Produit tensoriel

Exercice 1 Soient E et F des espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Montrez que si $(e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E, alors tout élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} F$ s'écrit de manière unique comme $\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes f_i$, avec des $f_i \in F$. Enoncez l'observation symétrique.

Exercice 2 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

1. Montrez que $E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K} \cong E$ et explicitez l'isomorphisme.
2. Montrez qu'on a plus généralement un isomorphisme naturel entre $E \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^m$ et E^m pour $m \geq 1$.

Indication : partez d'une application bilinéaire de $E \times \mathbb{K}^m$ vers E^m.

Exercice 3

1. Quelle est la dimension de $(\mathbb{R} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}$ comme $\mathbb{R}$-espace ?
2. Comparez les dimensions de $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$.
3. Indiquez une application bilinéaire naturelle entre $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^6$ et déduisez-en un isomorphisme explicite entre $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ et $\mathbb{R}^6$.
4. Donnez les coordonnées de $(2, 3) \otimes (1, 0, 4)$ et de
$$(2, 3) \otimes (1, 0, 4) + (1, 4) \otimes (2, 3, 0)$$
dans la base “canonique” de $\mathbb{R}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ (obtenue à partir des bases canoniques de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ avec l'ordre lexicographique).

Exercice 4

1. Montrez que $\mathbb{K}^{n\times 1} \otimes_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^{1\times m}$ est isomorphe à $\mathbb{K}^{n\times m}$, par l'application
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \otimes (y_1, \ldots, y_m) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 y_1 & \ldots & x_1 y_m \\ \vdots & & \vdots \\ x_n y_1 & \ldots & x_n y_m \end{pmatrix}.$$
2. Montrez qu'une matrice de genre (n, m) est l'image d'un tenseur élémentaire non nul si et seulement si elle est de rang 1.
3. Montrez que le rang d'une matrice de genre (m, n) est égal au nombre minimum de tenseurs élémentaires dont on doit faire la somme pour obtenir un tenseur dont elle soit la somme.

Exercice 5

1. Montrez que $\mathbb{R}[X]_{\leq 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ est isomorphe à $\mathbb{R}^{3\times 3}$ en explicitant un isomorphisme.
2. Ecrivez le tenseur $t = 1\otimes 1 + 2\otimes X^2 + X^2\otimes 2 + X\otimes X - X\otimes X^2 + 4X^2\otimes X^2$ comme somme d'un nombre minimum de tenseurs élémentaires.

Exercice 6 Soit E un espace vectoriel de dimension finie ≥ 2 sur $\mathbb{K}$ et $(e_1,\dots e_n)$ une base. Montrez que le tenseur $e_1\otimes e_2 + e_2\otimes e_1$ de $E\otimes_{\mathbb{K}} E$ ne peut pas se mettre sous la forme d'un tenseur élémentaire $x\otimes y$.

Exercice 7

1. Soit E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Montrez que l'application linéaire $T\colon E\otimes_{\mathbb{K}} F \to F\otimes_{\mathbb{K}} E$, qui correspond à

$$\tau\colon E\times F \to F\otimes_{\mathbb{K}} E\colon (x,y)\mapsto y\otimes x$$

   est un isomorphisme.
2. En supposant que $E = F$, avec une base $(e_1,\dots e_n)$, montrez que

$$S = \{t\in E\otimes E \mid T(t) = t\}$$

   est un sous-espace de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ et donnez une base de ce sous-espace.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel de dimension n sur $\mathbb{R}$, avec une base $(e_1,\dots e_n)$.

1. Donnez une base de $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}$-espace.
2. Montrez que $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ est aussi un $\mathbb{C}$-espace et que $e_1\otimes 1,\dots,e_n\otimes 1$ en est une base, comme $\mathbb{C}$-espace.
3. Donnez une application $\mathbb{R}$-linéaire canonique de E dans $E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C}$ et montrez, en utilisant cette application, qu'il y a une bijection entre $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}(E,F)$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}(E\otimes_{\mathbb{R}}\mathbb{C},F)$ pour tout espace vectoriel F sur $\mathbb{C}$.

Exercice 9 On considère l'application linéaire $A\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}[X]$ défini par

$$A(a,b,c) = (a+c)X^2 + (3b-2a)X^4 + 2c.$$

Donnez une expression du tenseur correspondant dans $\mathbb{R}[X]\otimes_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)^*$.

Exercice 10 On considère l'application $\beta\colon\mathbb{R}[X]_{\leq 2}\times\mathbb{R}[X]_{\leq 3}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\beta(p(X),q(X)) = p(0)q(0) + p(1)q(1).$$

A cette application correspond – par l'isomorphisme décrit dans le cours – un tenseur de $(\mathbb{R}[X]_{\leq 2})^*\otimes_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}[X]_{\leq 3})^*$. Exprimez ce tenseur dans la base usuelle.

Exercice 11

1. Soit $A\colon E \to G$ et $B\colon F \to H$ des applications linéaires entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels admettant comme bases respectives
$$e = (e_1, \dots, e_m), g = (g_1, \dots, g_p), f = (f_1, \dots, f_n) \text{ et } h = (h_1, \dots, h_q).$$
Décrivez la matrice qui représente $A \otimes B$ à travers les bases $e \otimes f$ et $g \otimes h$, à partir des matrices ${}_g(A)_e$ et ${}_h(B)_f$. La matrice obtenue est notée ${}_g(A)_e \otimes {}_h(B)_f$ et est appelée le produit de Kronecker des matrices.
2. Supposez à présent que $G = E$ et $H = F$, de sorte que $A \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(E)$ et $B \in \mathsf{End}_{\mathbb{K}}(F)$. Décrivez les matrices ${}_e(A)_e \otimes {}_f(\mathsf{Id}_F)_f$ et ${}_e(\mathsf{Id}_E)_e \otimes {}_f(B)_f$. A partir de là, montrez que
$$\det\Big({}_e(A)_e \otimes {}_f(B)_f\Big) = \Big(\det {}_e(A)_e\Big)^{\dim F}\Big(\det {}_f(B)_f\Big)^{\dim E}.$$

Exercice 12 On désigne par g la conjugaison dans $\mathbb{C}$.

