

Les Classiques de la Théorie des Graphes (Première partie)

Adrien Poncelet Maguy Trefois

Séminaire des doctorants

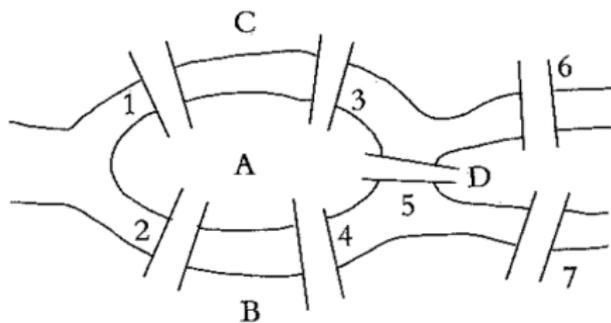
12 avril 2013

Plan du cours

- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens
- 3 Les parcours eulériens
- 4 Les graphes planaires
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant

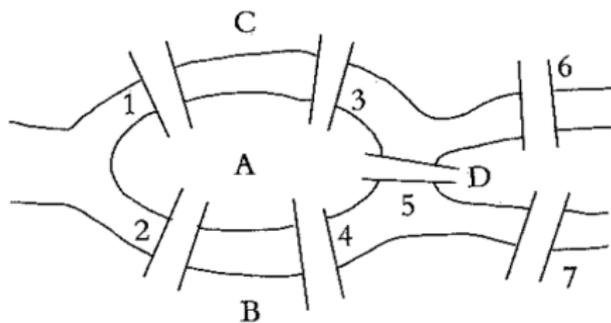
- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens
- 3 Les parcours eulériens
- 4 Les graphes planaires
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant

- 1736, à Königsberg (actuelle Kaliningrad, en Russie)
- Problème :



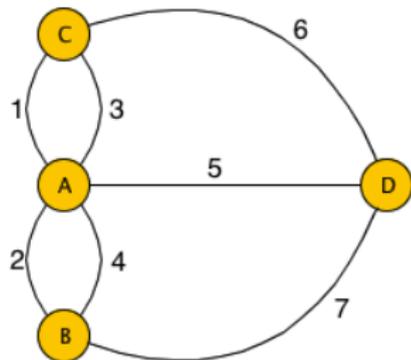
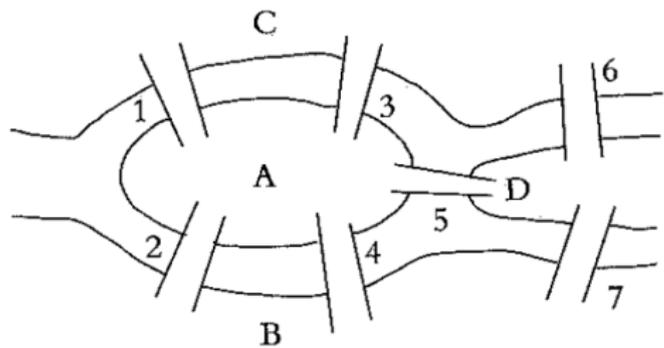
Peut-on trouver une promenade, à partir d'un point de départ au choix, permettant de franchir chaque pont une et une seule fois et de revenir au point de départ ?

- 1736, à Königsberg (actuelle Kaliningrad, en Russie)
- Problème :

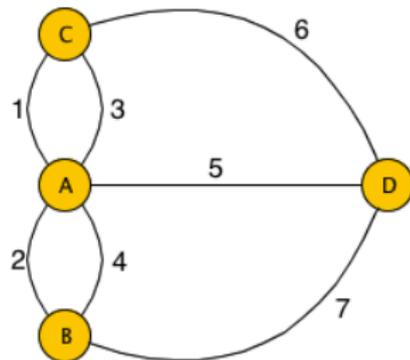
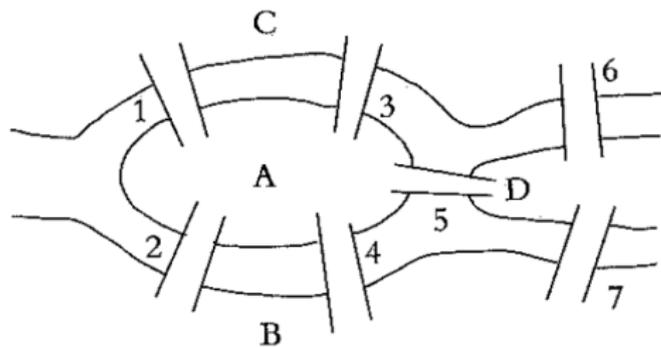


Peut-on trouver une promenade, à partir d'un point de départ au choix, permettant de franchir chaque pont une et une seule fois et de revenir au point de départ ? **Euler prouve que c'est impossible.**

Idée de la preuve :



Idée de la preuve :

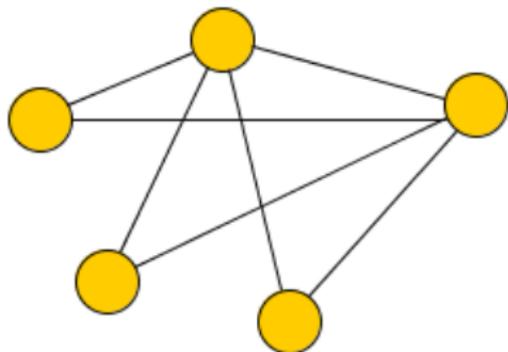


Théorème

Si une telle promenade était possible, un nombre pair de lignes partirait de chaque point.

- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens**
- 3 Les parcours eulériens
- 4 Les graphes planaires
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant

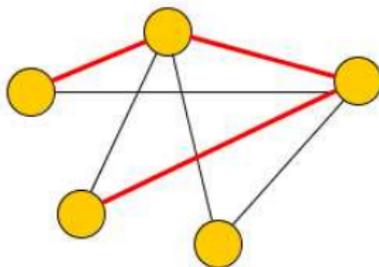
Un **graphe** est un ensemble de points reliés par des liens.



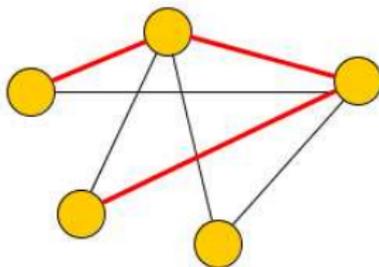
Un point est appelé un **noeud**.

Un lien est appelé une **arête**.

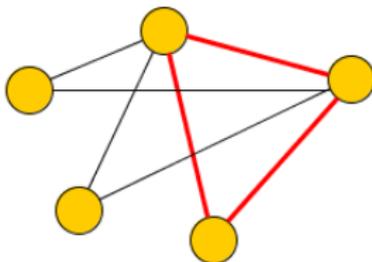
- Un **chemin** est une suite de noeuds v_1, v_2, \dots, v_n telle que pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, les noeuds v_i, v_{i+1} sont reliés par une arête.



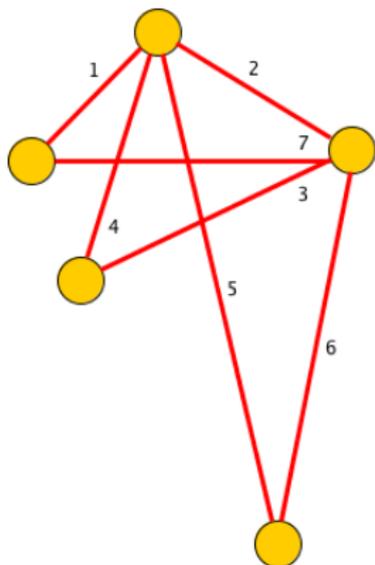
- Un **chemin** est une suite de noeuds v_1, v_2, \dots, v_n telle que pour tout $1 \leq i \leq n - 1$, les noeuds v_i, v_{i+1} sont reliés par une arête.



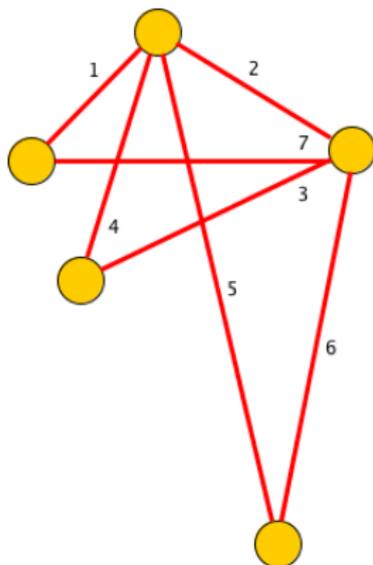
- Un **cycle** est un chemin v_1, v_2, \dots, v_n tel que $v_1 = v_n$.



- Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête du graphe.

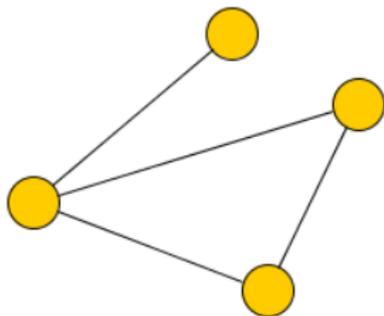


- Un **cycle eulérien** est un cycle qui passe exactement une fois par chaque arête du graphe.



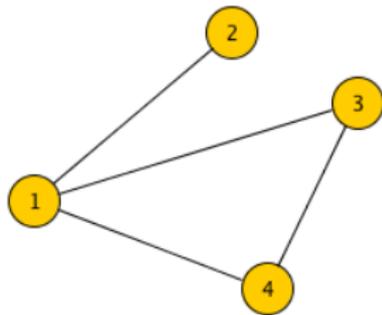
- Un **graphe eulérien** est un graphe qui contient un cycle eulérien.

Tous les graphes ne sont pas eulériens.



Peut-on caractériser les graphes eulériens ?

Le **degré** d'un noeud v , noté $\text{deg}(v)$, est le nombre d'arêtes ayant ce noeud pour extrémité.



$$\text{deg}(1) = 3$$

$$\text{deg}(2) = 1$$

$$\text{deg}(3) = 2$$

$$\text{deg}(4) = 2.$$

Théorème (Euler, 1736)

Un graphe connexe G est eulérien si et seulement si chacun de ses noeuds a un degré pair.

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .

Deux cas possibles :

- ★ C est ouvert.

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .

Deux cas possibles :

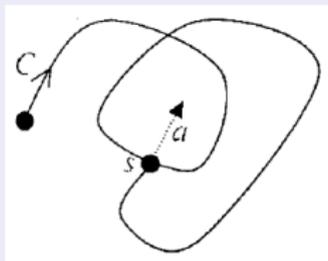
- ★ C est ouvert. Les extrémités de C sont de degré impair dans C , mais de degré pair dans G .

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .

Deux cas possibles :

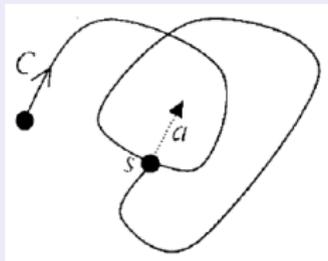
- ★ C est ouvert. Les extrémités de C sont de degré impair dans C , mais de degré pair dans G .



Il existe une arête connectée à une extrémité du chemin C et qui n'est pas parcourue dans C .

Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .
 - ★ Les extrémités de C sont de degré impair dans C , mais de degré pair dans G .

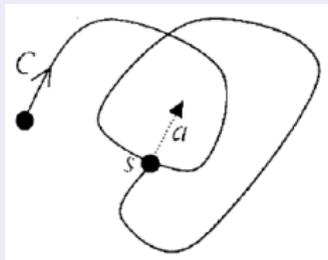


Il existe une arête connectée à une extrémité du chemin C et qui n'est pas parcourue dans C .

- ★ C est fermé.

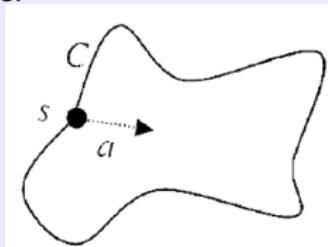
Démonstration.

- La condition suffisante : soit C un plus grand chemin dans G .
 - ▶ Si C contient toutes les arêtes de G , ok.
 - ▶ Sinon, G contient au moins une arête de plus que C .
 - ★ Les extrémités de C sont de degré impair dans C , mais de degré pair dans G .



