Puissances extérieures

Exercice 1

1. Soit $E = \mathbb{R}^2$. Décrire les puissance extérieures de E en précisant les dimensions et en indiquant les bases obtenues à partir de la base canonique. Si $x = (x_1, x_2)$ et $y = (y_1, y_2)$, donner les coordonnées de $x \wedge y$.
2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Décrire les puissances extérieures, préciser leurs dimensions et indiquer les bases obtenues à partir de la base canonique. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ et $z = (z_1, z_2, z_3)$, donner les coordonnées de $x \wedge y$ et de $x \wedge y \wedge z$.

Exercice 2

1. Soit E le plan mis en bijection avec $\mathbb{R}^2$ par le biais du repère orthonormé usuel. Soit O l'origine et soit P et Q deux points de coordonnées (x_1, x_2) et (y_1, y_2). Comparer l'aire du parallèlogramme construit sur les vecteurs $\overrightarrow{OP}$ et $\overrightarrow{OQ}$ avec la coordonnée de $(x_1, x_2) \wedge (y_1, y_2)$.
2. Soit E l'espace usuel mis en bijection avec $\mathbb{R}^3$ par le biais du repère orthonormé usuel. Soit O l'origine et soit P, Q, R des points de coordonnées respectives (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) et (z_1, z_2, z_3). Comparer le volume du parallèlipipède construit sur $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$ avec la coordonnée de $(x_1, x_2, x_3) \wedge (y_1, y_2, y_3) \wedge (z_1, z_2, z_3)$.

Exercice 3 Soit E un espace de dimension n sur $\mathbb{K}$ avec une base $(e_1, \dots, e_n)$. Soit $x_1, \dots, x_n$ des vecteurs donnés, avec $x_j = a^i_j e_i$. Posons $A = (a^i_j)$. Justifier l'égalité

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \det(A) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n.$$

Exercice 4 Soit E un espace vectoriel de dimension 4 avec une base (e_1, e_2, e_3, e_4). Montrer que

1. $e_1 \wedge e_2 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas décomposable ;
2. $e_1 \wedge e_2 + e_2 \wedge e_3 + e_3 \wedge e_1$ est décomposable ;
3. $e_1 \wedge e_2 + e_1 \wedge e_3 + e_1 \wedge e_4 + e_2 \wedge e_3 + e_2 \wedge e_4 + e_3 \wedge e_4$ n'est pas décomposable.

Exercice 5 Soit E un espace euclidien de dimension 3 et (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée de E. L'application produit vectoriel $\times : E \times E \to E : (v_1, v_2) \mapsto v_1 \times v_2$ est bilinéaire alternée. Soit $A : E \wedge E \to E$ l'unique application linéaire telle que $A(v_1 \wedge v_2) = v_1 \times v_2$ pour tout $v_1, v_2 \in E$. Montrer que A est un isomorphisme.

Exercice 6 Soit E un espace euclidien de dimension 4 et (e_1, e_2, e_3, e_4) une base orthonormée de E. On définit une application bilinéaire alternée

$$\times\colon E \times E \times E \to (v_1, v_2, v_3) \mapsto v_1 \times v_2 \times v_3 = \begin{cases} 0 & \text{si la suite } (v_1, v_2, v_3) \text{ est liée,} \\ v_4 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec $v_4 = \det\left({}_e(v_1), {}_e(v_2), {}_e(v_3), {}_e(w)\right)w$, où w est un vecteur de $\mathsf{sev}\langle v_1, v_2, v_3\rangle^{\perp}$ de norme 1. Soit $A\colon E \wedge E \wedge E \to E$ l'application linéaire induite par $\times$. Montrer que A est un isomorphisme.

Exercice 7 Soit E un espace vectoriel de dimension n et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit A l'application de $\bigwedge^{n-1} E$ dans $E^\star$ définie par $A(x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}) = \varphi$ avec $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1} \wedge y = \varphi(y) e_1 \wedge \ldots \wedge e_n$ pour tout $y \in E$. Montrer que A est bijective.

Exercice 8 Soit E un espace vectoriel de dimension 4. Montrer que pour tout $\xi \in \bigwedge^2 E$, $\xi \wedge \xi = 0$ si et seulement si ξ est décomposable.