Polynômes résolubles par radicaux

Exercice 1 Résoudre l'équation $x^{11} = 1$ par radicaux.

Exercice 2 Exprimer les polynômes suivants en fonction des polynômes symétriques élémentaires $s_1, s_2, \dots$:

1. $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$;
2. $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + x_4^3$;
3. $[(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_2 - x_3)]^2$.

Exercice 3 Soit

$$\begin{aligned} P(X) &= (X - x_1)(X - x_2)(X - x_3)(X - x_4) \\ &= X^4 - s_1 X^3 + s_2 X - s_3 X + s_4, \end{aligned}$$

et posons

$$\begin{aligned} u_1 &= (x_1 + x_2)(x_3 + x_4), & v_1 &= x_1 x_2 + x_3 x_4, \\ u_2 &= (x_1 + x_3)(x_2 + x_4), & v_2 &= x_1 x_3 + x_2 x_4, \\ u_3 &= (x_1 + x_4)(x_2 + x_3), & v_3 &= x_1 x_4 + x_2 x_3. \end{aligned}$$

1. Montrer que le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines u_1, u_2, u_3 est égal à
$$X^3 - 2s_2 X^2 + (s_2^2 + s_1 s_3 - 4s_4)X - (s_1 s_2 s_3 - s_1^2 s_4 - s_3^2).$$
2. Montrer que le polynôme unitaire de degré 3 ayant pour racines v_1, v_2, v_3 est égal à
$$X^3 - s_2 X^2 + (s_1 s_3 - 4s_4)X - (s_1^2 s_4 - 4s_2 s_4 + s_3^2).$$

Exercice 4 Supposons que x_1, x_2, x_3 soient les racines du polynôme $X^3 + pX + q$. Montrer que

$$\Big(X-(x_1-x_2)^2\Big)\Big(X-(x_1-x_3)^2\Big)\Big(X-(x_2-x_3)^2\Big) = X^3+6pX^2+9p^2X+(4p^3+27q^2).$$

Exercice 5 Calculer le groupe de Galois des polynômes suivants sur $\mathbb{Q}$:

1. $X^4 + X^2 - 6$;
2. $X^4 + X^2 + X + 1$;
3. $4X^4 + 12X + 9$.