else.

Definition 2.6. The increasing rearrangement of $A \subset \mathbb{R}^N$ with respect to $v \in \mathbb{R}^N \cap \partial B(0, 1)$ is the unique set $A^{(v,\infty)}$ such that for any $x \in \mathbb{R}^N$,

$$(x + v\mathbb{R}) \cap A^{(v,\infty)} = \{y \in (x + v\mathbb{R}) \mid v \cdot y > c_v(A \cap (x + v\mathbb{R}))\}.$$

In the sequel, $*$ denotes indifferently a Steiner or cap symmetrization, or an increasing rearrangement.

For any sets $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$,

$$A \subseteq B \implies A^* \subseteq B^*. \tag{2.1}$$

Proposition 2.7. *If $A \subset \mathbb{R}^N$ is measurable, then A^* is measurable.*

Proof. If $*$ is the increasing rearrangement with respect to $v \in \mathbb{R}^N \cap \partial B(0, 1)$, A^* can be written by definition as

$$A^* = \{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > c(A \cap (x + v\mathbb{R}))\}.$$

Fubini's theorem implies that the function $x \mapsto c_v(A \cap (x + v\mathbb{R}))$ is measurable. Hence A^* is measurable. The proof is similar for the Steiner and cap symmetrizations. □

Definition 2.8. A set A is admissible for a Steiner or cap symmetrization $*$ if A is measurable, and $\mathcal{L}^N(A) < +\infty$. If $*$ is the increasing rearrangement with respect to v, A is admissible if and only if

$$\mathcal{L}^N(A\,\Delta\,\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > 0\}) < \infty.$$

If $A \subset B \subset \mathbb{R}^N$ are admissible sets, then

$$\mathcal{L}^N(B^* \setminus A^*) = \mathcal{L}^N(B \setminus A). \tag{2.2}$$

When the sets A and B may have infinite measure, which is the case for the increasing rearrangement, the second condition is more restrictive than the preservation of the measure of sets ($\mathcal{L}^N(A) = \mathcal{L}^N(A^*)$). If $A, B \subset \mathbb{R}^N$ are admissible sets, then

$$\mathcal{L}^N(B^* \setminus A^*) \leq \mathcal{L}^N(B \setminus A). \tag{2.3}$$

Notation 2.9. For any function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ and $c \in \mathbb{R}$, we write

$$\{u > c\} = \{x \in \Omega \mid u(x) > c\}.$$

Definition 2.10. The symmetrization of a function $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is, for $y \in \mathbb{R}^N$,

$$u^*(y) = \sup\{c \in \mathbb{R} \mid y \in \{u > c\}^*\}.$$

Proposition 2.11. *If $*$ is a rearrangement and $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is measurable, then u^* is measurable.*

Proof. Since $*$ is monotone on sets, $\{u^* > c\} = \cup_{n\geq 1}\{u > c + 1/n\}^*$, and the conclusion comes from proposition 2.7. $\square$

Definition 2.12. A function $u : \Omega \to \mathbb{R}$ is *admissible* if for any $\operatorname{ess\,inf} u < c < \operatorname{ess\,sup} u$, $\{u > c\}$ is admissible.

Definition 2.13. If $*$ is a Steiner or cap symmetrization, if $1 \leq p < +\infty$, let $\mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N) = \mathrm{L}^p_+(\mathbb{R}^N)$ be the set of nonnegative functions of $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$, let $\mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N) = \mathrm{C}_{0,+}(\mathbb{R}^N)$ be the set of nonnegative continuous functions whose limit at the infinity is 0, and let $\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N) = \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$ be the set of nonnegative continuous functions with compact support. If $*$ is the increasing rearrangement with respect to $v \in \mathbb{R}^N \cap \partial B(0,1)$, let

$$\begin{aligned}\mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to [0,1] \mid \exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ such that } h \text{ is increasing,}\\ (h - \chi_{\mathbb{R}^+}) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}), \text{ and } (h(v\cdot .) - u) \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N) = \{u : \mathbb{R}^N \to [0,1] \mid u \text{ is continuous,}\\ \lim_{v\cdot x\to -\infty} u(x) = 0, \text{ and } \lim_{v\cdot x\to +\infty} u(x) = 1\}.\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N) = \{u \in \mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N) \mid \exists h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ such that } h \text{ is increasing,}\\ (h - \chi_{\mathbb{R}^+}) \text{ has compact support, and } (h(v\cdot .) - u) \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^N)\}.\end{aligned}$$

