

Actions de groupes

Exercice 1 Soit G le groupe des isométries directes de l'espace laissant fixe le cube.

1. En utilisant le théorème orbite-stabilisateur, montrer que l'ordre de G est égal à 24.
2. En considérant l'action de G sur les diagonales du cube, montrer que G est isomorphe à S_4 .

Exercice 2 En utilisant le théorème du comptage, compter le nombre de cubes distincts obtenus quand on colore les faces soit en rouge, soit en vert.

Exercice 3 Soit G le groupe des isométries directes de l'espace laissant fixe le tétraèdre.

1. En utilisant le théorème orbite-stabilisateur, montrer que l'ordre de G est égal à 12.
2. En considérant l'action sur les faces (ou sur les sommets), montrer que G est isomorphe à A_4 .

Exercice 4 On considère des cubes avec une ligne sur chaque face passant par les milieux de côtés opposés, ces lignes étant rouges ou vertes, telles que aucune de ces lignes ne se rencontre. Compter le nombre de tels cubes distincts.

Exercice 5 Compter les isométries directes de l'espace fixant

puis compter toutes les isométries.

Exercice 6 Calculer le nombre de cubes obtenus quand on peint chaque arête soit en blanc, soit en noir.