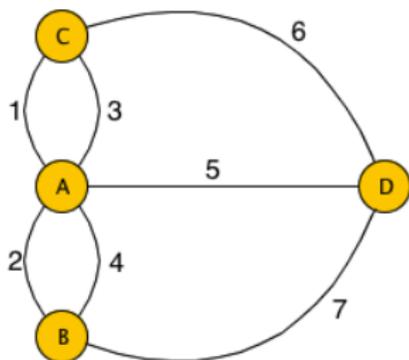
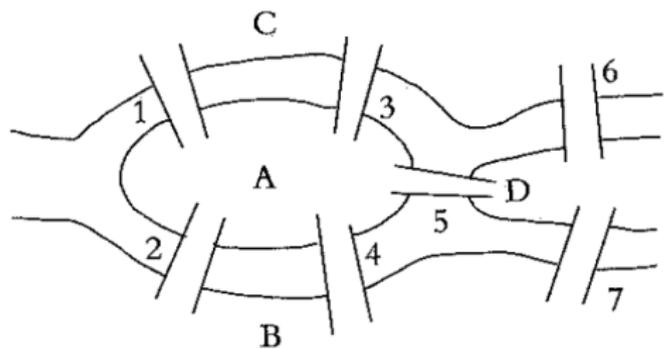
Il existe une arête connectée à une extrémité du chemin C et qui n'est pas parcourue dans C .

- ★ C est fermé.

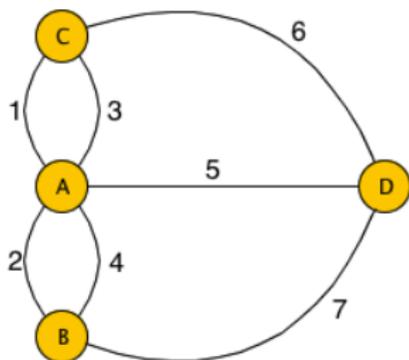
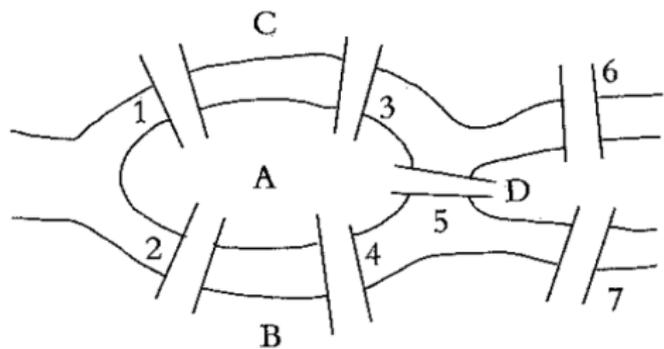


Par connexité, il existe un noeud s de C connecté à une arête, non parcourue par C .





Ce graphe n'est pas eulérien, car il possède des noeuds de degré impair.

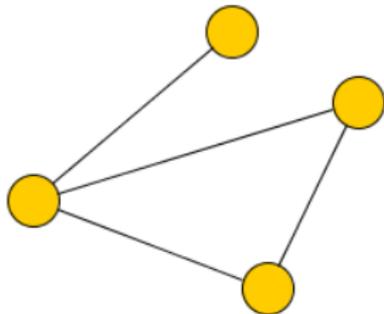


Ce graphe n'est pas eulérien, car il possède des noeuds de degré impair.

Peut-on trouver une promenade qui passe exactement une fois par chacun des ponts sans revenir au point de départ ?

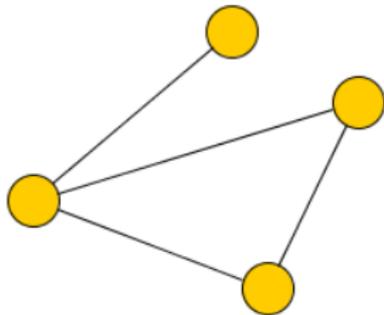
- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens
- 3 Les parcours eulériens**
- 4 Les graphes planaires
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant

Un **parcours eulérien** est un chemin qui passe exactement une fois par chacune des arêtes d'un graphe.



Ce graphe possède un parcours eulérien, mais pas de cycle eulérien !

Un **parcours eulérien** est un chemin qui passe exactement une fois par chacune des arêtes d'un graphe.



Ce graphe possède un parcours eulérien, mais pas de cycle eulérien !

Théorème

Un graphe connexe possède un parcours eulérien si et seulement si il possède au plus deux noeuds de degré impair.

Lemme

S'il existe un parcours eulérien, alors au plus deux noeuds sont de degré impair.

Démonstration.

Si un noeud est de degré impair, alors c'est une extrémité du parcours. □

Lemme

S'il existe un parcours eulérien, alors au plus deux noeuds sont de degré impair.

Démonstration.

Si un noeud est de degré impair, alors c'est une extrémité du parcours. \square

Lemme

Le nombre de noeuds de degré impair est pair.

Démonstration.

$$\sum_v \text{deg}(v) = 2 \cdot \text{nombre d'arêtes.}$$

\square

Proposition

Si exactement deux noeuds sont de degré impair, alors il existe un parcours eulérien.

Démonstration.

- Soit G un graphe connexe dont deux noeuds s_1 et s_2 sont de degré impair.

Proposition

Si exactement deux noeuds sont de degré impair, alors il existe un parcours eulérien.

Démonstration.

- Soit G un graphe connexe dont deux noeuds s_1 et s_2 sont de degré impair.
- On construit une arête entre s_1 et s_2 .

Proposition

Si exactement deux noeuds sont de degré impair, alors il existe un parcours eulérien.

Démonstration.

- Soit G un graphe connexe dont deux noeuds s_1 et s_2 sont de degré impair.
- On construit une arête entre s_1 et s_2 .
- Tous les noeuds sont maintenant de degré pair, donc il existe un cycle eulérien.

Proposition

Si exactement deux noeuds sont de degré impair, alors il existe un parcours eulérien.

Démonstration.

- Soit G un graphe connexe dont deux noeuds s_1 et s_2 sont de degré impair.
- On construit une arête entre s_1 et s_2 .
- Tous les noeuds sont maintenant de degré pair, donc il existe un cycle eulérien.
- Ce cycle peut commencer par n'importe quel noeud et se terminer par un de ses voisins. Par exemple, il peut commencer en s_1 et se terminer par s_2 .

Proposition

Si exactement deux noeuds sont de degré impair, alors il existe un parcours eulérien.

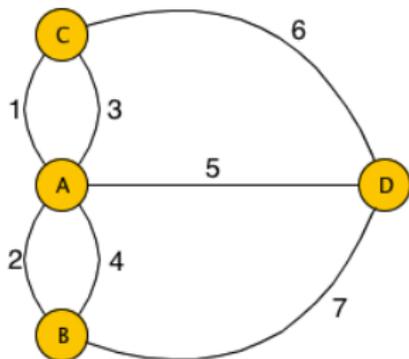
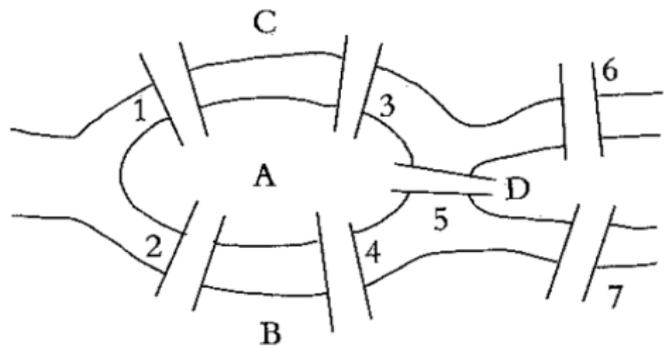
Démonstration.

- Soit G un graphe connexe dont deux noeuds s_1 et s_2 sont de degré impair.
- On construit une arête entre s_1 et s_2 .
- Tous les noeuds sont maintenant de degré pair, donc il existe un cycle eulérien.
- Ce cycle peut commencer par n'importe quel noeud et se terminer par un de ses voisins. Par exemple, il peut commencer en s_1 et se terminer par s_2 .
- En supprimant l'arête ajoutée entre s_1 et s_2 , on obtient un parcours eulérien commençant en s_1 et se terminant en s_2 .



Théorème

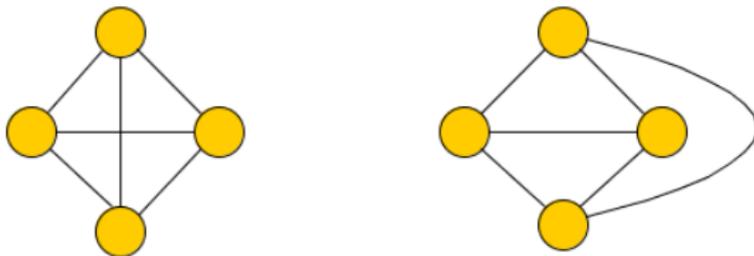
Un graphe connexe possède un parcours eulérien si et seulement si il possède au plus deux noeuds de degré impair.



Il n'existe pas non plus de promenade qui passe exactement par chacun des ponts, sans nécessairement revenir au point de départ.

- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens
- 3 Les parcours eulériens
- 4 Les graphes planaires**
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant

Un graphe peut être représenté de plusieurs façons :



Définition

Un *graphe planaire* est un graphe qui peut être représenté de telle sorte que les arêtes ne se coupent qu'aux extrémités.

Application en architecture :

On veut construire un bâtiment avec les 5 pièces suivantes et les accès suivants :

Pièces :

- cuisine (c)
- salle à manger (sàm)
- séjour (s)
- couloir (c)
- garage (g)

Accès :

- garage - cuisine
- salle à manger - séjour
- séjour - couloir
- couloir - garage
- cuisine - salle à manger

Application en architecture :

On veut construire un bâtiment avec les 5 pièces suivantes et les accès suivants :

Pièces :

- cuisine (c)
- salle à manger (sàm)
- séjour (s)
- couloir (c)
- garage (g)

Accès :

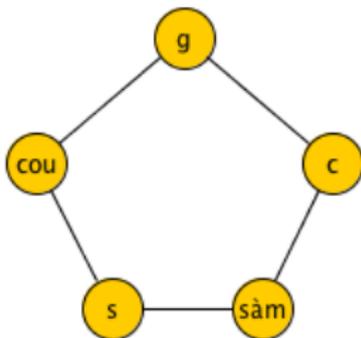
- garage - cuisine
- salle à manger - séjour
- séjour - couloir
- couloir - garage
- cuisine - salle à manger

Peut-on envisager une solution de plain-pied ?

Pièces :

- cuisine (c)
- salle à manger (sàm)
- séjour (s)
- couloir (c)
- garage (g)

Graphe d'accessibilité :



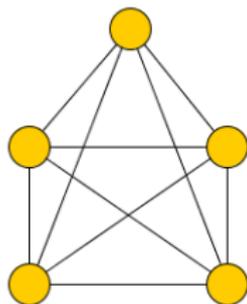
Accès :

- garage - cuisine
- salle à manger - séjour
- séjour - couloir
- couloir - garage
- cuisine - salle à manger

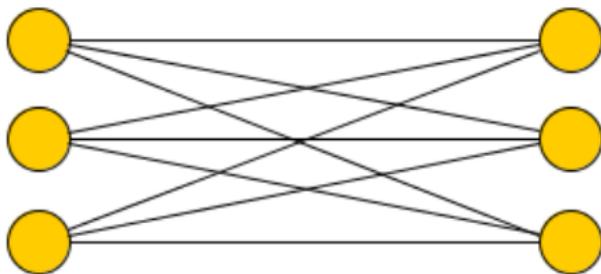
Comme le graphe d'accessibilité est planaire, une solution de plain-pied pourra être envisagée.

Les deux graphes suivants ne sont pas planaires :

- le graphe complet K_5 :



- le graphe bipartite complet $K_{3,3}$:



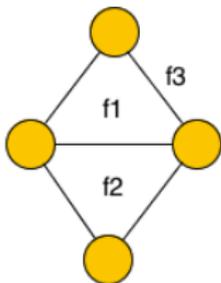
On va le prouver ...

La représentation planaire d'un graphe est appelée **graphe planaire topologique**.

La représentation planeaire d'un graphe est appelée **graphe planeaire topologique**.