The functions of the sets $\mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$, $\mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N)$, and $\mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ all consist are admissible. If $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$, then $u^* \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ and, for any $c \in \mathbb{R}$,

$$\{u > c\}^* = \{u^* > c\}. \tag{2.4}$$

The preservation of inclusions (2.1) and measure (2.2) imply that the symmetrization of functions is nonexpansive for any L^p norm, $1 \leq p \leq \infty$. The ideas of Crowe, Zweibel and Rosenbloom [7], and of Alberti [1] can be generalized to embrace the case of the increasing rearrangement.

Proposition 2.14. *For any $1 \leq p \leq \infty$, we have*

$$\|u^* - v^*\|_p \leq \|u - v\|_p.$$

Proof. If $1 \leq p < \infty$, for any admissible functions u and v, we have

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u - v|^p \, dx = \int_{\sigma\leq\tau} \big(\mathcal{L}^N(\{v > \tau\} \setminus \{u > \sigma\})\\ + \mathcal{L}^N(\{u > \tau\} \setminus \{v > \sigma\})\big) p(p-1)|\sigma - \tau|^{p-2} \, d\sigma \, d\tau.\end{aligned}$$

The properties (2.4) and (2.3) bring the conclusion. If $p = \infty$, the conclusion follows from the preservation of inclusions. $\square$

3. Polarizations

Definition 3.1. A *polarizer* is a closed affine halfspace of $\mathbb{R}^N$.

Remark 3.2. A set H is a polarizer if and only if there exists $a \in \mathbb{R}^N$, $|a| = 1$ and $b \in \mathbb{R}^N$ such that $H = \{x \in \mathbb{R}^N \mid a \cdot x \geq b\}$.

Notation 3.3. If $x \in \mathbb{R}^N$ and $H \subseteq \mathbb{R}^N$ is a polarizer, x_H denotes the reflection of x with respect to ∂H. Using the description of remark 3.2, $x_H = x - 2(a \cdot x - b)a$.

Definition 3.4. The *polarization* of a function $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ by a polarizer H is the function $u^H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, defined by

$$u^H(x) = \begin{cases} \max\{u(x), u(x_H)\} & \text{if } x \in H, \\ \min\{u(x), u(x_H)\} & \text{if } x \notin H. \end{cases}$$

Remark 3.5. The polarization is also called two-point rearrangement. The polarization by H is the natural extension of the cap symmetrization with respect to $S = H$ when $\dim S = N$ (compare with definition 2.4).

Notation 3.6. If T is an affine subspace, let

$$\mathcal{H}_T = \left\{H \subset \mathbb{R}^N \mid H \text{ is a polarizer, and } T \subset H\right\},$$

if S is a closed half affine subspace, let

$$\mathcal{H}_S = \left\{H \subset \mathbb{R}^N \mid H \text{ is a polarizer, } S \subset H, \text{ and } \partial S \subset \partial H\right\}$$

and, if $v \in \mathbb{R}^N \cap \partial B(0, 1)$, let

$$\mathcal{H}_{(v,\infty)} = \left\{H \subset \mathbb{R}^N \mid H \text{ is a polarizer, and } a = v \text{ in the description of remark 3.2}\right\}.$$

For any symmetrization $*$, and for any function $u : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$,

$$u = u^* \qquad \Longleftrightarrow \qquad \forall H \in \mathcal{H}_*, u = u^H.$$

Polarizations satisfy the properties (2.1) and (2.2). Thus they are nonexpansive. For $u \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ and $H \in \mathcal{H}_*$, the inequality

$$\|u^H - u^*\|_p = \|u^H - (u^*)^H\|_p \leq \|u - u^*\|_p;$$

suggests that well chosen polarization can approximate the symmetrization $*$ for a given function. The proof goes in two steps: first the relative compactness of any sequence of iterated polarizations is established (lemma 3.7), then a convergence condition ensures the convergence to the symmetrized function (lemma 3.9).

