Représentations induites

Exercice 1 Soient H un sous-groupe d'un groupe G (fini) et W un $\mathbb{C}[H]$-module (à gauche). On pose

$$V = \{f\colon G \to W \mid f(hx) = h \cdot f(x) \text{ pour tout } h \in H, x \in G\}.$$

On a une structure de $\mathbb{C}[G]$-module sur V induite par l'action suivante de G sur V : pour $f \in V$, $s \in G$ et $x \in G$, $(s \cdot f)(x) = f(xs)$.

1. On définit l'application $i\colon W \to V\colon w \mapsto f_w$ où

$$f_w(x) = \begin{cases} x \cdot w & \text{si } x \in H, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

   Montrer que i est une application linéaire injective.

2. Montrer que V est isomorphe à la représentation induite de W.

Exercice 2 Soit H un sous-groupe d'un groupe G. Montrer que la représentation induite de la représentation régulière de H est isomorphe à la représentation régulière de G.

Exercice 3 Soient H un sous-groupe d'un groupe G et χ un caractère irréductible de G. Supposons que $\mathsf{Res}_H^G\ \chi = d_1\psi_1 \oplus \ldots \oplus d_r\psi_r$ pour certains $d_k \in \mathbb{N}$ et des caractères irréductibles ψ_k de H. Montrer que $\sum_k d_k^2 \leq (G\colon H)$ et $\sum_k d_k^2 = (G\colon H)$ si et seulement si $\chi(g) = 0$ pour tout $g \in G \setminus H$.

Exercice 4 Soit G le groupe quaternionien, i.e. le sous-groupe de $\mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ engendré par $x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}$. Notons H le sous-groupe de G engendré par x. Pour toute représentation irréductible de H, écrire la représentation induite comme somme directe de représentations irréductibles de G.