

Dualité

Exercice 1 Dans \mathbb{R}^3 , on considère la base $e_1 = (1, 1, 1)$, $e_2 = (0, 1, 1)$, $e_3 = (0, 0, 1)$.

1. Donnez les matrices $\text{can}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})_e$, ${}_e(\text{Id}_{\mathbb{R}^3})_{\text{can}}$, $\text{can}^*(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}^t)_{e^*}$, ${}_{e^*}(\text{Id}_{\mathbb{R}^3}^t)_{\text{can}^*}$.
2. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, calculez $e_1^*(x)$, $e_2^*(x)$, $e_3^*(x)$. Si

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

calculez les coordonnées de φ dans la base e_1^*, e_2^*, e_3^* .

Exercice 2 Si $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'un \mathbb{K} -espace E , montrez que

$$f = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$$

est encore une base et décrivez la base duale en fonction de e_1^*, e_2^*, e_3^* .

Exercice 3 Montrez que si (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de \mathbb{C}^2 comme \mathbb{R} -espace et $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, la suite

$$(e_1^* + \lambda_2 e_2^* + \lambda_3 e_3^* + \lambda_4 e_4^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$$

est la base duale de la base

$$(e_1, e_2 - \lambda_2 e_1, e_3 - \lambda_3 e_1, e_4 - \lambda_4 e_1)$$

de \mathbb{C}^2 .

Exercice 4 Sur $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, on considère la base formée de

$$P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2, P_3 = X + 3X^2,$$

et la forme linéaire

$$\varphi: \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \rightarrow \mathbb{R}: a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto a_0 + a_1 b + a_2 b,$$

pour $b \in \mathbb{R}$. Donnez les coordonnées de φ dans la base duale de (P_1, P_2, P_3) .

Exercice 5 Justifiez les égalités suivantes pour des sous-espaces V_1 et V_2 d'un espace de dimension finie E

$$(V_1 + V_2)^\circ = V_1^\circ \cap V_2^\circ \text{ et } (V_1 \cap V_2)^\circ = V_1^\circ + V_2^\circ.$$

Exercice 6 Dans chacune des situations envisagées ci-dessous, donnez une base de V° , en décrivant les formes linéaires concernées comme polynômes homogènes de degré un.

1. $V = \text{sev}\langle(1, 1, 1, 1), (0, 1, 2, 3)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$;
2. $V = \{(u, 3u + v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
3. $V = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \mid \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{R}^5$;
4. $V = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{array}{l} x + iy + (1 + i)z - t = 0 \\ x + y = 0 \\ (1 + i)x + (i - 1)z - it = 0 \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{C}^{2 \times 2}$ comme \mathbb{C} -espace ;
5. $V = \text{sev}\langle 1 + iX^2, 1 + iX + X^3, (1 + i) - X + iX^2 + iX^3 \rangle \subseteq \mathbb{C}[X]_{\leq 3}$ comme \mathbb{C} -espace.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel muni d'une base (e_1, \dots, e_n) , et $A: E \rightarrow E$ l'opérateur linéaire tel que $A(e_i) = e_{i+1}$, pour $i \in \{1, \dots, n - 1\}$ et $A(e_n) = e_1$. Décrivez l'opérateur A^t par ses valeurs sur les e_i^* ($i \in \{1, \dots, n\}$).

Exercice 8 Soit $A: E \rightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie sur le corps \mathbb{K} .

1. Justifiez les formules $\text{im}(A^t) = (\ker(A))^\circ$ et $\ker(A^t) = (\text{im}(A))^\circ$.
2. Montrez que A^t est injective (surjective) si et seulement si A est surjective (injective).

Exercice 9 Pour les applications linéaires décrites ci-dessous, donnez l'image par la transposée d'un élément quelconque du domaine de cette transposée. Donnez une base de $\ker(A^t)$ et de $\text{im}(A^t)$.

1. $A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4: (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_1, x_1, x_1 + x_2 + x_3)$;
2. $A: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}: z \mapsto \bar{z}$ (comme \mathbb{R} -espace, bien sûr !)
3. $A: \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \rightarrow \mathbb{R}[X]_{\leq 3}: P(X) \mapsto P(1) + (X - 1)P'(1) + \frac{1}{2}(X - 1)^2P''(1)$.