1. Donnez une base de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$.
2. Donnez la matrice représentant $g \otimes g$ dans cette base.
3. Montrez que la loi $z_1 \otimes z_2 \mapsto z_1 g(z_2)$ permet de définir une application $\mathbb{R}$-linéaire de $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$.
4. Donnez une base du noyau de l'application linéaire définie en 3.

Exercice 13 Soit E, F, G, H des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Soit T l'application de $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G) \times \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, H)$ dans $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes_{\mathbb{K}} F, G \otimes_{\mathbb{K}} H)$ qui envoie (A, B) sur $T(A, B)$ défini par $T(A, B)(x \otimes y) = A(x) \otimes B(y)$.

1. Montrez que T est bilinéaire.
2. Montrez que l'application $\mathbb{K}$-linéaire induite entre $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, G) \otimes_{\mathbb{K}} \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, H)$ et $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E \otimes_{\mathbb{K}} F, G \otimes H)$ est un isomorphisme de sorte que le fait d'adopter la notation $A \otimes B$ pour $T(A, B)$ est un abus acceptable.

Exercice 14

1. Montrez que $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$ est isomorphe à $\mathbb{R}[X, Y]$.
2. Si D désigne l'opérateur de dérivation sur $\mathbb{R}[X]$ et I l'identité, à quels opérateurs sur $\mathbb{R}[X, Y]$ correspondent $D \otimes I$, $I \otimes D$, $D \otimes D$, $D^p \otimes D^q$ $(p, q \in \mathbb{N})$?
3. Montrez que $\mathbb{R}[X] \otimes_{\mathbb{R}} \ldots \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]$ (n fois) est isomorphe à $\mathbb{R}[X_1, \dots, X_n]$.

Exercice 15 Soit $E_1, \dots, E_n$ des espaces vectoriels de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrez que $E_1^* \otimes_{\mathbb{K}} \ldots \otimes_{\mathbb{K}} E_n^*$ est naturellement isomorphe à l'espace des applications multilinéaires de $E_1 \times \ldots \times E_n$ vers $\mathbb{K}$.

Exercice 16 Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $e = (e_1, \dots, e_n)$ une base.

1. Soit $t = t^i_j e_i \otimes e^j$ un élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} E^*$. Donnez les formules de passage entre les coordonnées t^i_j et les coordonnées de t par rapport à une autre base $e' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ (et sa base duale).
2. Soit $s = s_{ij} e^i \otimes e^j$ un élément de $E^* \otimes_{\mathbb{K}} E^*$. Donnez les formules de passage entre les coordonnées s_{ij} et celles par rapport à la base duale de e'.

Exercice 17 Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension finie.

1. Un élément de $E \otimes_{\mathbb{K}} E$ est dit symétrique (antisymétrique) si ses coordonnées t^{ij} vérifient la condition $t^{ij} = t^{ji}$ (ou $-t^{ji}$). Montrez que cette propriété est indépendante du choix de la base.
2. Montrez que tout tenseur élémentaire $x \otimes y$ s'écrit comme somme d'un tenseur symétrique et d'un tenseur antisymétrique.

Exercice 18 La contraction $\Gamma \colon E \otimes_{\mathbb{K}} E^* \to \mathbb{K}$ envoie $x \otimes \varphi$ sur $\varphi(x)$. Quelle est l'image du tenseur $t = t^i_j e_i \otimes e^j$? Vérifiez qu'elle ne dépend pas du choix de la base.

Exercice 19

1. On s'intéresse au tenseur $s = X^2 \otimes 2 - X \otimes X^2 + 1 \otimes X$ dans $\mathbb{R}[X]_{\leq 2} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{R}[X]_{\leq 2}$. Que deviennent les coordonnées de s quand on remplace la base usuelle de $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ par la base $(1, 1 + X, (1 + X)^2)$?
2. On s'intéresse plus généralement au tenseur $t = t^{ij} x^{i-1} \otimes x^{j-1}$ (pour $i, j \in \{1, 2, 3\}$). Que deviennent ses coordonnées quand on remplace la base usuelle de $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ par la base $(1, 1 + X, (1 + X)^2)$?

Exercice 20 Soit E une espace vectoriel réel euclidien, avec un produit scalaire donné par la matrice (g_{ij}).

1. Si $x = x^i e_i$ et $y = y^i e_i$, quelles sont les coordonnées covariantes du tenseur $x \otimes y$?
2. Si $\varphi = \varphi_i e^i$, $\psi = \psi_i e^i$ et $\theta = \theta_i e^i$, quelles sont les coordonnées contravariantes du tenseur $\varphi \otimes \psi \otimes \theta$?

Exercice 21 Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Supposons que $(u(e)_{i,j})$ soient les coordonnées d'un tenseur 2-covariant et $(v(e)^i_j)$ soient les coordonnées d'un tenseur 1-covariant et 1-contravariant. Pour toute base e de E, on pose

$$w(e)_{ij} = u(e)_{ik} \cdot v(e)^k_j.$$

Montrer que $(w(e)_{ij})$ sont les coordonnées d'un tenseur 2-covariant.