Algèbres déployées

Exercice 1 On considère l'algèbre A des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients dans un corps K.

1. Calculer le polynôme minimal de la matrice
$$a = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
et vérifier qu'il est égal à son polynôme caractéristique.
2. Montrer que, pour tout $b \in A$ tel que $b \notin K \cdot I$, le polynôme minimal de b est égal à son polynôme caractéristique.
3. Montrer que A n'est déployée par aucune extension.
4. Soit D la sous-algèbre de A des matrices diagonales. Montrer que D est déployée (on dit aussi algèbre diagonale au lieu de algèbre déployée).

Exercice 2 Soit $A = \mathbb{Q}(\sqrt{2}) \times \mathbb{Q}$.

1. Montrer que A n'est pas déployée.
2. Calculer l'ensemble des homomorphismes de $\mathbb{Q}$-algèbres de A dans $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ et en déduire que A est déployée par $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

Exercice 3 Faire le lien entre le Lemme Chinois vu en théorie des nombres : pour des entiers $n_1, \ldots, n_r$ premiers entre-eux deux à deux, on a un isomorphisme

$$\mathbb{Z}/(n_1 \ldots n_r\mathbb{Z}) \to (\mathbb{Z}/n_1\mathbb{Z}) \times \ldots \times (\mathbb{Z}/n_r\mathbb{Z}) \colon x + (n_1 \ldots n_r\mathbb{Z}) \mapsto (x + n_1\mathbb{Z}, \ldots, x + n_r\mathbb{Z}),$$

et le Lemme Chinois énoncé pour les algèbres.

Exercice 4 Soit A un anneau de Boole (i.e. $x^2 = x$ pour tout $x \in A$).

1. Montrer que A est une $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-algèbre déployée.
2. Soit X un ensemble. Notons $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X et Δ la différence symétrique. Montrer que $(\mathcal{P}(X), \Delta, \cap)$ est un anneau de Boole.
3. Montrer que si A est intègre, alors A est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En déduire que si $\mathcal{Q}$ est un idéal premier de A et $x, y \notin \mathcal{Q}$, alors $x + y \in \mathcal{Q}$.

4. Montrer que tout anneau de Boole se plonge dans un $\mathcal{P}(X)$ pour un certain ensemble X.

   Indication : Montrer que l'application

   $$\mathsf{D}\colon A \to \mathcal{P}(\mathsf{Spec}(A))\colon x \mapsto \{\mathcal{Q} \in \mathsf{Spec}(A) \mid x \notin \mathcal{Q}\}$$

   est un homomorphisme d'anneaux injectif (pour l'injectivité, utiliser le fait que l'intersection de tous les idéaux premiers d'un anneau est égale au nilradical de cet anneau).

Exercice 5 Soit G un groupe commutatif fini. On muni le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^G$ du produit de convolution : pour $f, g \in \mathbb{C}^G$ et $x \in G$,

$$(f \star g)(x) = \sum_{y \in G} f(y)g(x-y)$$

(le produit de convolution est déterminé par la relation $e_x \star e_y = e_{x+y}$ où $(e_x)_{x \in G}$ est la base canonique de $\mathbb{C}^G$: $e_x(x) = 1$ et $e_x(y) = 0$ pour tout $y \neq x$). Montrer que A est déployée.

Exercice 6 Soit K un corps de caractéristique différente de 2 et $a \in K \setminus \{0\}$. Posons $A = K[X]/(X^2 - a)$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que A soit un corps.
2. Montrer que A est déployée par $K(\sqrt{a})$ (en particulier, si a est un carré dans K, alors A est déployée).

Exercice 7 Soient A et B des K-algèbres de dimension finie.

1. Montrer que pour toute extension L de K, il existe un isomorphisme entre $\mathsf{Hom}_{K-\mathsf{alg}}(A \otimes_K B, L)$ et $\mathsf{Hom}_{K-\mathsf{alg}}(A, L) \times \mathsf{Hom}_{K-\mathsf{alg}}(B, L)$.
2. Retrouver le résultat suivant : si A et B sont déployées pas L, alors il en est de même pour $A \otimes_K B$.