Exemples de groupes

Exercice 1 Soient b_1 et b_2 deux formes bilinéaires symétriques indéfinies sur $\mathbb{R}^2$. Pour $i = 1, 2$, on note B_i la matrice symétrique associée à la forme bilinéaire, i.e. $b_i(X, Y) = X^t B_i Y$, pour tout $X, Y \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les groupes $\mathsf{O}(b_1)$ et $\mathsf{O}(b_2)$ sont isomorphes.
On définit ainsi

$$\mathsf{O}_{1,1}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{GL}_2(\mathbb{R}) \mid b(AX, AY) = b(X, Y)\}$$

où $b((x_1, x_2)^{\mathsf{t}}, (y_1, y_2)^{\mathsf{t}}) = x_1x_2 - y_1y_2$.

Exercice 2 Décrire les éléments de $\mathsf{O}_{1,1}(\mathbb{R})$.

Exercice 3 Montrer que

1. dans $\mathsf{O}_2(\mathbb{R})$, tout élément est produit d'au plus 2 symétries axiales.
2. dans $\mathsf{O}_3(\mathbb{R})$, tout élément est produit d'au plus 3 symétries planes.

Exercice 4 Montrer que $\mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ est engendré par des matrices de la forme

$$\begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x^{-1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ z & 1 \end{pmatrix},$$

pour tout $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Exercice 5 Soit

$$\mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R}) = \{A \in \mathsf{GL}_3(\mathbb{R}) \mid b(Au, Av) = b(u, v) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^3\}$$

où $b((x, y, z)^{\mathsf{t}}, (x', y', z')^{\mathsf{t}}) = xx' + yy' - zz'$.

1. Montrer que si $A = (a_{ij}) \in \mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R})$, alors $a_{33} \neq 0$.
2. Montrer que $\mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ se décompose comme

$$\mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R}) = \mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1) \cup \mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1)P \cup \mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1)T \cup \mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1)PT$$

où $\mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1) = \{(a_{ij}) \in \mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid \mathsf{det}(a_{ij}) = 1 \text{ et } a_{33} > 0\}$,

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

3. Montrer que $\mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1)$ est normal dans $\mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R})$ et que le groupe quotient est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.
4. On considère la forme bilinéaire symétrique $(B_1|B_2) = \frac{1}{2}\mathsf{tr}(B_1B_2)$ sur l'espace vectoriel
$$V = \{B \in \mathsf{M}_2(\mathbb{R}) \mid \mathsf{tr}(B) = 0\}.$$
   (a) Soient $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que
$$(xe_1 + ye_2 + ze_3|x'e_1 + y'e_2 + z'e_3) = xx' + yy' - zz'.$$
   On en déduit que $\mathsf{O}(V) \cong \mathsf{O}_{2,1}(\mathbb{R})$.
   (b) Pour $A \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$, on note φ_A l'endomorphisme de l'espace vectoriel V défini par $\varphi_A(B) = ABA^{-1}$. Montrer que $\varphi_A \in \mathsf{O}(V)$ pour tout $A \in \mathsf{SL}_2(\mathbb{R})$ et qu'on peut ainsi définir un homomorphisme de groupes $\varphi\colon \mathsf{SL}_2(\mathbb{R}) \to \mathsf{O}(V)\colon A \mapsto \varphi_A$.
   (c) Montrer que $\mathsf{ker}(\varphi) = \{1, -1\}$ et que $\mathsf{im}(\varphi) \subset \mathsf{SO}_{\uparrow}(2,1)$ (utiliser l'Exercice 4).