Définition

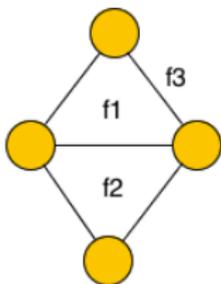
*Dans un graphe planeaire topologique, les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées **faces**.*



La représentation planeaire d'un graphe est appelée **graphe planeaire topologique**.

Définition

Dans un graphe planeaire topologique, les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées **faces**.



$$\deg(f_1) = \deg(f_2) = 3$$

$$\deg(f_3) = 4$$

Définition

Le **degré d'une face** F , noté $\deg(F)$, est le nombre d'arêtes qui bordent F .

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique et a le nombre d'arêtes de G . Alors,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a.$$

Théorème (Formule d'Euler)

Soit G un graphe planaire topologique connexe. On note

- n le nombre de noeuds
- a le nombre d'arêtes
- f le nombre de faces.

Alors,

$$f = a - n + 2.$$

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Démonstration.

Comme G est simple, toute face est bordée par au moins 3 arêtes.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Démonstration.

Comme G est simple, toute face est bordée par au moins 3 arêtes.
Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 3$

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Démonstration.

Comme G est simple, toute face est bordée par au moins 3 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 3$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 3f.$$

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Démonstration.

Comme G est simple, toute face est bordée par au moins 3 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 3$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 3f.$$

Comme $\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a$, $2a \geq 3f$.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Démonstration.

Comme G est simple, toute face est bordée par au moins 3 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 3$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 3f.$$

Comme $\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a$, $2a \geq 3f$.

Par la formule d'Euler, on sait que $f = a - n + 2$. On tire donc que

$$a \leq 3n - 6.$$



Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Corollaire

Le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple et connexe. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 3n - 6.$$

Corollaire

Le graphe complet K_5 n'est pas planaire.

Démonstration.

- simple et connexe
- $\frac{5 \cdot 4}{2} = 10$ arêtes
- s'il était planaire, il vérifierait $a \leq 3n - 6$.
Or, $10 > 3 \cdot 5 - 6$.



Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Démonstration.

Comme G est sans triangle, toute face est bordée par au moins 4 arêtes.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Démonstration.

Comme G est sans triangle, toute face est bordée par au moins 4 arêtes. Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 4$

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*.
Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Démonstration.

Comme G est sans triangle, toute face est bordée par au moins 4 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 4$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 4f.$$

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Démonstration.

Comme G est sans triangle, toute face est bordée par au moins 4 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 4$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 4f.$$

Comme $\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a$, $2a \geq 4f$.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Démonstration.

Comme G est sans triangle, toute face est bordée par au moins 4 arêtes.

Donc, pour toute face F , $\deg(F) \geq 4$

Ainsi,

$$\sum_{F \text{ face}} \deg(F) \geq 4f.$$

Comme $\sum_{F \text{ face}} \deg(F) = 2a$, $2a \geq 4f$.

Par la formule d'Euler, on sait que $f = a - n + 2$. On tire donc que

$$a \leq 2n - 4.$$



Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Corollaire

Le graphe bipartite complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Proposition

Soit G un graphe planaire topologique, simple, connexe et *sans triangle*. Alors, les nombres n de noeuds et a d'arêtes vérifient

$$a \leq 2n - 4.$$

Corollaire

Le graphe bipartite complet $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

Démonstration.

- simple et connexe
- sans triangle
- 9 arêtes
- s'il était planaire, il vérifierait $a \leq 2n - 4$.
Or, $9 > 8$.



Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les deux exemples fondamentaux de graphes non planaires.

Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les deux exemples fondamentaux de graphes non planaires.

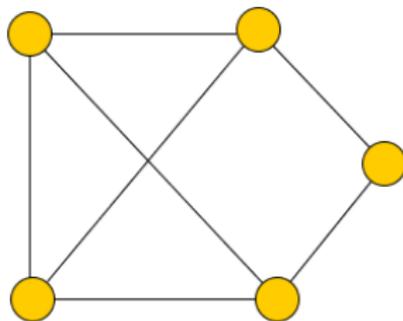
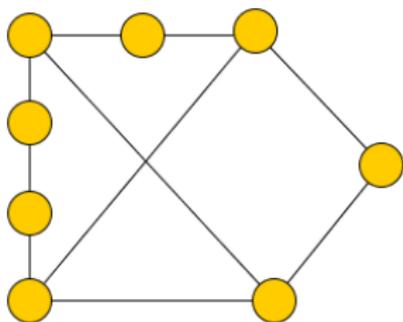
Définition

*Un graphe G' est appelé une **subdivision** d'un graphe G s'il se déduit de G par des insertions successives d'un certain nombre de noeuds sur des arêtes de G .*

Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les deux exemples fondamentaux de graphes non planaires.

Définition

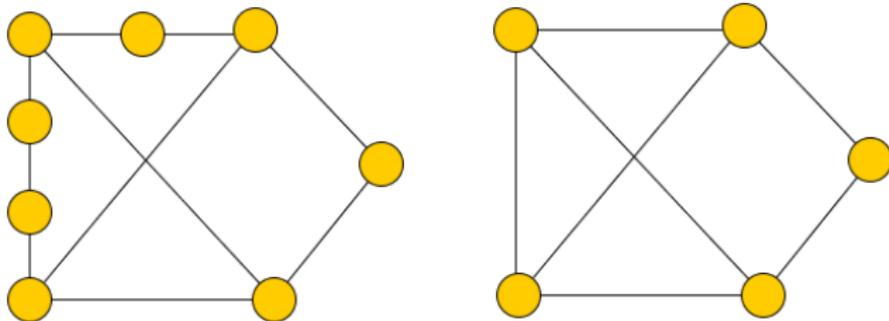
Un graphe G' est appelé une **subdivision** d'un graphe G s'il se déduit de G par des insertions successives d'un certain nombre de noeuds sur des arêtes de G .



Les graphes K_5 et $K_{3,3}$ sont les deux exemples fondamentaux de graphes non planaires.

Définition

Un graphe G' est appelé une **subdivision** d'un graphe G s'il se déduit de G par des insertions successives d'un certain nombre de noeuds sur des arêtes de G .



Théorème (Kuratowsky)

Un graphe est planaire si et seulement si il ne contient pas de subdivision de K_5 ou $K_{3,3}$.

- 1 Le problème des sept ponts de Königsberg
- 2 Les graphes eulériens
- 3 Les parcours eulériens
- 4 Les graphes planaires
- 5 Rang minimum et nombre zéro forçant**

Motivation : le problème de la valeur propre inverse d'un graphe

Motivation : le problème de la valeur propre inverse d'un graphe

Un graphe non dirigé simple G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}_{su}(G) = \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : A = A^T, \forall i \neq j, a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } \{i, j\} \in E\}.$$

Motivation : le problème de la valeur propre inverse d'un graphe

Un graphe non dirigé simple G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}_{su}(G) = \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : A = A^T, \forall i \neq j, a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } \{i, j\} \in E\}.$$

Question : étant donnée une suite de nombres réels $[\mu_1, \dots, \mu_N]$, existe-t'il une matrice $A \in \mathcal{Q}_{su}(G)$ dont le spectre est $[\mu_1, \dots, \mu_N]$?

Motivation : le problème de la valeur propre inverse d'un graphe

Un graphe non dirigé simple G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}_{su}(G) = \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : A = A^T, \forall i \neq j, a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } \{i, j\} \in E\}.$$

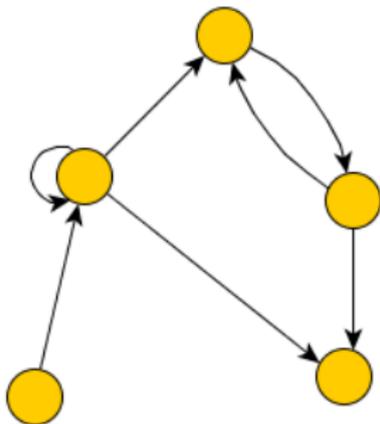
Question : étant donnée une suite de nombres réels $[\mu_1, \dots, \mu_N]$, existe-t'il une matrice $A \in \mathcal{Q}_{su}(G)$ dont le spectre est $[\mu_1, \dots, \mu_N]$?

Première étape : la multiplicité maximale possible pour un nombre μ en tant que valeur propre d'une matrice dans $\mathcal{Q}_{su}(G)$ est :

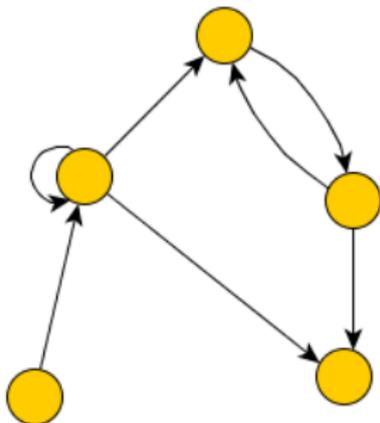
$$|G| - mr(G),$$

où $mr(G)$ est le rang minimum possible pour une matrice dans $\mathcal{Q}_{su}(G)$.

Un **graphe dirigé** est un graphe avec une direction sur les arêtes.



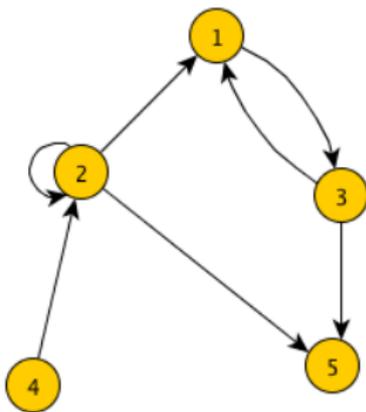
Un **graphe dirigé** est un graphe avec une direction sur les arêtes.



Un noeud j est un **voisin sortant** d'un noeud i s'il existe une arête allant de i vers j .

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

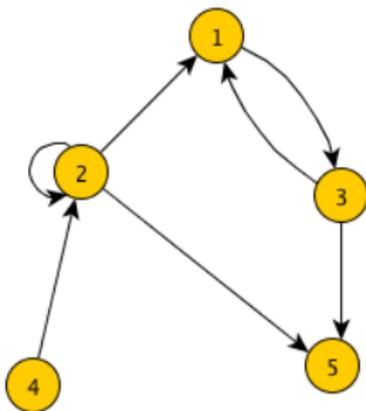
$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i, j) \text{ est une arête dans } G\}.$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \pi \\ 56 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i, j) \text{ est une arête dans } G\}.$$

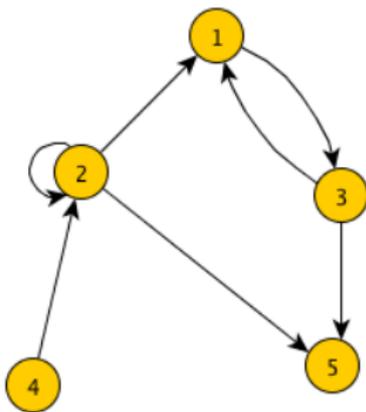


$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \pi \\ 56 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Le **rang minimum** de G , noté $mr(G)$, est le rang minimum possible pour une matrice dans $\mathcal{Q}(G)$.

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i, j) \text{ est une arête dans } G\}.$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & \sqrt{2} & 0 & 0 & \pi \\ 56 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

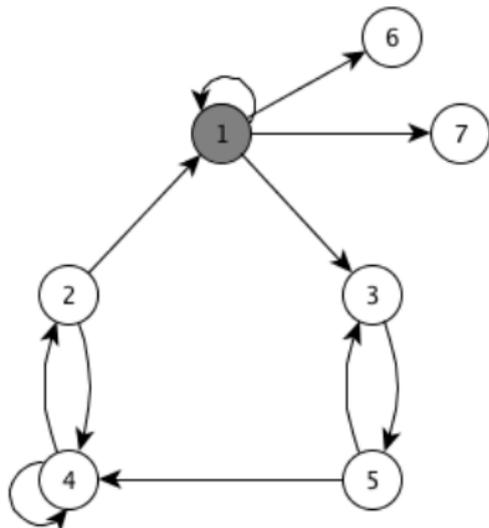
Le **rang minimum** de G , noté $mr(G)$, est le rang minimum possible pour une matrice dans $\mathcal{Q}(G)$.

Question : comment calculer le rang minimum d'un graphe dirigé ?

Le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé G

Une règle de changement de couleur sur G : supposons que les noeuds de G soient blancs ou noirs. Si un noeud j est le seul voisin sortant blanc d'un noeud i , alors on colorie j en noir.

