Correspondance galoisienne

Exercice 1 Soit K le corps des racines de $x^4 - 2$ sur $\mathbb{Q}$. Le groupe de Galois $\mathsf{Gal}(K/\mathbb{Q})$ est le groupe diédral d'ordre 8 (le groupe des isométries du carré). Déterminer les sous-groupes de $\mathsf{Gal}(K/\mathbb{Q})$ et les sous-extensions de $K/\mathbb{Q}$ correspondantes en précisant celles qui sont galoisiennes sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 2 Soit ζ une racine primitive 6ème de l'unité et posons $K := \mathbb{Q}(\zeta)$.

1. Calculer le degré de K sur $\mathbb{Q}$
2. Soit L le corps des racines de $(x^2 - 2)(x^3 - 2)$ sur $\mathbb{Q}$. Montrer que L est une extension galoisienne de K telle que $\mathsf{Gal}(L/K)$ soit cyclique.
3. Déterminer les sous-corps intermédiaires de L/K.

Exercice 3

1. Soit F un corps de caractéristique différente de 2 et K une extension de F de dimension 2. Montrer que K est une extension galoisienne de F.
2. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt[4]{2})$ n'est pas une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.
3. Donner un exemple de corps L, K et F tels que L est une extension galoisienne de K, K est une extension galoisienne de F, mais L n'est pas une extension galoisienne de F.

Exercice 4

1. Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.
2. Déterminer $\mathsf{Gal}(\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})/\mathbb{Q})$.

Exercice 5 Soit $u \in \mathbb{R}$ tel que $u^4 = 5$ et posons $v = u + u\,\mathsf{i}$. Montrer que $\mathbb{Q}(v)$ n'est pas une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$.

Exercice 6 Soit p un nombre premier. Posons $\zeta = \mathsf{e}^{2\mathsf{i}\pi/p}$ et $L = \mathbb{Q}(\zeta, \sqrt[p]{2})$.

1. Montrer que L est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de dimension $p(p-1)$.
2. Montrer que $\mathsf{Gal}(L/\mathbb{Q})$ contient 2 sous-groupes N et H tels que :
   (a) N est un sous-groupe normal de $\mathsf{Gal}(L/\mathbb{Q})$ d'ordre p ;
   (b) H est d'ordre $p-1$;
   (c) $N \cap H = \{\mathsf{id}_{\mathbb{Q}}\}$ et $\mathsf{Gal}(L/\mathbb{Q}) = N \cdot H$.

Exercice 7 Soit K une extension galoisienne de F telle que

$$\mathsf{Gal}(K/F) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}.$$

Montrer que si la caractéristique de F est différente de 2, alors $K = F(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ pour certains $a, b \in F$.

Exercice 8 Soit K une extension galoisienne de F et $\alpha \in K$. Notons N le corps des racines de $\mathsf{min}(\alpha, F)$ sur F et H le groupe de Galois de K sur $F(\alpha)$. Montrer que

$$\mathsf{Gal}(K/N) = \bigcap_{g \in \mathsf{Gal}(K/F)} gHg^{-1}.$$

Exercice 9 Soit $K = F(\alpha)$ une extension galoisienne de F et L une extension finie de F.

1. Montrer que $L(\alpha)$ est une extension galoisienne de L.
2. Montrer que si $\sigma \in \mathsf{Gal}(L(\alpha)/L)$, alors $\sigma|_K$ est un élément de $\mathsf{Gal}(K/F)$.
3. Montrer que l'application

$$\theta\colon \mathsf{Gal}(L(\alpha)/L) \to \mathsf{Gal}(K/F)\colon \sigma \mapsto \sigma|_K$$

   est un homomorphisme injectif de groupes et que son image est égal à $\mathsf{Gal}(K/E)$ pour un certain sous-corps E de K sur F.
4. Montrer que $E = K \cap L$ et en déduire que $[L(\alpha) : L] = [K : K \cap L]$.
5. On suppose que L est une extension galoisienne de F telle que $K \cap L = F$. Montrer que $L(\alpha)$ est une extension galoisienne de F et que $\mathsf{Gal}(L(\alpha)/F)$ est isomorphe à $\mathsf{Gal}(K/F) \times \mathsf{Gal}(L/F)$ (considérer l'application $\sigma \mapsto (\sigma|_K, \sigma|_L)$).

Exercice 10 Montrer qu'une extension séparable finie $F(\alpha)$ d'un corps F est contenue dans une extension galoisienne de F.