Classes latérales, sous-groupes normaux et groupes quotients

Exercice 1 Déterminer les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Exercice 2 Donner les sous-groupes du groupe diédral D_6. Préciser s'ils sont normaux et dans ce cas, donner le groupe quotient.

Exercice 3 Donner les sous-groupes du groupe quaternionien. Dans le cas où ils sont normaux, donner le groupe quotient.

Exercice 4 Montrer que tout sous-groupe d'indice 2 est normal.

Exercice 5 On considère le groupe quotient $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$.

1. Soit $p_1, p_2, q \in \mathbb{Z}$ tel que p_i et q sont premiers entre-eux et $q > 0$. Montrer que
$$\frac{p_1}{q} + \mathbb{Z} = \frac{p_2}{q} + \mathbb{Z} \quad \text{si et seulement si } q \text{ divise } p_1 - p_2.$$
2. Soit $x \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Montrer que si $2x = 0$ alors $x = \mathbb{Z}$ ou $x = \frac{1}{2} + \mathbb{Z}$.
3. En déduire que $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ contient un seul sous-groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. Soit H l'unique sous-groupe de $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. Montrer que
$$(\mathbb{Q}/\mathbb{Z})/H \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z}.$$

Exercice 6 On considère l'action de A_4 sur $\{1, 2, 3, 4\}$.

1. Montrer que si H est un sous-groupe de A_4 d'ordre 6, alors $|H(x)| \neq 1, 2, 3$ pour tout $x \in \{1, 2, 3, 4\}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de sous-groupe de A_4 d'ordre 6.

<u>Indication</u> : Supposer qu'il existe un sous-groupe H de A_4 et considérer son action sur $\{1, 2, 3, 4\}$. Montrer qu'on obtient une contradiction en utilisant le théorème orbite-stabilisateur.