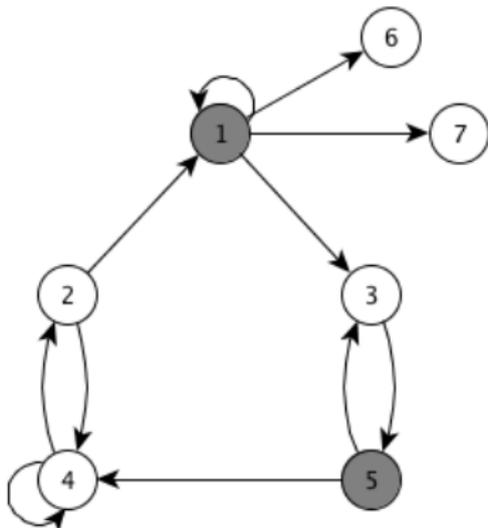
On applique cette règle jusqu'à ce que plus aucun changement de couleur ne soit possible.



Le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé G

Une règle de changement de couleur sur G : supposons que les noeuds de G soient blancs ou noirs. Si un noeud j est le seul voisin sortant blanc d'un noeud i , alors on colorie j en noir.

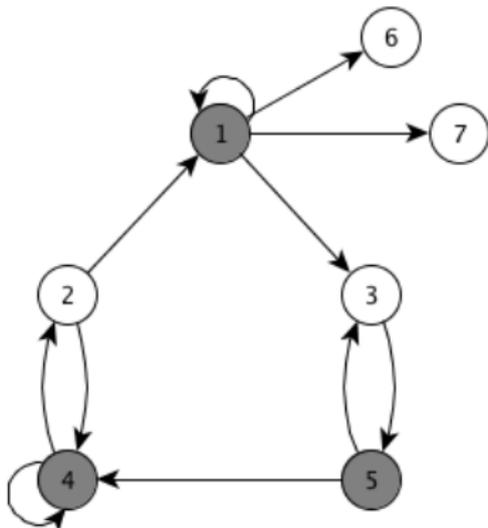
On applique cette règle jusqu'à ce que plus aucun changement de couleur ne soit possible.



Le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé G

Une règle de changement de couleur sur G : supposons que les noeuds de G soient blancs ou noirs. Si un noeud j est le seul voisin sortant blanc d'un noeud i , alors on colorie j en noir.

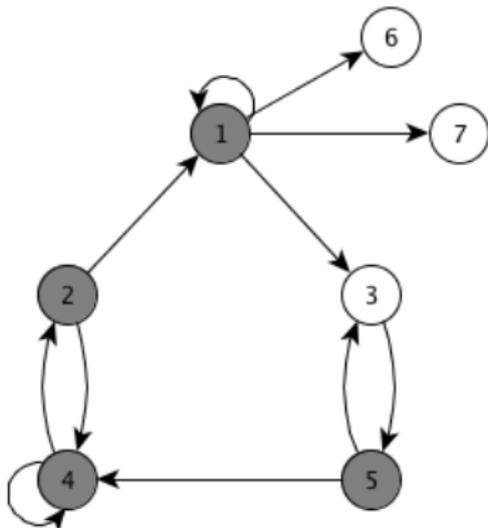
On applique cette règle jusqu'à ce que plus aucun changement de couleur ne soit possible.



Le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé G

Une règle de changement de couleur sur G : supposons que les noeuds de G soient blancs ou noirs. Si un noeud j est le seul voisin sortant blanc d'un noeud i , alors on colorie j en noir.

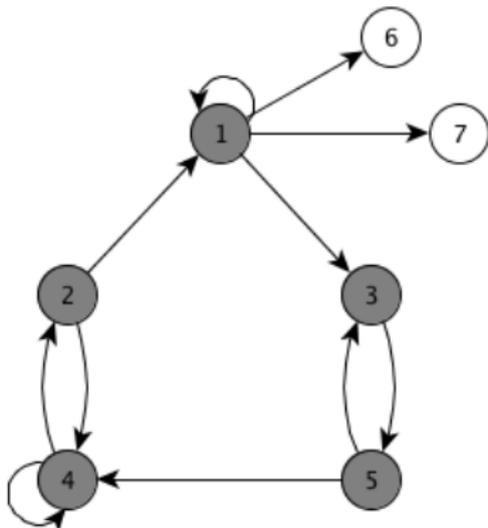
On applique cette règle jusqu'à ce que plus aucun changement de couleur ne soit possible.



Le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé G

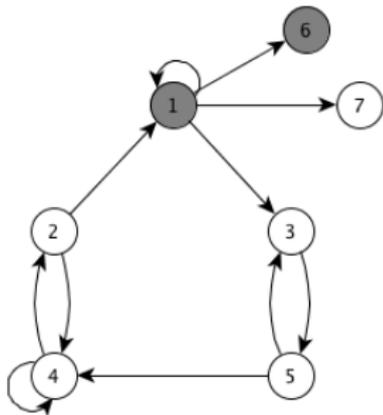
Une règle de changement de couleur sur G : supposons que les noeuds de G soient blancs ou noirs. Si un noeud j est le seul voisin sortant blanc d'un noeud i , alors on colorie j en noir.

On applique cette règle jusqu'à ce que plus aucun changement de couleur ne soit possible.



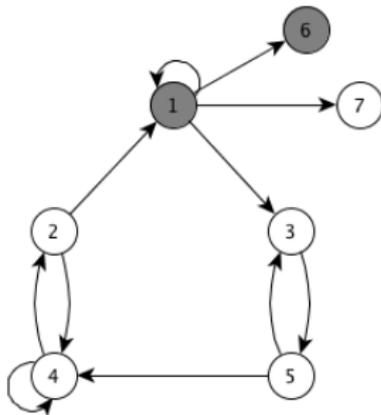
Le **nombre zéro forçant** $Z(G)$ d'un graphe dirigé G est le nombre minimum de noeuds qui doivent être initialement noirs de telle sorte qu'après avoir appliqué la règle de changement de couleur, tout le graphe soit noir.

Le **nombre zéro forçant** $Z(G)$ d'un graphe dirigé G est le nombre minimum de noeuds qui doivent être initialement noirs de telle sorte qu'après avoir appliqué la règle de changement de couleur, tout le graphe soit noir.



Son nombre zéro forçant $Z(G)$ est égal à 2.

Le **nombre zéro forçant** $Z(G)$ d'un graphe dirigé G est le nombre minimum de noeuds qui doivent être initialement noirs de telle sorte qu'après avoir appliqué la règle de changement de couleur, tout le graphe soit noir.



Son nombre zéro forçant $Z(G)$ est égal à 2.

Théorème

Pour tout graphe dirigé G ,

$$|G| - Z(G) \leq mr(G).$$

Pour certains graphes dirigés particuliers, l'égalité est vérifiée.

Théorème

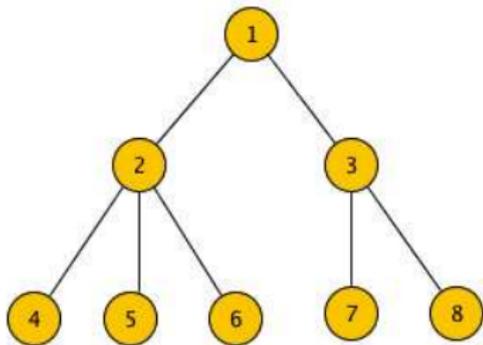
Calculer le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé est NP-difficile.

Théorème

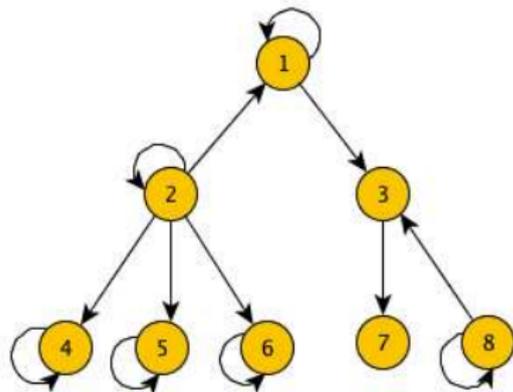
Calculer le nombre zéro forçant d'un graphe dirigé est NP-difficile.

Mais dans certains cas, c'est facile...

Le cas des arbres orientés (permettant les boucles)

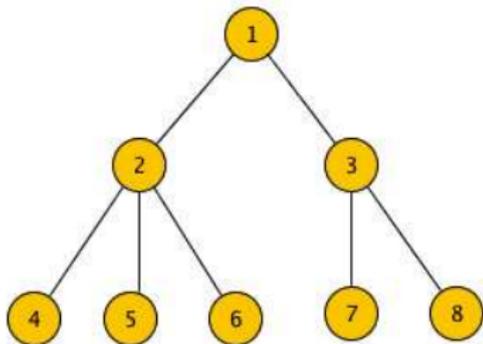


Arbre non dirigé

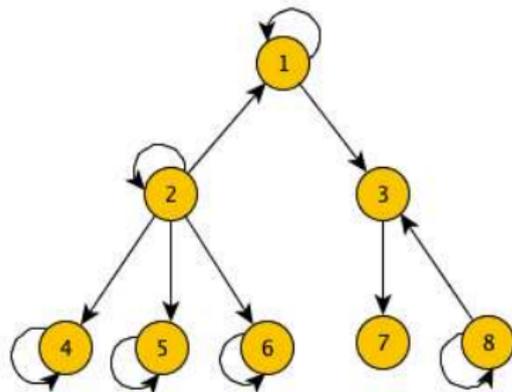


Arbre orienté (permettant les boucles)

Le cas des arbres orientés (permettant les boucles)



Arbre non dirigé



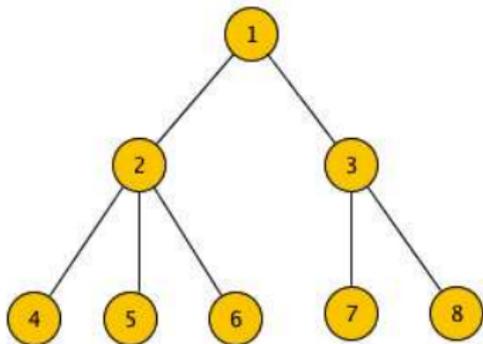
Arbre orienté (permettant les boucles)

Théorème

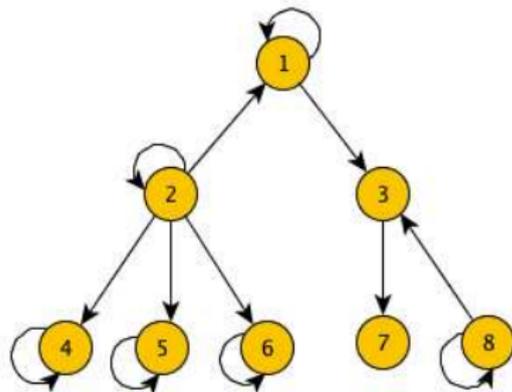
Pour tout arbre orienté T ,

$$|T| - Z(T) = mr(T).$$

Le cas des arbres orientés (permettant les boucles)



Arbre non dirigé



Arbre orienté (permettant les boucles)

Théorème

Pour tout arbre orienté T ,

$$|T| - Z(T) = mr(T).$$

Théorème

Le rang min de tout arbre orienté est calculable en temps linéaire.

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i,j) \text{ est une arête dans } G\}.$$

Toutes les matrices dans $\mathcal{Q}(G)$ ont le même pattern :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star \\ \star & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i, j) \text{ est une arête dans } G\}.$$

Toutes les matrices dans $\mathcal{Q}(G)$ ont le même pattern :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star \\ \star & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une **réalisation** d'un pattern P est une matrice réelle A telle que $a_{ij} \neq 0$ ssi p_{ij} est une étoile.

Un graphe dirigé G définit un ensemble matriciel :

$$\mathcal{Q}(G) := \{A \in \mathbb{R}^{|G| \times |G|} : a_{ij} \neq 0 \text{ ssi } (i,j) \text{ est une arête dans } G\}.$$

Toutes les matrices dans $\mathcal{Q}(G)$ ont le même pattern :

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & 0 & \star \\ \star & 0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Une **réalisation** d'un pattern P est une matrice réelle A telle que $a_{ij} \neq 0$ ssi p_{ij} est une étoile.

Le rang minimum d'un pattern P est le rang minimum possible pour une réalisation de P (= rang minimum de G).

