Dualité

Exercice 1 Dans $\mathbb{R}^3$, on considère la base $e_1 = (1,1,1)$, $e_2 = (0,1,1)$, $e_3 = (0,0,1)$.

1. Donnez les matrices ${}_{\mathsf{can}}(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}^3})_e$, ${}_e(\mathsf{Id}_{\mathbb{R}^3})_{\mathsf{can}}$, ${}_{\mathsf{can}^*}(\mathsf{Id}^t_{\mathbb{R}^3})_{e^*}$, ${}_{e^*}(\mathsf{Id}^t_{\mathbb{R}^3})_{\mathsf{can}^*}$.
2. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, calculez $e_1^\star(x)$, $e_2^\star(x)$, $e_3^\star(x)$. Si

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3,$$

calculez les coordonnées de φ dans la base $e_1^\star, e_2^\star, e_3^\star$.

Exercice 2 Si $e = (e_1, e_2, e_3)$ est une base d'un $\mathbb{K}$-espace E, montrez que

$$f = (e_1, e_1 + e_2, e_1 + e_2 + e_3)$$

est encore une base et décrivez la base duale en fonction de $e_1^\star, e_2^\star, e_3^\star$.

Exercice 3 Montrez que si (e_1, e_2, e_3, e_4) est une base de $\mathbb{C}^2$ comme $\mathbb{R}$-espace et $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$, la suite

$$(e_1^\star + \lambda_2 e_2^\star + \lambda_3 e_3^\star + \lambda_4 e_4^\star, e_2^\star, e_3^\star, e_4^\star)$$

est la base duale de la base

$$(e_1, e_2 - \lambda_2 e_1, e_3 - \lambda_3 e_1, e_4 - \lambda_4 e_1)$$

de $\mathbb{C}^2$.

Exercice 4 Sur $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$, on considère la base formée de

$$P_1 = 1 + X + X^2, P_2 = 1 + 2X + 3X^2, P_3 = X + 3X^2,$$

et la forme linéaire

$$\varphi\colon \mathbb{R}[X]_{\leq 2} \to \mathbb{R}\colon a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto a_0 + a_1 b + a_2 b,$$

pour $b \in \mathbb{R}$. Donnez les coordonnées de φ dans la base duale de (P_1, P_2, P_3).

Exercice 5 Montrez que pour trois espaces vectoriels E, F, G, donnés, on a une bijection naturelle entre

$$\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)) \to \mathsf{Bil}_{\mathbb{K}}(F \times E, G).$$

Exercice 6 Justifiez les égalités suivantes pour des sous-espaces V_1 et V_2 d'un espace de dimension finie E

$$(V_1 + V_2)^0 = V_1^0 \cap V_2^0 \text{ et } (V_1 \cap V_2)^0 = V_1^0 + V_2^0.$$

Exercice 7 Dans chacune des situations envisagées ci-dessous, donnez une base de V^0, en décrivant les formes linéaires concernées comme polynômes homogènes de degré un.

1. $V = \mathsf{sev}\langle(1,1,1,1),(0,1,2,3)\rangle \subseteq \mathbb{R}^4$;
2. $V = \{(u, 3u+v, v) \mid u, v \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$;
3. $V = \left\{(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) \mid \begin{array}{c} 3x_1+2x_2+x_3-x_4-x_5=0 \\ x_1-x_2-x_3-x_4+2x_5=0 \\ -x_1+2x_2+3x_3+x_4-x_5=0 \end{array}\right\} \subseteq \mathbb{R}^5$;
4. $V = \left\{\begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} \mid \begin{array}{c} x+iy+(1+i)z-t=0 \\ x+y=0 \\ (1+i)x+(i-1)z-it=0 \end{array}\right\} \subseteq \mathbb{C}^{2\times 2}$ comme $\mathbb{C}$-espace ;
5. $V = \mathsf{sev}\langle 1+iX^2, 1+iX+X^3, (1+i)-X+iX^2+iX^3\rangle \subseteq \mathbb{C}[X]_{\leq 3}$ comme $\mathbb{C}$-espace.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel muni d'une base $(e_1,\dots,e_n)$, et $A\colon E \to E$ l'opérateur linéaire tel que $A(e_i) = e_{i+1}$, pour $i \in \{1,\dots,n-1\}$ et $A(e_n) = e_1$. Décrivez l'opérateur A^t par ses valeurs sur les $e_i^\star$ ($i \in \{1,\dots,n\}$).

Exercice 9 Soit $A\colon E \to F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie sur le corps $\mathbb{K}$.

1. Justifiez les formules $\mathsf{im}(A^t) = (\mathsf{ker}(A))^0$ et $\mathsf{ker}(A^t) = (\mathsf{im}(A))^0$.
2. Montrez que A^t est injective (surjective) si et seulement si A est surjective (injective).

Exercice 10 Pour les applications linéaires décrites ci-dessous, donnez l'image par la transposée d'un élément quelconque du domaine de cette transposée. Donnez une base de $\mathsf{ker}(A^t)$ et de $\mathsf{im}(A^t)$.

1. $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4\colon (x_1,x_2,x_3) \mapsto (x_1,x_1,x_1,x_1+x_2+x_3)$;
2. $A\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}\colon z \mapsto \overline{z}$ (comme $\mathbb{R}$-espace, bien sûr !) ;
3. $A\colon \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \to R[X]_{\leq 3}\colon P(X) \mapsto P(1) + (X-1)P'(1) + \frac{1}{2}(X-1)^2P''(1)$.