MAT 1231 : Algèbre multilinéaire et théorie des groupes

Groupes: définitions

Exercice 1 Montrer que l'ensemble des applications $\mathbb{R} \to \mathbb{R}\colon x \mapsto ax + b$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, est un groupe pour la composition.

Exercice 2 Définir tous les groupes d'ordre 2,3,4.

Exercice 3 Montrer que dans un groupe à $2n$ éléments, il existe un élément distinct de l'unité qui est égal à son propre inverse.

Exercice 4 Montrer que tout élément b d'un groupe tel que $bb = b$ est l'élément neutre.

Exercice 5 Soit S un ensemble non vide avec une opération binaire associative vérifiant la simplification à droite et la simplification à gauche. Montrer que si S est fini, alors S est un groupe, mais que si S est infini, alors S n'est pas nécessairement un groupe.

Exercice 6 Soit G un ensemble muni d'une opération binaire de multiplication associative tel que

1. $\exists u \in G$ tel que $\forall x \in G$, $ux = x$
2. $\forall x \in G$, $\exists x' \in G$ tel que $x'x = u$

Montrer que G vérifie la simplification à gauche. En déduire que G est un groupe.

Exercice 7 Montrer que si une opération binaire de multiplication dans un ensemble non vide G est associative et si toutes les équations de la forme $xa = b$ et $ay = b$ ont des solutions dans G, alors G est un groupe.
Indication : Choisir un a_0 quelconque dans G, montrer qu'une solution u de $xa_0 = a_0$ est un élément neutre à gauche, et appliquer l'exercice 6.

Exercice 8 Montrer que les axiomes suivants définissent un groupe abélien (additif) :

1. $(a + b) + c = a + (c + b)$ pour tout a, b, c ;
2. il existe un élément 0 tel que $0 + a = a$ pour tout a ;
3. pour tout a, il existe un élément a' tel que $a + a' = 0$.

Exercice 9 Soit G un groupe et H une partie de G. Montrer que H est un sous-groupe de G si et seulement si H est non vide et $xy^{-1} \in H$ pour tout $x, y \in H$.

Exercice 10 Soit G un groupe et H une partie finie non vide de G telle que $xy \in H$ pour tout $x, y \in H$. Alors H est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 11 Montrer qu'un groupe non trivial qui n'a pas de sous-groupes non triviaux est nécessairement cyclique et d'ordre premier.

Exercice 12 Soit G un groupe et $S \subset G$. Montrer que S est un sous-groupe de G si et seulement si S est un groupe et l'application d'insertion $i\colon S \to G\colon x \mapsto x$ est un morphisme de groupes.

Exercice 13 Soit K un corps et

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid \alpha \in K \right\} \subset \mathsf{GL}_2(K).$$

Montrer que H est un sous-groupe de $\mathsf{GL}_2(K)$ et qu'il est isomorphe à K.

Exercice 14 Montrer que $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ est engendré par les matrices

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix},$$

pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$.