Proposition (Processus d'élimination)

Soit \mathbf{P} un pattern ayant une ligne s (ou une colonne t) qui possède exactement une entrée étoile p_{st} . Then,

$$mr(\mathbf{P}) = mr(\mathbf{P}(s|t)) + 1.$$

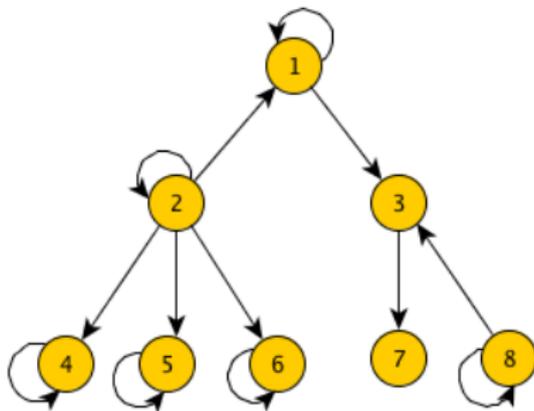
Proposition (Processus d'élimination)

Soit \mathbf{P} un pattern ayant une ligne s (ou une colonne t) qui possède exactement une entrée étoile p_{st} . Then,

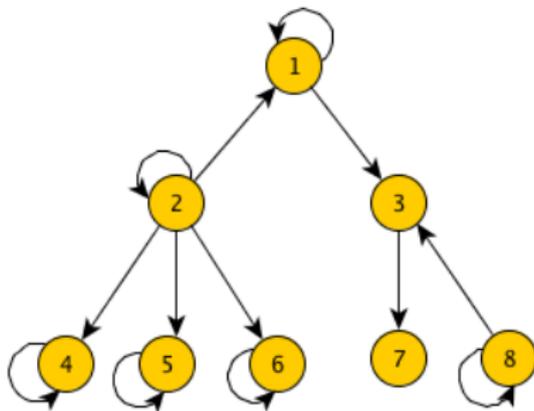
$$mr(\mathbf{P}) = mr(\mathbf{P}(s|t)) + 1.$$

Théorème

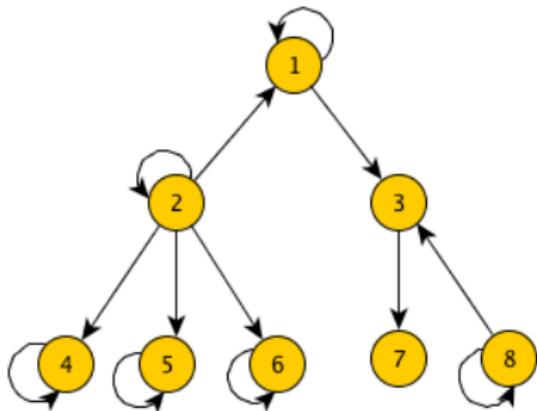
Le rang minimum d'un arbre orienté (admettant des boucles) peut être calculé en temps linéaire grâce au processus d'élimination.



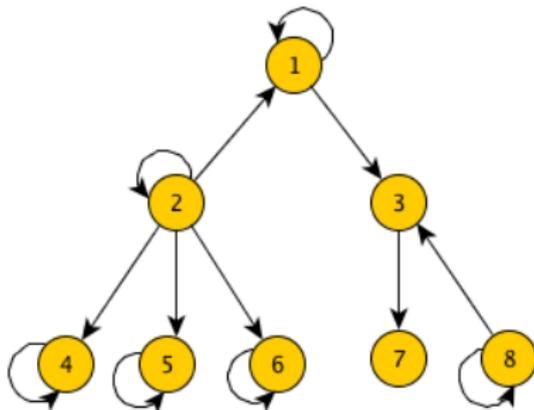
$$mr(T) = mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



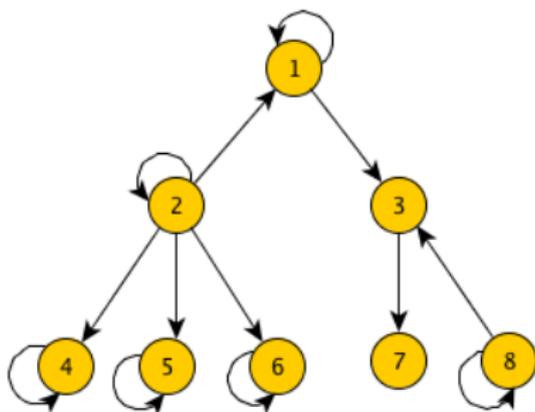
$$mr(T) = mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



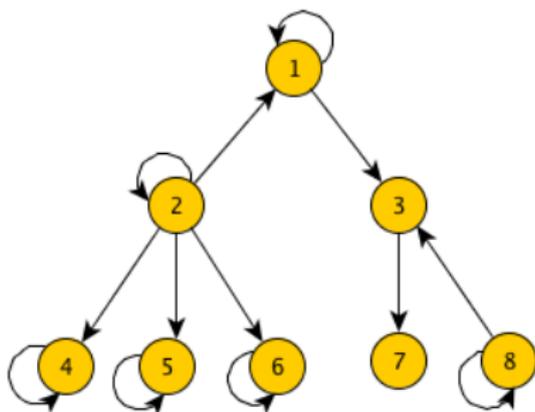
$$mr(T) = 1 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



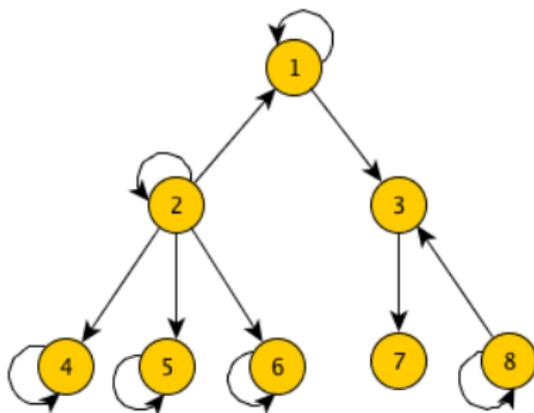
$$mr(T) = 1 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



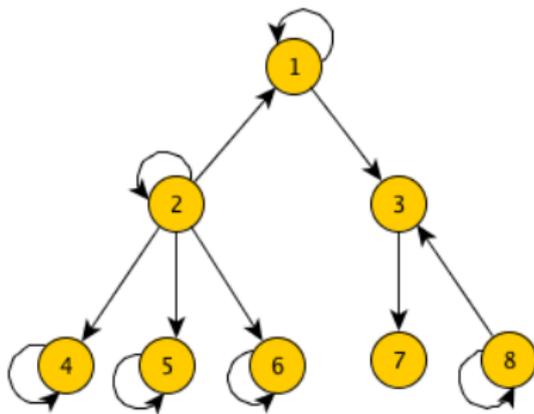
$$mr(T) = 2 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



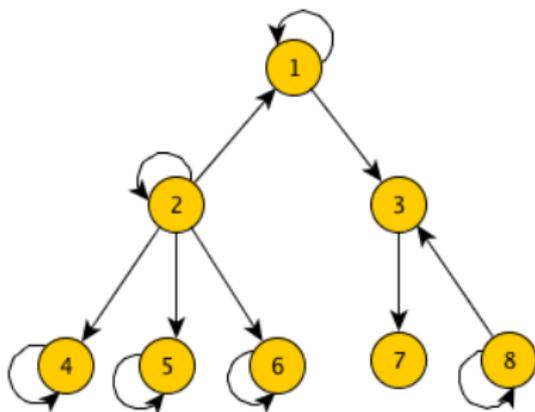
$$mr(T) = 2 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 & 0 & 0 \\ * & * & 0 & * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & 0 & 0 & * \end{pmatrix}$$



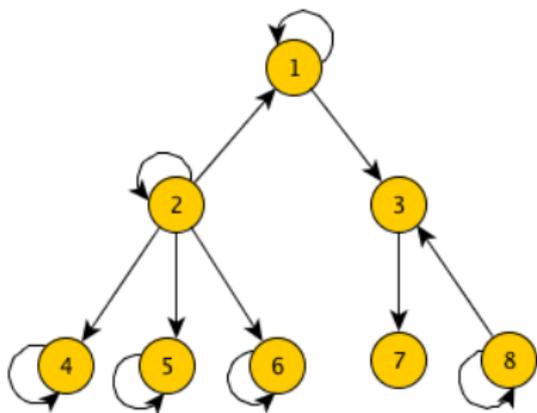
$$mr(T) = 3 + mr \begin{pmatrix} \star & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$$



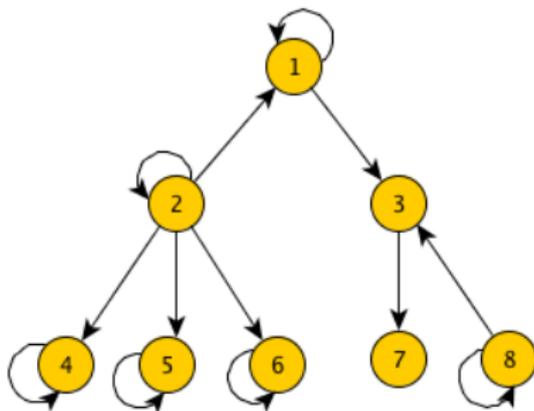
$$mr(T) = 3 + mr \begin{pmatrix} \star & 0 & \star & 0 & 0 \\ \star & \star & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix}$$



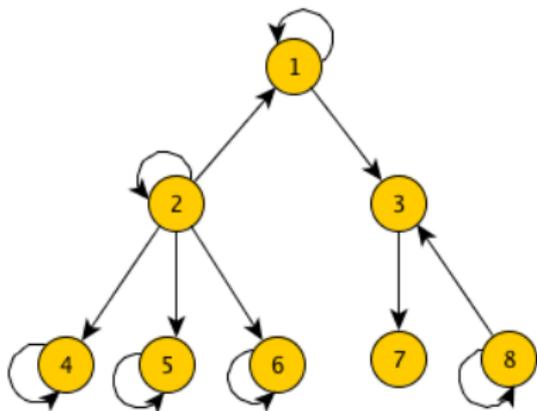
$$mr(T) = 4 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$



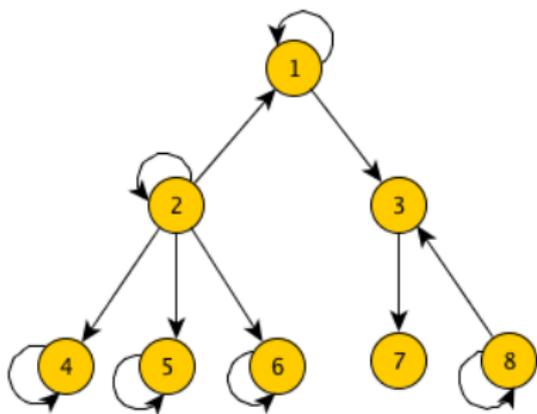
$$mr(T) = 4 + mr \begin{pmatrix} * & 0 & * & 0 \\ * & * & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & * & * \end{pmatrix}$$



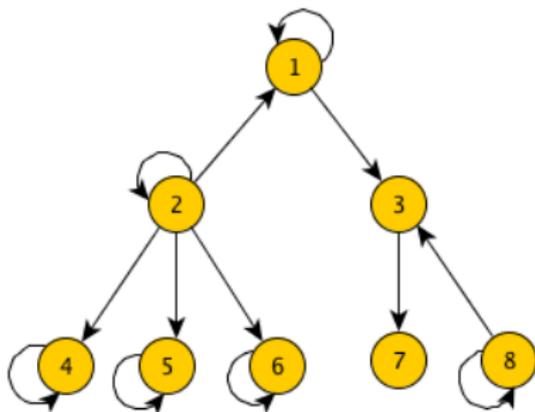
$$mr(T) = 5 + mr \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$



$$mr(T) = 5 + mr \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$



$$mr(T) = 6 + mr \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \star & \star \end{pmatrix}$$



$$mr(T) = 7$$

Les classiques de la théorie des graphes (Deuxième partie)