Lemma 3.7. *Let $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ and $(H_m)_{m\geq 0} \subset \mathcal{H}_*$ a sequence of polarizers. Let $u_m = u^{H_1 \cdots H_m}$. Then, there is $v \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ and an increasing sequence $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$ such that, for any $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\lim_{k\to\infty} \|v - u_{m_k}\|_p = 0.$$

Remark 3.8. This lemma is essentially due to Brock and Solynin [5, lemmas 6.1 and 6.2], and the main part of the arguments was given by Baernstein [3]. Smets and Willem proved it for the cap symmetrization [13].

Proof. The compactness of the sequence $(u_m)_{m\geq 1}$ is proven by Ascoli-Arzelá's theorem. The sequence is equibounded: for any polarization H, $\|u^H\|_\infty = \|u\|_\infty$ and thus, by induction, $\|u_m\|_\infty = \|u\|_\infty < +\infty$.

Secondly, the sequence is equicontinuous. Let

$$\omega_v(\delta) = \sup\{v(x) - v(y) \mid d(x, y) \leq \delta\}$$

be the modulus of continuity of a function v. By a tedious analysis of the possible different cases, it can be proved that for any polarization H, $\omega_{u^H} \leq \omega_u$, and thus, by induction, $\omega_{u_m} \leq \omega_u$. Since $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ is uniformly continuous, the sequence is equicontinuous.

There remains to prove that the supports are uniformly bounded. For the Steiner or the cap symmetrizations, $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ implies that, for some p in T or in ∂S, and for some $R > 0$, $\{u > 0\} \subseteq B(p, R)$. Thus, because polarizations are monotone, $\{u^H > 0\} \subseteq B(p, R)^H = B(p, R)$ and, by induction,$\{u_m > 0\} \subseteq B(p, R)$.

For the increasing rearrangement with respect to v, we have, for some $c \in \mathbb{R}$,

$$\{u > 0\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > c\right\}$$

and

$$\{u^H > 0\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > c\right\}^H = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > c\right\}.$$

Therefore we have

$$\{u_m > 0\} \subseteq \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > c\right\}$$

and similarly there exists $d \in \mathbb{R}$ such that

$$\left\{x \in \mathbb{R}^N \mid v \cdot x > d\right\} \subseteq \{u_m < 1\}.$$

There exists $R > 0$ such that $u_m(x) \neq h(x)$ implies $\operatorname{dist}(x, x + v\mathbb{R}) \leq R$. Therefore, there is a bounded set $B \subset \mathbb{R}^N$ such that $\operatorname{supp}\,(u_m - h) \subset B$ for $m \in \mathbb{N}$. We conclude, by Arzela-Ascoli's theorem that any subsequence has a subsequence converging uniformly to some $v \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$.

The convergence for $1 \leq p < +\infty$ follows from the convergence for $p = +\infty$ and from the fact that all the supports of the functions of the sequence $(u_m - v)$ lie in the same compact set. □

A second lemma states that for any nonsymmetrical function, there exist a polarizer $H \in \mathcal{H}_*$ that brings it closer to its symmetrization.

Lemma 3.9. *Let $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$. If $u \neq u^*$, then there is a polarizer $H \in \mathcal{H}_*$ such that, for any $1 \leq p < +\infty$,*

$$\|u^H - u^*\|_p < \|u - u^*\|_p.$$

Remark 3.10. This lemma is due to Brock and Solynin [5] for the Steiner symmetrization and to Smets and Willem [13] for the cap symmetrization.

