Extension et polynôme minimal

Exercice 1

1. Calculer le polynôme minimal $\mathsf{min}(\sqrt{2}, \mathbb{Q})$ de $\sqrt{2}$ sur $\mathbb{Q}$.
2. Posons $\alpha = 1 + \sqrt{2}$. Montrer que $\mathsf{min}(\alpha, \mathbb{Q}) = x^2 - 2x - 1$.
3. Posons $\beta = \sqrt{\alpha}$. Calculer $\mathsf{min}(\beta, \mathbb{Q})$.

Exercice 2 Soit F un corps de caractéristique différente de 2 et K une extension de degré 2 de F. Montrer qu'il existe $a \in F$ tel que $K = F(\sqrt{a})$.

Exercice 3 Pour tout $n \geq 1$, donner un exemple d'extension de $\mathbb{Q}$ de degré n.

Exercice 4 Soit K une extension de degré fini du corps F et $a, b \in K$. Montrer que

$$[F(a,b) : F] \leq [F(a) : F] \cdot [F(b) : F].$$

Exercice 5 Soit p un nombre premier et K une extension de F telle que $[K : F] = p$.

1. Montrer que pour tout corps M tel que $F \subset M \subset K$, on a soit $M = F$, soit $M = K$.
2. Montrer que pour tout $a \in K \setminus F$, on a $K = F(a)$.

Exercice 6 Soit $a, b \in \mathbb{C}$ des éléments algébriques sur $\mathbb{Q}$ tels que $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$ et $[\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]$ sont premiers entre-eux. Montrer que

1. $[\mathbb{Q}(a,b) : \mathbb{Q}] = [\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}] \cdot [\mathbb{Q}(b) : \mathbb{Q}]$;
2. $\mathbb{Q}(a) \cap \mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}$;
3. $\mathsf{min}(a, \mathbb{Q}) = \mathsf{min}(a, \mathbb{Q}(b))$.

Exercice 7 Soit a une racine du polynôme $x^5 - 2x + 2 \in \mathbb{Q}[x]$.

1. Calculer $[\mathbb{Q}(a) : \mathbb{Q}]$.
2. Ecrire $(a-1)^{-1}$ comme $p(a)$ où $p \in \mathbb{Q}[x]$ est de degré minimal.
3. Déterminer $\mathsf{min}(a^2, \mathbb{Q})$.

Exercice 8 Montrer que les polynômes suivants sont irréductibles sur $\mathbb{Q}$:

$$x^3 - x + 1, \quad x^3 - 3x + 1, \quad x^5 - x + 1.$$

Indication : Utiliser le fait que si $q(x) \in \mathbb{Z}[x]$ et $\overline{q(x)} \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[x]$ est irréductible pour un certain nombre premier p, alors $q(x)$ est irréductible dans $\mathbb{Q}[x]$.

Exercice 9 Soit F un corps de caractéristique $p \neq 0$ et $a \in F$. Montrer que $x^p - a$ est irréductible dans $F[x]$ si et seulement si $a \notin F^p = \{b^p \mid b \in F\}$.

Exercice 10 Déterminer le corps de racines des polynômes suivants :

1. $x^2 + x + 1$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
2. $x^3 + x + 1$ sur $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$;
3. $x^6 + 1$ sur $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$;
4. $x^3 - 2$ sur $\mathbb{Q}$ puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Soit F un corps de caractéristique p et $q(x) \in F[x]$ un polynôme irréductible.

1. Montrer que $q(x)$ possède au moins une racine multiple dans un corps de déploiement si et seulement si $q(x) = r(x^p)$ pour un certain polynôme $r(x) \in F[x]$.
2. Montrer que $q(x) = r(x^{p^n})$ pour un certain polynôme $r(x) \in F[x]$ n'ayant pas de racines multiples et un certain $n \in \mathbb{N}$.