Caractères et algèbres de groupes

Exercice 1 Soient G un groupe fini et H un sous-groupe normal de G.

1. Soit $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ une représentation de caractère χ_ρ tel que $H \subset \mathsf{ker}(\rho)$. Montrer que l'on peut définir une représentation $\tilde{\rho}\colon G/H \to \mathsf{GL}(V)\colon gH \mapsto \rho(g)$. Décrire le caractère de $\tilde{\rho}$.
2. Montrer que l'on a une bijection
$$\left\{\begin{array}{l}\text{caractères } \chi_\rho \text{ de } G\\ \text{tel que } H \subset \mathsf{ker}(\rho)\end{array}\right\} \leftrightarrow \{\text{caractères de } G/H\}.$$
3. Montrer que les caractères irréductibles se correspondent par cette bijection.

Exercice 2 Soit G un groupe fini et notons G' le groupe dérivé de G, i.e. le sous-groupe de G engendré par les $xyx^{-1}y^{-1}$ pour tout $x, y \in G$.

1. Montrer que G' est normal dans G et que G/G' est abélien.
2. Soit ρ une représentation de degré 1. Montrer que $G' \subset \mathsf{ker}(\rho)$.
3. Utiliser l'Exercice 1 pour montrer que G possède exactement $(G\colon G')$ caractères de degré 1.

Exercice 3 Soit G un groupe simple fini non abélien.

1. Montrer que tout caractère de degré 1 est trivial.
   <u>Indication</u> : Utiliser la question 2. de l'Exercice 2
2. Soit $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ une représentation. Utiliser la question 1. pour montrer que $\mathsf{det}(\rho(g)) = 1$ pour tout $g \in G$.

Exercice 4 Soient G un groupe fini et $C_1, \dots C_r$ ses classes de conjugaison. Pour tout i, on pose $u_i = \sum_{h \in C_i} h$. Montrer que les u_i forment une base du centre de $\mathbb{C}[G]$.

Exercice 5 On considère le groupe diédral $\mathsf{D}_3 = \langle R, S \mid R^3 = 1 = S^2, SR = R^2S\rangle$ et les éléments centraux $u_1 = R + R^2$ et $u_2 = S + RS + R^2S$ de $\mathbb{C}[\mathsf{D}_3]$. Montrer que u_1 et u_2 sont des entiers en donnant un polynôme unitaire à coefficient entiers dont u_1 (resp. u_2) est une racine.

Exercice 6 Soit G un groupe fini. On identifie l'espace $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$ des fonctions de G dans $\mathbb{C}$ à l'espace $\mathbb{C}[G]$ en faisant correspondre à chaque fonction f l'élément $\sum_g f(g)g$. Montrer que le produit dans $\mathbb{C}[G]$ correspond au produit de convolution des fonctions dans $\mathcal{F}(G, \mathbb{C})$:

$$(f_1 * f_2)(g) = \sum_{g'} f_1(g') f_2(g'^{-1} g).$$