Maguy Tréfois et Adrien Poncelet

Séminaire des doctorants

12 avril 2013

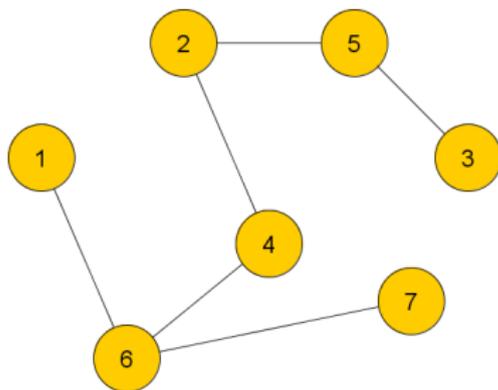
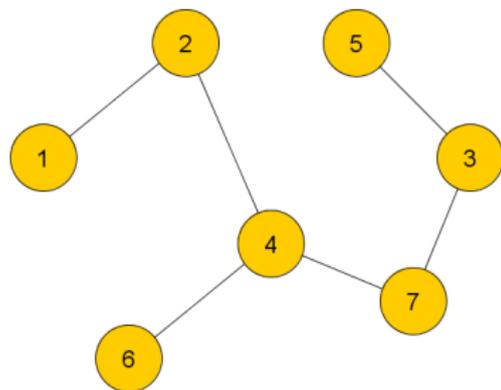
Plan

- 1 Laplacien et arbres couvrants d'un graphe
- 2 Modèles statistiques apparentés
- 3 Théorème de Kirchhoff
- 4 Généralisations du théorème

Laplacien et arbres couvrants d'un graphe :

Définitions :

- Un graphe est un ensemble de **vertex** ou **noeuds**, reliés par des **arêtes**
- Un **arbre** est un sous-graphe connexe qui ne contient aucun cycle
- Un **arbre couvrant** est un arbre qui contient tous les vertex du graphe



Laplacien et arbres couvrants d'un graphe :

Matrice de degré D d'un graphe G :

$$D_{i,j} = \begin{cases} \text{nombre d'arêtes sortant de } i & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Matrice d'adjacence A de G :

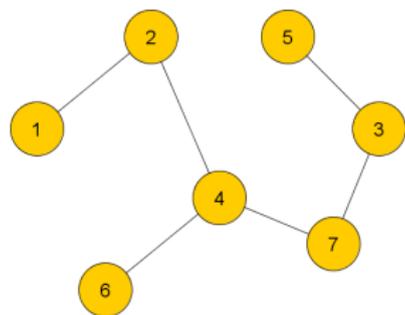
$$A_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \rightarrow j \text{ est une arête de } G, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Laplacien Δ_G de G :

$$\Delta_G = D - A$$

Laplacien et arbres couvrants d'un graphe :

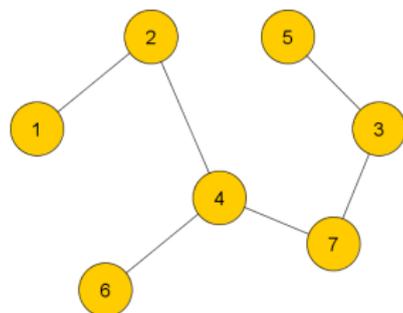
Exemple :



$$\Delta_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Laplacien et arbres couvrants d'un graphe :

Exemple :



$$\Delta_G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Remarques :

- Graphe non orienté $\Rightarrow \Delta_G$ symétrique
- Somme nulle par ligne ou colonne
- Arbre : $n - 1$ arêtes relient n vertex

Graphe sur un réseau :

Définition :

- Collection d'arêtes et de vertex avec une **géométrie fixée**
- Vertex, ou *sites* en physique, repérés par des coordonnées

Grphe sur un rseau :

Définition :

- Collection d'arêtes et de vertex avec une **géométrie fixée**
- Vertex, ou *sites* en physique, repérés par des coordonnées

Exemples physiques :

Réseaux cristallins, polymères, pavages, ...

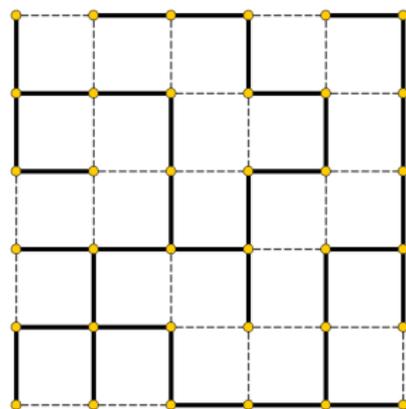
Grphe sur un rseau :

Définition :

- Collection d'arêtes et de vertex avec une **géométrie fixée**
- Vertex, ou *sites* en physique, repérés par des coordonnées

Exemples physiques :

Réseaux cristallins, polymères, pavages, ...



Laplacien sur le rseau carré :

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

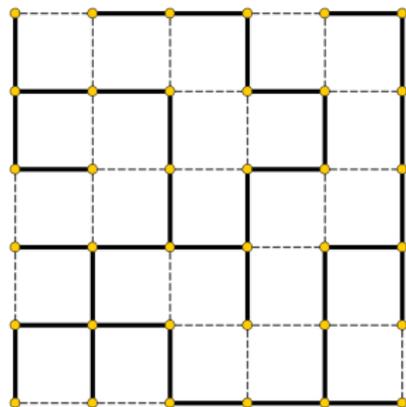
Grphe sur un rseau :

Définition :

- Collection d'arêtes et de vertex avec une **géométrie fixée**
- Vertex, ou *sites* en physique, repérés par des coordonnées

Exemples physiques :

Réseaux cristallins, polymères, pavages, ...



Laplacien sur le rseau carré :

$$\Delta_{i,j} = \begin{cases} 4 & \text{si } i = j, \\ -1 & \text{si } |i - j| = 1, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

⇒ Laplacien *usuel* discrétisé

Plan

- 1 Laplacien et arbres couvrants d'un graphe
- 2 Modèles statistiques apparentés**
- 3 Théorème de Kirchhoff
- 4 Généralisations du théorème

Marche aléatoire à boucles effacées (LERW) :

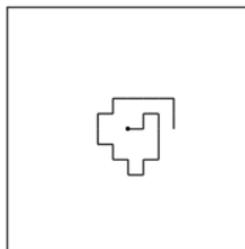
Origine :

- Introduite par Lawler en 1980
- Simplification de la marche auto-évitante (SAW)

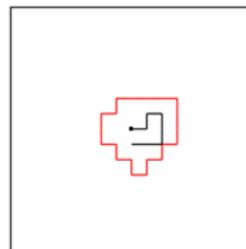
Définition :

- Marche sur un réseau discret
- Direction du pas suivant choisie aléatoirement
- Effacement chronologique des boucles

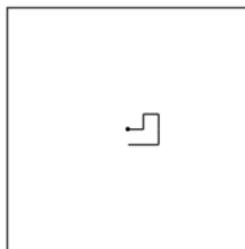
Marche aléatoire à boucles effacées (LERW) :



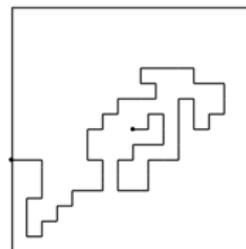
Simple marche



Effacement de la boucle



Reprise à partir de
l'auto-intersection

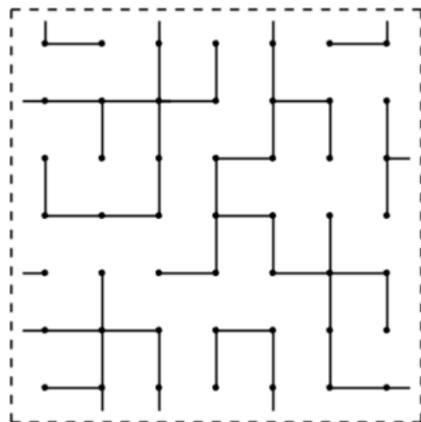


Arrêt de la marche au bord

Marche aléatoire à boucles effacées (LERW) :

Correspondance avec les arbres :

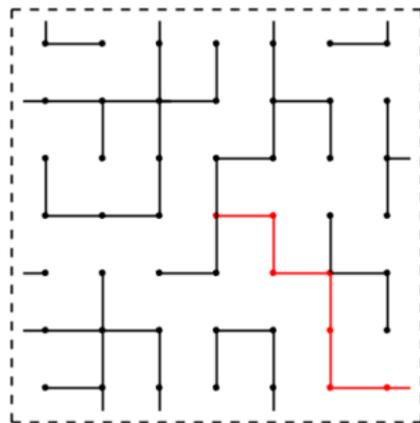
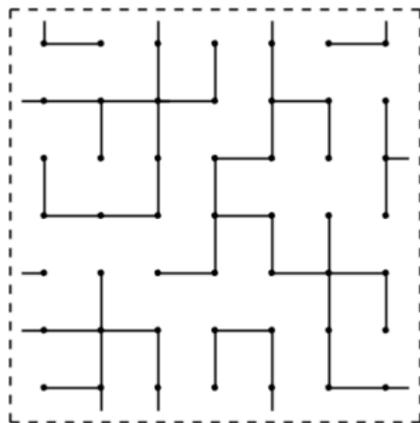
- $u, v \in G$: un seul chemin entre u et v sur un arbre
- Même distribution qu'une LERW



Marche aléatoire à boucles effacées (LERW) :

Correspondance avec les arbres :

- $u, v \in G$: un seul chemin entre u et v sur un arbre
- Même distribution qu'une LERW



Marche aléatoire à boucles effacées (LERW) :

Application : Algorithme de Wilson

- But : Construire un arbre couvrant
- Outil : LERW
- Méthode :
 - ▶ Prendre 2 vertex et faire une LERW d'un à l'autre
 - ▶ Prendre un 3^e vertex et faire une LERW jusqu'au chemin précédent
 - ▶ Recommencer jusqu'à ce que tous les vertex soient utilisés

Modèle des dimères :

Origine :

- Introduit par Temperley & Fisher, Kasteleyn en 1961
- Modélise les arrangements de polymères à 2 molécules

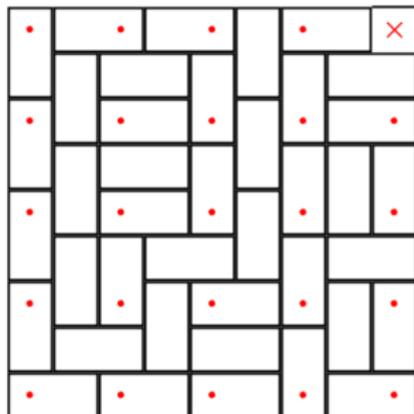
Définition :

- Dimères, ou dominos : rectangles 2×1
- Pavage complet d'une région du plan

Modèle des dimères :

Bijection avec les arbres :

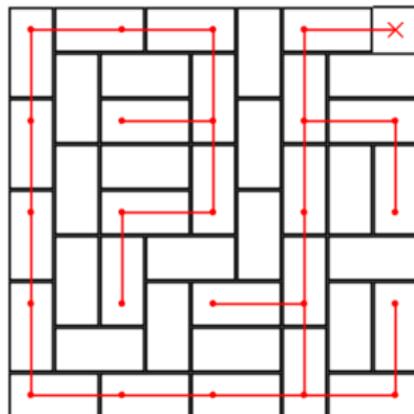
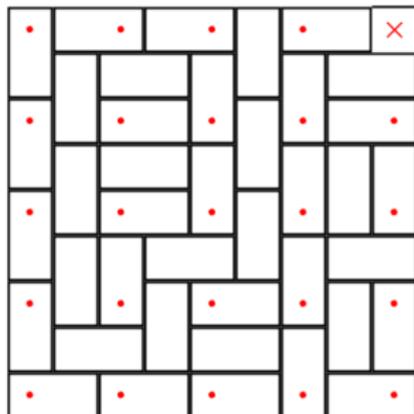
- Pavage d'un rectangle $(2L + 1) \times (2M + 1)$
- Site unique laissé vide
- Coloriage des sites aux coordonnées paire-paire
- Traçage de liens selon les sens des dimères paire-paire



Modèle des dimères :

Bijection avec les arbres :

- Pavage d'un rectangle $(2L + 1) \times (2M + 1)$
- Site unique laissé vide
- Coloriage des sites aux coordonnées paire-paire
- Traçage de liens selon les sens des dimères paire-paire



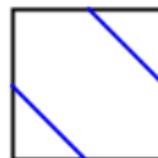
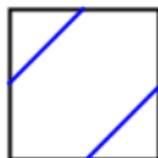
Modèle $O(n)$ à boucles :

Origine :

