Réciprocité quadratique

Exercice 1 En utilisant le lemme de Gauss, calculer

$$\left(\frac{5}{7}\right), \left(\frac{3}{11}\right), \left(\frac{6}{13}\right) \text{ et } \left(\frac{-1}{p}\right) \text{ pour tout } p \text{ premier impair.}$$

Exercice 2 Les congruences suivantes ont-elles des solutions :

1. $x^2 \equiv 7 \bmod 53$
2. $x^2 \equiv 14 \bmod 31$
3. $x^2 \equiv 53 \bmod 7$
4. $x^2 \equiv 25 \bmod 997$

Exercice 3 Les congruences suivantes ont-elles des solutions :

1. $x^2 \equiv 211 \bmod 159$
2. $x^2 \equiv 113 \bmod 997$
3. $x^2 \equiv 942 \bmod 2377$
4. $x^2 \equiv 2007 \bmod 2477$
5. $x^2 \equiv 1234 \bmod 4567$
6. $x^2 \equiv 1356 \bmod 2467$

(les nombres 997, 2377, 2477, 4567 et 2467 sont premiers).

Exercice 4 Résoudre

1. $2x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \bmod 7$
2. $2x^2 + 3x + 1 \equiv 0 \bmod 101$
3. $3x^2 + x + 8 \equiv 0 \bmod 11$
4. $3x^2 + x + 52 \equiv 0 \bmod 11$

Exercice 5 En utilisant la réciprocité quadratique, trouver les nombres premiers pour lesquels 7 est un résidu quadratique. Même question pour 15.

Exercice 6 Trouver les nombres premiers p tels que les congruences suivantes ont des solutions

1. $x^2 \equiv x - 2 \bmod p$
2. $x^2 \equiv x + 1 \bmod p$

Exercice 7

1. Quels nombres premiers divisent $n^2 + 1$ pour un certain n ?
2. Quels nombres premiers divisent $n^2 + n$ pour un certain n ?
3. Quels nombres premiers divisent $n^2 + 2n + 2$ pour un certain n ?

Exercice 8 Soit p un nombre premier impair. Montrer que le produit des résidus quadratiques est congruent à 1 modulo p si $p \equiv 3 \bmod 4$ et est congruent à -1 si $p \equiv 1 \bmod 4$.