Représentations de groupes: généralités

Exercice 1 Soit $G = \mathsf{C}_n$ le groupe cyclique d'ordre n. On identifie G avec le sous-groupe de S_n engendré par le cycle $\sigma = (1, \ldots, n)$. On fait agir G sur $\mathbb{C}^n$ par permutation des coordonnées. Montrer que la représentation ainsi obtenue est isomorphe à la somme de n représentations de degré 1 :

$$\rho_k\colon G \to \mathsf{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times\colon \sigma \mapsto \mathsf{e}^{2\mathsf{i}k\pi/n}, \qquad \text{pour } k = 0, \ldots, n-1.$$

Exercice 2 Soit G le groupe diédral D_n, i.e. le groupe engendré par R et S tels que $R^n = S^2 = 1$ et $SR = R^{-1}S$. Posons $\omega = \mathsf{e}^{2\mathsf{i}\pi/n}$. Pour $h \in \mathbb{Z}$, on définit la représentation $\rho_h\colon G \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$ par $\rho_h(R) = \begin{pmatrix} \omega^h & 0 \\ 0 & \omega^{-h} \end{pmatrix}$ et $\rho_h(S) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que ces formules définissent bien une représentation.
2. Montrer que ρ_h et ρ_{n-h} sont isomorphes.
3. Montrer que ρ_h et $\rho_{h'}$ ne sont pas isomorphes si $0 \leq h < h' \leq n/2$.
4. Montrer que ρ_h est irréductible si $0 < h < n/2$, et que ρ_0 et $\rho_{n/2}$ (si n est pair) sont réductibles.

Exercice 3 (Représentation contragrédiente) Soit $\rho\colon G \to \mathsf{GL}(V)$ un représentation.

1. Montrer que l'on peut définir une représentation $\rho^\star\colon G \to \mathsf{GL}(V^\star)$ par $\rho^\star(g) = (\rho(g)^{-1})^{\mathsf{t}}$. On l'appelle la *représentation contragrédiente* de ρ.
2. Déterminer la contragrédiente des représentations ρ_k de l'exercice 1.
3. Déterminer la contragrédiente des représentations ρ_h de l'exercice 2.
4. Montrer qu'une représentation est isomorphe à sa contragrédiente si et seulement s'il existe une forme bilinéaire non dégénérée $b\colon V \times V \to \mathbb{C}$ telle que $b(\rho(g)(x), \rho(g)(y)) = b(x, y)$ pour tout $x, y \in V$.

Exercice 4 (Produit tensoriel de représentations) Soient $\rho_1\colon G \to \mathsf{GL}(V_1)$ et $\rho_2\colon G \to \mathsf{GL}(V_2)$ des représentations.

1. Montrer que l'on peut définir une représentation $\rho_1 \otimes \rho_2\colon G \to \mathsf{GL}(V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2)$ par $\rho_1 \otimes \rho_2(g) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(g)$.
2. Déterminer le produit tensoriel des repésentations $\rho_k, \rho_l\colon \mathsf{C}_n \to \mathsf{GL}_1(\mathbb{C})$.
3. Déterminer le produit tensoriel de représentations $\rho_h, \rho_{h'}\colon \mathsf{D}_n \to \mathsf{GL}_2(\mathbb{C})$; décomposer $\rho_h \otimes \rho_{h'}$ en somme de représentations irréductibles.