MAT 1231 : Algèbre multilinéaire et théorie des groupes

Groupes symétriques

Exercice 1 Soit $\sigma \in \mathsf{S}_n$. Montrer que σ est un produit de transpositions parmi $(1,2),(1,3),\ldots,(1,n)$.

Exercice 2 Décrire S_4 en écrivant les permutations sous la forme d'un produit de cycles disjoints et en précisant les permutations paires et impaires. L'ensemble des permutations impaires est-il un sous-groupe de S_4.

Exercice 3 Soit $\sigma \in \mathsf{S}_n$ un cycle de longueur k. Vérifier que l'ordre de σ est égal à k.

Exercice 4 Soit $s \in \mathsf{S}_9$ avec

$$s = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 8 & 7 & 5 & 9 & 2 & 1 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

1. Décomposer s en produit de cycles disjoints.
2. Trouver l'ordre de s.

Exercice 5 Soit $\sigma = (1,2,3)$ et $\tau = (1,2)$ dans S_3.

1. Vérifier que $\mathsf{S}_3 = \{\mathsf{id}, \sigma, \sigma^2, \tau, \tau\sigma, \tau\sigma^2\}$, et que $\sigma^3 = \mathsf{id} = \tau^2$ et $\sigma\tau = \tau\sigma^2$.
2. Utiliser le 1. pour remplir la table de multiplication de S_3.

Exercice 6 Soit $\sigma \in \mathsf{S}_n$. Montrer que $\sigma^2 = \mathsf{id}$ si et seulement si σ est un produit de transpositions disjointes.

Exercice 7 On considère les sous-groupes

$$\begin{array}{rcl} G & = & \{\mathsf{id}, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2)\} \\ H & = & \{\mathsf{id}, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\} \end{array}$$

de S_4.

1. Supposons que f soit un morphisme de groupes de H dans G. Montrer que pour tout $s \in H$, $f(s)^2 = \mathsf{id}$.
2. Démontrer que les groupes H et G ne sont pas isomorphes.

Exercice 8 Soit $s \in \mathsf{S}_4$.

1. Montrer que si $s \circ (1,2) = (1,2) \circ s$, alors $\{s(3), s(4)\} = \{3,4\}$.

2. Montrer que si $s \circ (1,2) = (1,2) \circ s$ et $s \circ (1,3) = (1,3) \circ s$, alors $s = \mathsf{id}$.

Exercice 9 Montrer que si G est un groupe symétrique contenant une permutation impaire, alors G est un groupe d'ordre pair.