Proof. Since $u \neq u^*$, there exists $c > 0$ such that the set $\{u > c\} \,\Delta\, \{u^* > c\}$ is not empty. Choose a point $y \in \{u^* > c\} \setminus \{u > c\}$. There is a polarizer $H \in \mathcal{H}_*$ such that $y_H \in \{u > c\} \setminus \{u^* > c\}$. In a sufficiently small neighborhood $N \subset H$ of y, we have then

$$u^H(x) = u(x_H) > c \geq u^*(x_H) \qquad \text{and} \qquad u^*(x) > c \geq u(x) = u^H(x_H),$$

whence, for $p \geq 1$,

$$|u(x) - u^*(x)|^p + |u(x_H) - u^*(x_H)|^p > |u^H(x) - u^*(x)|^p + |u^H(x) - u^*(x_H)|^p.$$

If $x \in N$, the corresponding nonstrict inequality holds. The integral inequality is obtained by integration of the preceding inequality over N and of the nonstrict inequality on $H \setminus N$. □

4. Approximation by polarizations

We first establish the convergence of a sequence of polarizations for a single function.

Lemma 4.1. *Let $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$, $0 < \kappa < 1$, $(m_k)_{k\geq 1} \subset \mathbb{N}$ an increasing sequence of indices, and a sequence of polarizers $(H_m)_{m\geq 1} \subset \mathcal{H}_*$ such that for all $k \in \mathbb{N}$,*

$$\|u_{m_k} - u^*\|_1 - \|{u_{m_k}}^{H_{m_k}} - u^*\|_1 \geq \kappa \sup_{H\in\mathcal{H}_*} \left(\|u_{m_k} - u^*\|_1 - \|{u_{m_k}}^{H} - u^*\|_1\right). \tag{4.1}$$

Then the sequence $u_m = u^{H_1\cdots H_m}$ converges to u^* for any $1 \leq p \leq +\infty$.

Remark 4.2. For any function $u \in \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$, a sequence of polarizers verifying condition (4.1) can be constructed.

Remark 4.3. We use the same strategy of proof that Smets and Willem [13], excepted that the inequality (4.1) is weaker than imposing to (H_m) to be optimal as they do.

Proof. By lemma 3.7, there exist a subsequence $u_{m'_k}$ of $(u_{m_k})_{k\geq 1}$ that converges to $v \in \mathcal{K}_*$ for any L^p norm. Since the rearrangement $*$ is nonexpansive,

$$\|u^* - v^*\|_p = \lim_{k\to\infty} \|{u_{m'_k}}^* - v^*\|_p \leq \lim_{k\to\infty} \|u_{m'_k} - v\|_p = 0,$$

and $v^* = u^*$. For any polarizer $H \in \mathcal{H}_*$, we have then, by the nonexpansiveness of polarizations and by equation (4.1)

$$\begin{aligned}
\|u_{m'_{k+1}} - u^*\|_1 &\leq \|u_{m'_k+1} - u^*\|_1 \\
&\leq \|u_{m'_k} - u^*\|_1 + \kappa(\|{u_{m'_k}}^H - u^*\|_1 - \|u_{m'_k} - u^*\|_1) \\
&= (1-\kappa)\|u_{m'_k} - u^*\|_1 + \kappa\|{u_{m'_k}}^H - u^*\|_1 \leq \|u_{m'_k} - u^*\|_1.
\end{aligned}$$

Passing to the limit, we obtain

$$\|v - u^*\|_1 \leq (1-\kappa)\|v - u^*\|_1 + \kappa\|v^H - u^*\|_1 \leq \|v - u^*\|_1,$$

whence, since $u^* = v^*$, $\|v - v^*\|_1 = \|v^H - v^*\|_1$, which is absurd if $v \neq u^*$ by lemma 3.9. Therefore the subsequence $(u_{m'_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converges to u^* for any L^p norm. The nonexpansiveness of polarizations allows to conclude

$$\lim_{k\to\infty} \|u_k - u^*\|_p \leq \lim_{k\to\infty} \|u_{m'_k} - u^*\|_p = 0. \qquad \square$$

Theorem 4.4. *For any symmetrization $*$, there exist a sequence of polarizers $(H)_{m\geq 0} \subset \mathcal{H}_*$ such that, for any $1 \leq p < \infty$, if $u \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$, the sequence*

$$u_m = u^{H_1\cdots H_m}$$

converges to u^* :

$$\lim_{m\to\infty} \|u_m - u^*\|_p = 0.$$

If $u \in \mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N)$, the sequence converges for $p = \infty$.

