Relations et monoïdes

Exercice 1 On dit qu'une relation $\mathcal{R}$ sur un ensemble X est *circulaire* si pour tout $x, y, z \in X$, $x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}z$ implique $z\mathcal{R}x$. Montrer qu'une relation est réflexive et circulaire si et seulement si elle est une relation d'équivalence.

Exercice 2 Soit $f\colon E \to F$ une application et soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

1. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
2. Pour tout $x \in E$, notons $\overline{x}$ la classe d'équivalence de x. Montrer que l'application ϕ de $E/\mathcal{R}$ vers $f(E)$ définie par $\phi(\overline{x}) = f(x)$ est bien définie, et qu'il s'agit d'une bijection.

Exercice 3 Soit E un espace vectoriel sur un corps commutatif K et F un sous-espace vectoriel de E.

1. On définit sur E la relation $\mathcal{R}$ par $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y \in F$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence compatible avec les lois de E (elle est appelée la *relation d'équivalence associée à* F).
2. Déterminer la classe du vecteur nul de E.
3. Réciproquement, montrer que toute relation d'équivalence sur un sous-ensemble de E qui est compatible avec la structure d'espace vectoriel, est la relation associée à un sous-espace de E.

Exercice 4 Soit E un ensemble et $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur E. On dit qu'une partie S de E est *saturée modulo* $\mathcal{R}$ si $\overline{x} \subset S$ pour tout $x \in S$. On appelle *partie saturée engendrée par une partie* A de E, et on note $\mathsf{sat}(A)$, la plus petite partie saturée de E contenant A.

1. La réunion et l'intersection de parties saturées sont-elles saturées ?
2. Montrer que $\mathsf{sat}(A) = \bigcup_{x \in A} \overline{x}$.
3. On suppose que $f\colon E \to F$ est une application. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur E définie par

$$x\mathcal{R}y \iff f(x) = f(y).$$

   (a) Montrer que $S \subset E$ est saturée si et seulement si $f^{-1}(f(S)) = S$.

   (b) Déterminer $\mathsf{sat}(A)$ pour une partie quelconque A de E.

(c) On suppose que f est surjective. Montrer que l'ensemble des parties saturées de E est en bijection avec les parties de F.

Exercice 5 Soit $*\colon \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ la loi de composition interne sur $\mathbb{Z}$ définie par

$$a * b = ab - a - b + 2$$

pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Montrer que $(\mathbb{Z}, *)$ est un monoïde commutatif. Quel est l'élément neutre pour $*$?

Exercice 6 Soit X un ensemble et notons M l'ensemble $\mathcal{P}(X \times X)$ des relations sur X. On définit une loi de composition interne $\circ\colon M \times M \to M$ sur M par

$$\mathcal{R} \circ \mathcal{S} = \{(x, y) \in X \times X \mid \exists z \in X \text{ tel que } (x, z) \in \mathcal{R} \text{ et } (z, y) \in \mathcal{S}\}$$

pour toutes relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sur X.

1. Montrer que $(M, \circ)$ est un monoïde.
2. Montrer que l'ensemble X^X des applications de X dans X peut être considéré comme un sous-ensemble de M. Montrer que X^X est un sous-monoïde de $(M, \circ)$.

Exercice 7 Soit M un monoïde. L'ensemble des éléments inversibles de M est-il un sous-monoïde de M ?

Exercice 8 Montrer que si un élément d'un monoïde admet à la fois un inverse à gauche et un inverse à droite, alors ces inverses sont égaux.

Exercice 9 Soit M un ensemble tel que $(M, *, u)$ et $(M, \Box, u)$ soient des monoïdes (ayant le même élément neutre). On suppose que

$$(a * b) \Box (x * y) = (a \Box x) * (b \Box y)$$

pour tout $a, b, x, y \in M$. Montrer que $* = \Box$ et que $(M, *, u)$ est commutatif.

Exercice 10 Soit $(M, *, u)$ un monoïde commutatif tel que $x * x = x$ pour tout $x \in M$. On définit une relation $\mathcal{R}$ sur M par $x \mathcal{R} y$ si $x * y = y$. Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre, u est le plus petit élément de M et pour tout $x, y \in M$, $\mathsf{sup}(x, y) = x * y$.