Classes latérales, sous-groupes normaux et groupes quotients

Exercice 1 Soit $h_1\colon G_1 \to H$ et $h_2\colon G_2 \to H$ des morphismes de groupes. Posons

$$K := \{(x_1, x_2) \in G_1 \times G_2 \mid h_1(x_1) = h_2(x_2)\}.$$

1. Montrer que K est un sous-groupe de $G_1 \times G_2$.
2. Prouver que l'application $h\colon K \to H\colon (x_1, x_2) \mapsto h_1(x_1)$ est un morphisme de groupes.
3. Prouver que $\mathsf{ker}(h) = \mathsf{ker}(h_1) \times \mathsf{ker}(h_2)$.

Exercice 2 Soit H un sous-groupe d'un groupe G et considérons

$$G/H = \{xH \mid x \in G\}.$$

On définit pour tout $y \in G$, une application $f_y\colon G/H \to G/H\colon xH \mapsto yxH$.

1. Montrer que $f_y \in \mathsf{S}(G/H)$ pour tout $y \in G$ ($\mathsf{S}(G/H)$ désigne l'ensemble des permutations de G/H).
2. Vérifier que l'application $j\colon G \to \mathsf{S}(G/H)\colon y \mapsto f_y$ est un morphisme de groupes.
3. Décrire $\mathsf{ker}(j)$.
4. Montre que $\mathsf{ker}(j)$ est le plus grand sous-groupe normal de G contenu dans H.

Exercice 3 Soit G un groupe et $g \in G$ un élément d'ordre 2. Montrer que $\langle g \rangle$ est un sous-groupe normal de G si et seulement si g est dans le centre $\mathsf{Z}(G)$ de G.

Exercice 4 Soit G un groupe. Montrer que $\mathsf{Z}(G)$ est un sous-groupe normal de G.

Exercice 5 Soit H un sous-groupe d'un groupe G et posons

$$\mathsf{N}(H) := \{a \in G \mid aHa^{-1} = H\}.$$

Montrer que $\mathsf{N}(H)$ est le plus grand sous-groupe K de G tel que H est un sous-groupe normal de K.

Exercice 6 Soit G_1 et G_2 deux groupes et posons $N = \{(x, 1) \mid x \in G_1\}$. Montrer que N est un sous-groupe normal de $G_1 \times G_2$ et que $(G_1 \times G_2)/N$ est isomorphe à G_2.

Exercice 7

1. Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
2. Donner les sous-groupes du groupe diédral D_6. Préciser s'ils sont normaux et dans ce cas, donner le groupe quotient.

Exercice 8 Pour $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on pose

$$M(x, y, z) := \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $G = \{M(x, y, z) \mid (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrer que G est un sous-groupe du groupe des matrices inversibles $\mathsf{GL}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer le centre $\mathsf{Z}(G)$ de G.
3. Montrer que toute classe modulo $\mathsf{Z}(G)$ est représentée par une unique matrice de la forme $M(x, y, 0)$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.
4. Montrer que l'application $\phi: \mathbb{R}^2 \to G/\mathsf{Z}(G): (x, y) \mapsto M(x, y, 0)\mathsf{Z}(G)$ est un isomorphisme.

Exercice 9 Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 est normal.

Exercice 10 On considère le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1. Soient $p_1, p_2, q \in \mathbb{Z}$ tels que p_i et q soient premiers entre-eux et $q > 0$. Montrer que
$$\frac{p_1}{q} + \mathbb{Z} = \frac{p_2}{q} + \mathbb{Z} \quad \text{si et seulement si } q \text{ divise } p_1 - p_2.$$
2. Soit $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Montrer que si $2x = 0$ alors $x = \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ contient un seul sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Soit H l'unique sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que
$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$
(Considérer l'application $f: \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}: x \mapsto 2x$.)

Exercice 11 Soit G un groupe. Montrer que si $G/\mathsf{Z}(G)$ est cyclique, alors G est abélien.

Exercice 12 Soit G un groupe et H, K des sous-groupes de G tels que $H \triangleleft G$.

1. Montrer que $H \cdot K = K \cdot H = H \vee K$.
2. On suppose que $K \triangleleft G$ et $H \cap K = \{1\}$. Montrer que $hk = kh$ pour tout $h \in H$, $k \in K$ et que l'application $\theta: H \times K \to G: (h, k) \mapsto hk$ est un monomorphisme. En déduire que $G \cong H \times K$ si en plus $G = H \vee K$.