Proof of theorem 4.4. If $*$ is a Steiner or spherical cap symmetrization, first note that there is a countable set $N \subset \mathcal{K}_*(\mathbb{R}^N)$ dense in $\mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ and in $\mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N)$ (see [14]). Choose a sequence (H_m) for which (4.1) holds for all $u \in N$. The sequence of iterated polarizations approaches the symmetrization for any $u \in N$.

Let $u \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ and $\epsilon > 0$. By density, there is $v \in N$ such that $\|u - v\|_p \leq \epsilon/3$. By contraction, for m sufficiently large, if $v_m = v^{H_1 \cdots H_n}$,

$$\|u_m - u^*\|_p \leq \|u_m - v_m\|_p + \|v_m - v^*\|_p + \|v^* - u^*\|_p \leq 2\|u - v\|_p + \|v_m - v^*\|_p \leq \epsilon.$$

If $*$ is the increasing rearrangement with respect to v, and $h : \mathbb{R} \to [0, 1]$ is a continuous function such that supp $(h - \chi_{\mathbb{R}^+})$ is compact, then the same reasoning shows the convergence for any $w \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N) \cap (h(v \cdot .) + \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N))$. Let $u \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ and

$$C_R = \left\{x \in \mathbb{R}^N \mid |(v \cdot x)v - x| \leq R\right\}.$$

Consider the function u_R which is equal to u on C_R and equal to h outside of it. Then $u_R \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N) \cap (h(v \cdot .) + \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N))$, and thus $\int_{C_R} |u_m - u^*|^p \, dx \to 0$. Since

$$\int_{\mathbb{R}^N \setminus C_R} |u_m - u^*|^p \, dx \leq 2 \int_{\mathbb{R}^N \setminus C_R} |u - h|^p \, dx,$$

$u_m \to u^*$ follows.

The proof is similar for $u \in \mathrm{C}_*(\mathbb{R}^N)$. □

Remark 4.5. Theorem 4.4 implies that the symmetrization of any set can be approximated in measure and in Hausdorff distance [5, Lemma 7.2]. Conversely, if the symmetrization of any set can be approximated in measure by some fixed sequence of polarizations, then theorem 4.4 follows by the approximation of functions in $\mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$ by simple functions.

5. Approximation by symmetrizations

The method of proof of theorem 4.4 can be extended to approximation of Steiner or symmetrizations by lower order Steiner or cap symmetrizations.

Definition 5.1. Let T be an affine subspace. A set of affine subspaces $\mathcal{T}$ *approximates* T if, for any $T' \in \mathcal{T}$, $T \subset T'$, and for any affine subspace $T'' \subset \mathbb{R}^N$ of codimension 1 such that $T \subset T''$, there exists $T' \in \mathcal{T}$ such that $T' \subset T''$.

Theorem 5.2. *Let T be an affine subspace of $\mathbb{R}^N$ and $\mathcal{T}$ be a set of affine subspaces. If $\mathcal{T}$ approximates T, there is a sequence $(T_m)_{m\geq 1}$ in $\mathcal{T}$ such that $u^{T_1 \cdots T_m} \to u^T$ for $u \in \mathrm{L}^p_+(\mathbb{R}^N)$ or $u \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$.*

Definition 5.3. Let T be an affine subspace. A set $\mathcal{S}$ of closed half affine subspaces of $\mathbb{R}^N$ approximates T if, for any $S' \in \mathcal{S}$, $T \subset S'$, and for any affine subspace $T'' \subset \mathbb{R}^N$ of codimension 1 which is parallel to T, there exists $S' \in \mathcal{S}$ such that $\partial S' \subset T''$.