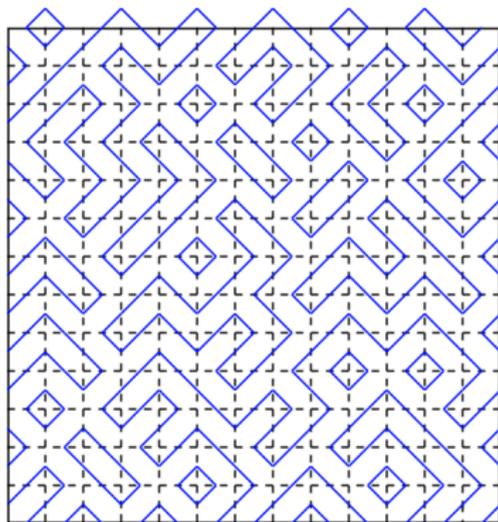
- Introduit par Blöte et Nienhuis en 1989
- Modélise les systèmes de spins et les polymères avec symétrie $O(n)$

Définition :

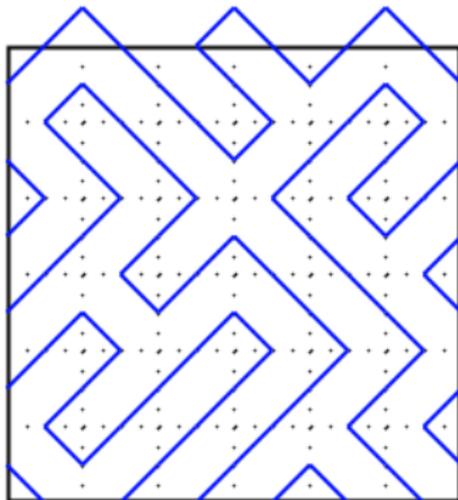
- Pavage du plan avec deux types de cellules élémentaires
- Poids n attaché à chaque boucle



Modèle $O(n)$ à boucles :



$O(2)$

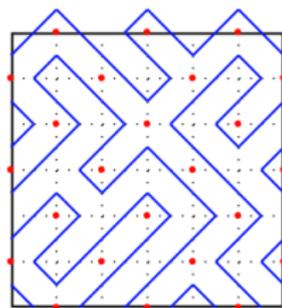


$O(0)$

Modèle $O(n)$ à boucles :

Bijection avec les arbres :

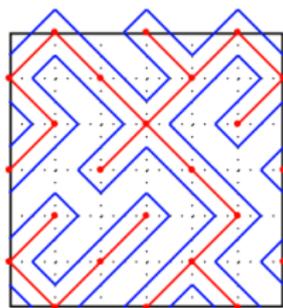
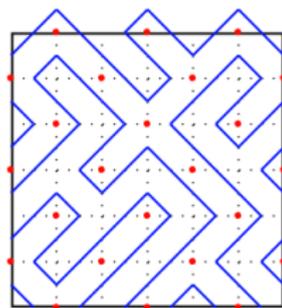
Traçage de liens entre les sites (m, n) avec $m + n$ impair



Modèle $O(n)$ à boucles :

Bijection avec les arbres :

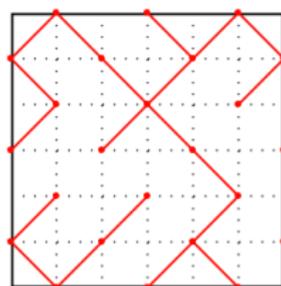
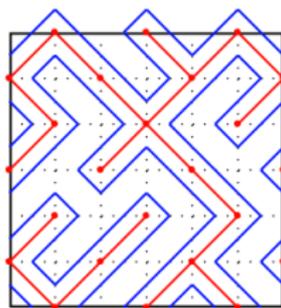
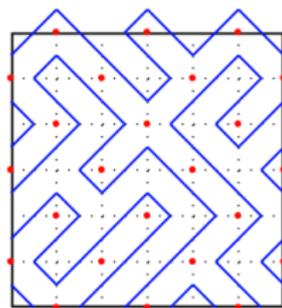
Traçage de liens entre les sites (m, n) avec $m + n$ impair



Modèle $O(n)$ à boucles :

Bijection avec les arbres :

Traçage de liens entre les sites (m, n) avec $m + n$ impair



Modèle de piles de sable abélien :

Origine :

- Introduit par Bak, Tang et Wiesenfeld en 1987
- Simplification du comportement du sable réel

Définition :

- Réseau carré \mathcal{L} de taille $L \times L$ avec N sites
- Variables de hauteur : $h_i \in \{1, 2, 3, 4\}$ pour chaque site $1 \leq i \leq N$

Modèle de piles de sable abélien :

Bijection avec les arbres : Algorithme de brûlage

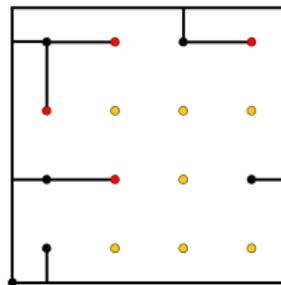
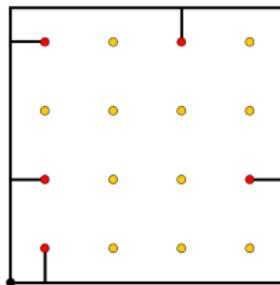
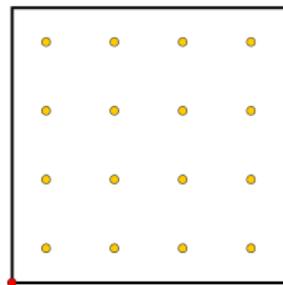
- Partant d'une configuration de hauteurs récurrente, on brûle les sites i dont h_i est strictement supérieure au nombre de voisins non brûlés
- Si plusieurs voisins en feu : sens de propagation selon une règle d'ordre fixée, $N > E > S > O$ (par exemple)

Modèle de piles de sable abélien :

4	3	4	2
2	3	1	2
4	4	3	4
3	2	3	1

4	3	4	2
2	3	1	2
4	4	3	4
3	2	3	1

	3		2
2	3	1	2
	4	3	
	2	3	1

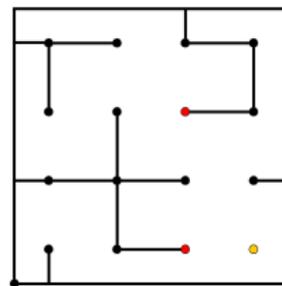
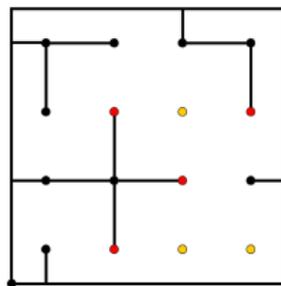
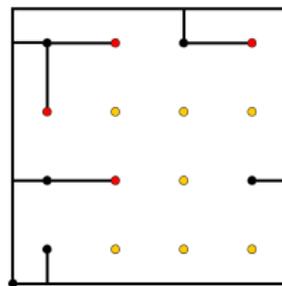


Modèle de piles de sable abélien :

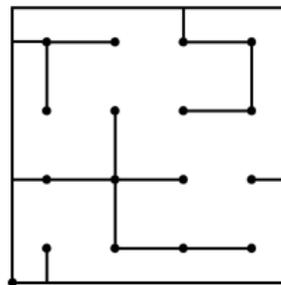
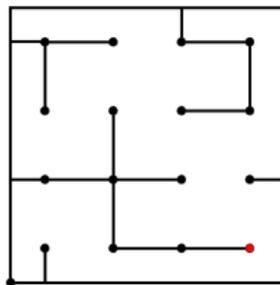
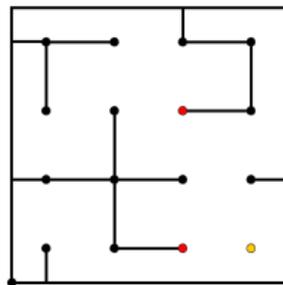
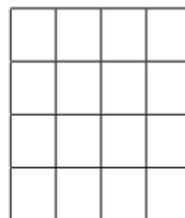
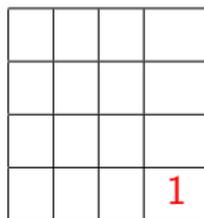
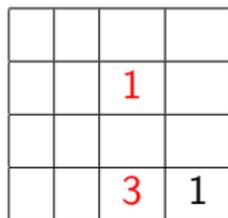
	3		2
2	3	1	2
	4	3	
	2	3	1

	3	1	2
		3	
	2	3	1

		1	
		3	1



Modèle de piles de sable abélien :



Plan

- 1 Laplacien et arbres couvrants d'un graphe
- 2 Modèles statistiques apparentés
- 3 Théorème de Kirchhoff
- 4 Généralisations du théorème

Théorème de Kirchhoff :

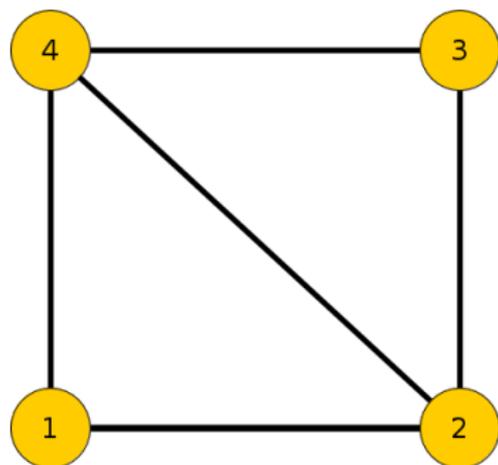
Théorème :

Soit G un graphe à n vertex, et Δ_G son laplacien. Alors $\det' \Delta_G$ compte le nombre d'arbres couvrants T_G de G ,

où $\det' \Delta_G$ est le déterminant *réduit* du graphe, soit

- le produit normalisé des valeurs propres non nulles : $\frac{1}{n} \lambda_1 \dots \lambda_{n-1}$ (où $\lambda_n = 0$), ou encore
- la valeur absolue de n'importe quel mineur d'ordre $n - 1$ de Δ_G

Théorème de Kirchhoff : Exemple



$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Valeurs propres :

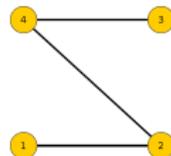
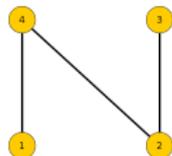
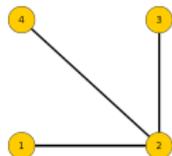
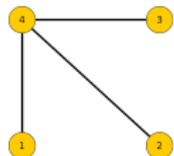
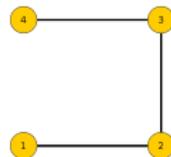
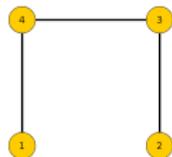
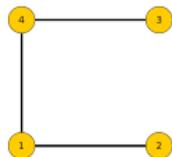
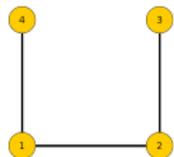
$$\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 4, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = 0 \Rightarrow T_G = \frac{1}{4} (4 \times 4 \times 2) = 8$$

Mineurs :

$$T_G = \left| \det \Delta_{1,3,4}^{2,3,4} \right| = \left| -6 - 1 - 2 + 1 \right| = 8$$

Théorème de Kirchhoff : Exemple

Arbres couvrants :



Théorème de Kirchhoff : Preuve

Ingrédients :

- La matrice d'incidence d , définie par

$$d_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si le vertex } j \text{ est l'extrémité de l'arête } i, \\ -1 & \text{si le vertex } j \text{ est l'origine de l'arête } i, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- Sa matrice duale d^* , définie par

$$d_{i,j}^* = \begin{cases} 1 & \text{si le vertex } i \text{ est l'extrémité de l'arête } j, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La formule de Cauchy-Binet : $\det(A^*A) = \sum_B \det(B^*) \det(B)$, où B est un mineur maximal de A

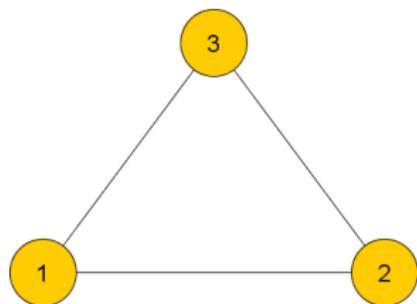
Théorème de Kirchhoff : Preuve

Lemme :

$$\Delta = d^* d$$

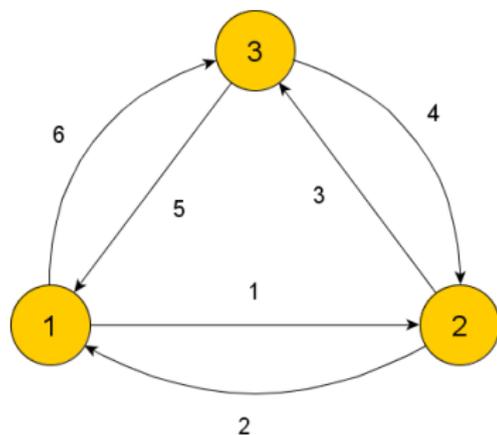
Preuve du théorème :

