

Tables de caractères

Exercice 1 Soit $n \geq 2$ et considérons le groupe diédral D_n .

1. Déterminer les classes de conjugaison de D_n .
2. Donner la table des caractères irréductibles de D_4 et de D_5 .
3. Donner la table des caractères irréductibles de D_n (séparer les cas où n est pair et où n est impair).

Exercice 2 Soit Q le groupe quaternionien, i.e. $Q = \{1, i, j, ij, -1, -i, -j, -ij\}$ avec $-1 \in Z(Q)$, $i^2 = j^2 = -1$ et $ji = -ij$.

1. Déterminer les classes de conjugaison de Q .
2. Donner la table des caractères irréductibles de Q . Préciser les représentations irréductibles correspondantes.

Exercice 3 Donner la table des caractères irréductibles du groupe alterné A_4 en précisant les représentations irréductibles correspondantes.

Exercice 4 (Représentations d'un produit direct) Soient G et H des groupes finis.

1. Soient $\rho_1: G \rightarrow \text{GL}(V_1)$ et $\rho_2: H \rightarrow \text{GL}(V_2)$ des représentations. Montrer que l'on peut définir une représentation $\rho_1 \otimes \rho_2: G \times H \rightarrow \text{GL}(V_1 \otimes_{\mathbb{C}} V_2)$ par $\rho_1 \otimes \rho_2(g, h) = \rho_1(g) \otimes \rho_2(h)$. Exprimer le caractère de $\rho_1 \otimes \rho_2$ en fonction des caractères de ρ_1 et de ρ_2 .
2. Montrer que si ρ_1 et ρ_2 sont irréductibles, alors $\rho_1 \otimes \rho_2$ l'est aussi (utiliser le fait qu'une représentation de caractère χ est irréductible si et seulement si $(\chi | \chi) = 1$).
3. Calculer $(\chi_{\rho_1 \otimes \rho_2} | \chi_{\rho'_1 \otimes \rho'_2})$ en fonction des $(\chi_{\rho_i} | \chi_{\rho'_i})$. En déduire que si $\rho_1 \not\cong \rho'_1$ ou $\rho_2 \not\cong \rho'_2$, alors $\rho_1 \otimes \rho_2 \not\cong \rho'_1 \otimes \rho'_2$.
4. En utilisant la formule liant le degré des représentations irréductibles d'un groupe et l'ordre de ce groupe, montrer que les représentations irréductibles de $G \times H$ sont les représentations $\rho_1 \otimes \rho_2$ pour tout ρ_1, ρ_2 irréductibles.
5. Donner la table des caractères irréductibles de $S_3 \times D_5$.