Example 5.4. If $\mathcal{T} = \{T\}$, then $\mathcal{T}$ trivially approximates T. If $T = \{0\}$, the set of polarizers $\mathcal{H}_T$ and the set of closed halflines containing 0 both approximate T.

Definition 5.5. Let S be a closed half affine subspace. A set $\mathcal{S}$ of closed half affine subspaces of $\mathbb{R}^N$ approximates S if, for any $S' \in \mathcal{S}$, $S \subset S'$ and $\partial S \subset S'$, and for any affine subspace $T'' \subset \mathbb{R}^N$ of codimension 1 which is parallel to T, there exists $S' \in \mathcal{S}$ such that $\partial S' \subset T''$.

Theorem 5.6. *Let T be an affine subspace of $\mathbb{R}^N$ (resp. S be a half affine subspace of $\mathbb{R}^N$) and $\mathcal{S}$ be a set of closed half affine subspaces of $\mathbb{R}^N$. If $\mathcal{S}$ approximates T (resp. S), then there exists a sequence $(S_m)_{m\geq 1}$ in $\mathcal{S}$ such that $u^{S_1 \cdots S_m} \to u^T$ (resp. $u^{S_1 \cdots S_m} \to u^S$) for $u \in \mathrm{L}^p_+(\mathbb{R}^N)$ or $u \in \mathrm{C}_0(\mathbb{R}^N)$.*

Proof. The proofs of theorems 5.2 and 5.6 are similar. The proof is essentially the same as the proof of theorem 4.4. The modifications in the lemmas are sketched for a closed half affine subspace S in theorem 5.6. Suppose $u \in \mathcal{K}_+(\mathbb{R}^N)$. It is clear that for any $S' \in \mathcal{S}$, $u^{SS'} = u^S$ and $\|u^{S'} - u^S\|_p \leq \|u - u^S\|_p$. Therefore the sequence $\|u^{S_1 \cdots S_n} - u^S\|_p$ is nonincreasing. Theorem 4.4 implies that the modulus of continuity decreases along the sequence. This allows to prove an analogue to lemma 3.7. An analogue of lemma 3.9 is also needed. Suppose $u \neq u^S$. Then by lemma 3.9 there exists $H \in \mathcal{H}_S$ such that $\|u^H - u^S\|_p < \|u - u^S\|_p$. Since ∂H is parallel to ∂S and $\mathcal{S}$ approximates S, there exists S' such that $S' \subset H$ and $\partial S' \subset \partial H'$. Hence $u^{HS'} = u^{S'}$ and

$$\|u^{S'} - u^S\|_p \leq \|u^H - u^S\|_p < \|u - u^S\|_p.$$

The remain of the proof is the same as the proof of lemma 4.1 and of theorem 4.4. □

6. Pólya-Szegö's inequality

Definition 6.1. A set Ω is totally invariant with respect to a symmetrization $*$ if for any $H \in \mathcal{H}_*$, Ω is invariant under the reflection with respect to ∂H.

Definition 6.2. If $*$ is a symmetrization, Ω is a totally invariant set and $u : \Omega \to \mathbb{R}$ is a function, then the symmetrization of u is $u^* = \tilde{u}^*|_\Omega$, where $\tilde{u}$ is any extension of u to $\mathbb{R}^N$.

The definition of the symmetrization of $u : \Omega \to \mathbb{R}$ does not depend on the extension $\tilde{u}$ because Ω is totally invariant.