- $\det' \Delta = \det \Delta_{\bar{1}}^{\bar{1}} = \sum_B \det(B^*) \det(B)$
- Choix de B tels que $\det(B^*) \neq 0$ et $\det(B) \neq 0$: arbres couvrants



$$\Delta = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

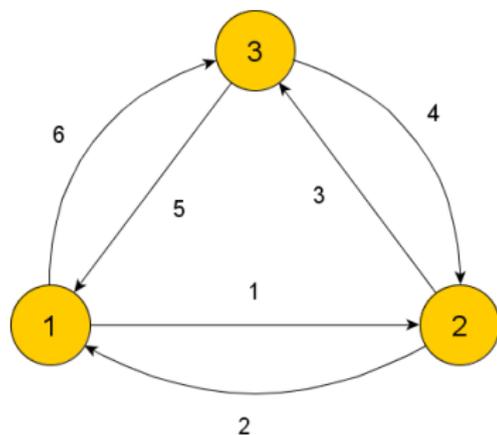
Théorème de Kirchhoff : Preuve



$$d = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$, \quad d^* = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

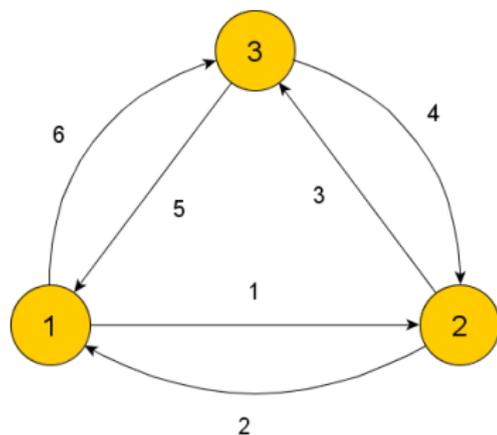
Théorème de Kirchhoff : Preuve



$\det' \Delta = \det \Delta \begin{matrix} \bar{1} \\ 1 \end{matrix} \Rightarrow$
Suppression de L1 et C1

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

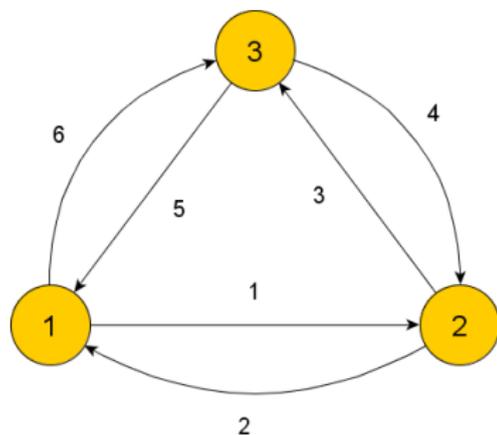
Théorème de Kirchhoff : Preuve



$\det' \Delta = \det \Delta \bar{1}_1 \Rightarrow$
Suppression de L1 et C1
Contributions non triviales à la
somme : B_{13} , B_{16} et B_{46}

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème de Kirchhoff : Preuve

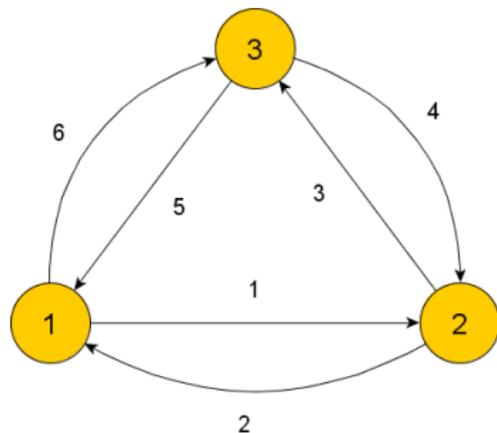


$\det' \Delta = \det \Delta \begin{smallmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow$
Suppression de L1 et C1
Contributions non triviales à la
somme : B_{13} , B_{16} et B_{46}

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$d^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème de Kirchhoff : Preuve

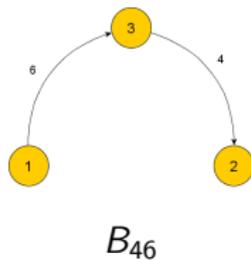
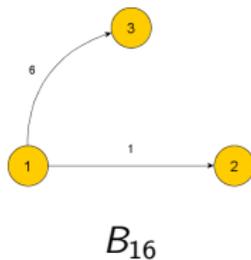
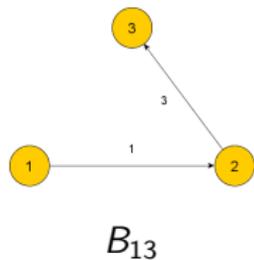


$\det' \Delta = \det \Delta \begin{smallmatrix} \bar{1} \\ 1 \end{smallmatrix} \Rightarrow$
Suppression de L1 et C1
Contributions non triviales à la
somme : B_{13} , B_{16} et B_{46}

$$d = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad d^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Théorème de Kirchhoff : Preuve

Arbres couvrants :



Plan

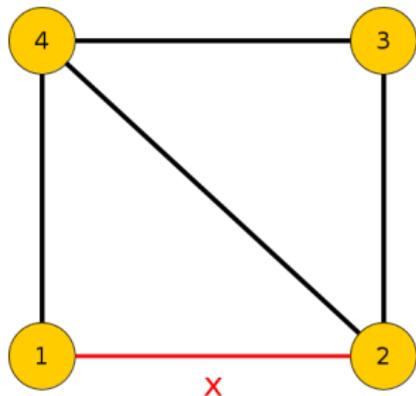
- 1 Laplacien et arbres couvrants d'un graphe
- 2 Modèles statistiques apparentés
- 3 Théorème de Kirchhoff
- 4 Généralisations du théorème**

Généralisations du théorème de Kirchhoff :

Énumération explicite des arbres :

- Attribution d'un poids générique x_e à chaque arête e du graphe
- Modification du laplacien en conséquence : $\Delta \rightarrow \tilde{\Delta}$
- $\det' \tilde{\Delta}$ est un polynôme dans les variables x_e comptant les arbres

Retour à l'exemple :



$$\tilde{\Delta} = \begin{pmatrix} x+1 & -x & 0 & -1 \\ -x & x+2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Énumération explicite des arbres :

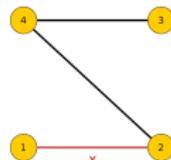
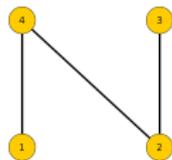
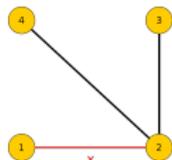
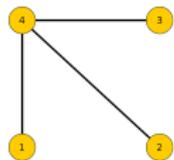
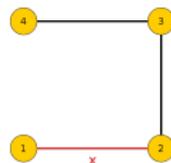
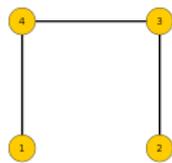
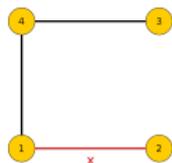
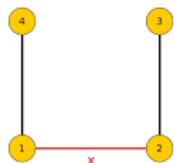
Poids x sur l'arête $1 \leftrightarrow 2$

Énumération explicite des arbres :

Poids x sur l'arête $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow \det' \tilde{\Delta} = 3 + 5x$

Énumération explicite des arbres :

Poids x sur l'arête $1 \leftrightarrow 2 \Rightarrow \det' \tilde{\Delta} = 3 + 5x \Rightarrow 5$ arbres possèdent l'arête $1 \leftrightarrow 2$:



Généralisations du théorème de Kirchhoff :

Théorème de Forman-Kenyon :

Le déterminant du laplacien fibré compte les forêts couvrantes d'unicycles

Laplacien fibré :

- À chaque vertex v , on attache un espace vectoriel $V_v \simeq V$
- Fibré vectoriel : $V_G \simeq V^{|G|}$
- Section : $f \in V_G$

Théorème de Forman-Kenyon :

Laplacien fibré usuel $\Delta : V_G \longrightarrow V_G :$

$$\Delta f(v) = \sum_{w \sim v} [f(v) - f(w)]$$

Théorème de Forman-Kenyon :

Laplacien fibré usuel $\Delta : V_G \rightarrow V_G$:

$$\Delta f(v) = \sum_{w \sim v} [f(v) - f(w)]$$

Connexion :

Isomorphisme $\phi_{v,w}$ pour toute arête $e = vw$ de G , tel que $\phi_{w,v} = \phi_{v,w}^{-1}$

Théorème de Forman-Kenyon :

Laplacien fibré usuel $\Delta : V_G \rightarrow V_G$:

$$\Delta f(v) = \sum_{w \sim v} [f(v) - f(w)]$$

Connexion :

Isomorphisme $\phi_{v,w}$ pour toute arête $e = vw$ de G , tel que $\phi_{w,v} = \phi_{v,w}^{-1}$

Laplacien fibré avec connexion :

$$\Delta f(v) = \sum_{w \sim v} [f(v) - \phi_{w,v} f(w)]$$

Théorème de Forman-Kenyon :

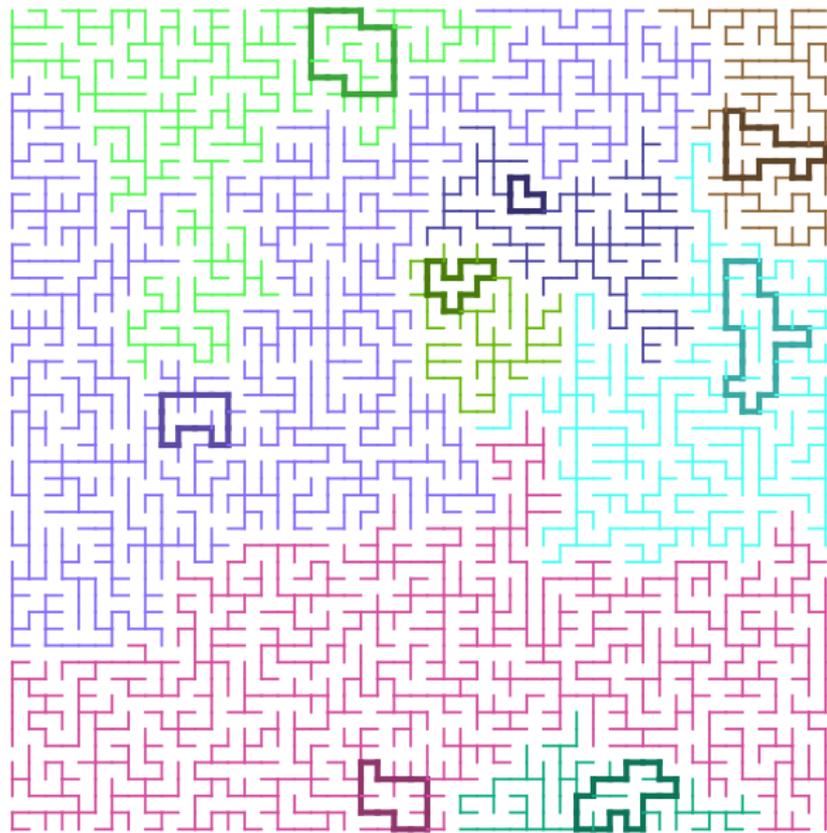
Théorème :

Pour $V = \mathbb{C}$ et une connexion \mathbb{C}^* ,

$$\det \Delta = \sum_{\text{CRSF}} \prod_{\text{cycles } \gamma} (2 - \omega_\gamma - \omega_\gamma^{-1}) \quad ,$$

où

- une CRSF est une forêt couvrante d'unicycles (CRT)
- ω_γ est la *monodromie* du cycle γ , c'ad le produit des $\phi_{v,w}$ le long de ses arêtes



Galerie de Richard Kenyon : <http://www.math.brown.edu/~rkenyon/>