Corollary 6.3. *If Ω is a totally invariant open set, $*$ is a Steiner or cap symmetrization, if $u \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ is admissible, $1 < p < +\infty$ and $\nabla u \in \mathrm{L}^p(\Omega)$, then*

$$\|\nabla u^*\|_p \leq \|\nabla u\|_p. \tag{6.1}$$

Proof. Suppose first $u \in \mathrm{L}^p_*(\Omega)$. Let u_m be the restrictions to Ω of the sequence of iterated polarizations of theorem 4.4 applied to an extension $\tilde{u} \in \mathrm{L}^p_*(\mathbb{R}^N)$ of u to $\mathbb{R}^N$. For any compactly supported smooth function $h \in \mathcal{D}(\Omega)^N$,

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u^* \operatorname{div} h \, dx = -\lim_{m\to\infty} \int_\Omega u_m \operatorname{div} h \, dx &= \lim_{m\to\infty} \int_\Omega \nabla u_m h \, dx \\ &\leq \liminf_{m\to\infty} \|\nabla u_m\|_p \|h\|_{p'} = \|\nabla u\|_p \|h\|_{p'}, \end{aligned}$$

since $\|\nabla u^H\|_{\Omega,p} = \|\nabla u\|_{\Omega,p}$ [5] for any $u \in \mathrm{W}^{1,1}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ such that $\nabla u \in \mathrm{L}^p(\mathbb{R}^N)$, and for any polarizer H. There exist thus $v \in \mathrm{L}^p(\Omega)^N$ that is the weak limit of ∇u_m and the weak gradient of u^*.

In general, if $*$ is an increasing rearrangement, for $m \geq 3$, let

$$u_m(x) = \frac{m}{m-2} \min(\max(0, u(x) - 1/m), 1 - 2/m).$$

Since u is admissible, $u_m \in \mathrm{L}^1_*(\Omega)$. From the first part of the proof, $\|\nabla u_m{}^*\|_p \leq \|\nabla u_m\|_p$. Since $\frac{m-2}{m}|\nabla u_m| \nearrow |\nabla u|$ and $\frac{m-2}{m}|\nabla u_m{}^*| \nearrow |\nabla u^*|$ almost everywhere, the conclusion comes from the monotone convergence theorem. The end of the proof is similar for the Steiner and cap symmetrizations. □

Acknowledgement

The author thanks Michel Willem for his encouragement, and for his careful rereading. He also thanks the anonymous referee for his constructive comments and suggestions.

References

1. G. Alberti, *Some remarks about a notion of rearrangement*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) **29** (2000), no. 2, 457–472.
2. M. Badiale, *Monotonicity of solutions for elliptic systems on unbounded domains*, Boll. Un. Mat. Ital. A (7) **6** (1992), no. 1, 59–69.
3. A. Baernstein, II, *A unified approach to symmetrization*, Partial equations of Elliptic Type (A. Alvino et al., eds.), Sympos. Math., no. 35, Cambridge Univ. Press, 1995, pp. 47–49.
4. H. J. Brascamp, E. H. Lieb, and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974), 227–237.
5. F. Brock and A. Yu. Solynin, *An approach to symmetrization via polarization*, Trans. Amer. Math. Soc. **352** (2000), no. 4, 1759–1796.
6. G. Carbou, *Unicité et minimalité des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire **12** (1995), no. 3, 305–318.
7. J. A. Crowe, J. A. Zweibel, and P. C. Rosenbloom, *Rearrangements of functions*, J. Funct. Anal. **66** (1986), 432–438.
8. G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, Cambridge Univ. Press, 1934.
9. E. H. Lieb and M. Loss, *Analysis*, second ed., Grad. Stud. Math., vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.
10. P. Mani-Levitska, *Random Steiner symmetrizations*, Studia Sci. Math. Hungar. **21** (1986), no. 3-4, 373–378.
11. G. Pólya and G. Szegö, *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Princeton Univ. Press, 1951.
12. J. Sarvas, *Symmetrization of condensers in n-space.*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I **522** (1972), 44 p.
13. D. Smets and M. Willem, *Partial symmetry and asymptotic behavior for some elliptic variational problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations **18** (2003), no. 1, 57–75.
14. M. Willem, *Analyse fonctionnelle élémentaire*, Cassini, Paris, 2003.

Département de mathématiques, Université catholique de Louvain, Chemin du cyclotron 2, B-1348 Louvain-la-Neuve, Belgium

E-mail address: `vanschaftingen@math.ucl.ac.be`