

Théorème de Hasse

Exercice 1 L'équation $6x^2 - 30y^2 = z^2$ a-t-elle des solutions non triviales dans \mathbb{Z} ? dans \mathbb{Q} ?

Exercice 2 Les équations suivantes ont-elles des solutions non triviales dans \mathbb{Q} ?

1. $17x^2 + 26y^2 = z^2$
2. $3x^2 + 15y^2 - 7z^2 = 0$
3. $13x^2 + 26xy + 21y^2 - 11z^2 = 0$

Exercice 3 Trouver le plus petit nombre premier $p \neq 2$ tel que $x^2 = x - 1$ admet une solution dans \mathbb{Q}_p . Pour ce nombre premier, calculer les 2 premiers termes du représentant canonique d'une solution.

Exercice 4 Soit $a, b \in \mathbb{Q}^\times$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

1. L'équation $ax^2 + by^2 = 0$ possède des solutions non triviales dans \mathbb{Q} .
2. L'équation $ax^2 + by^2 = 0$ possède des solutions non triviales dans \mathbb{R} et dans tout \mathbb{Q}_p , p premier.
3. L'équation $ax^2 + by^2 = 0$ possède des solutions non triviales dans \mathbb{R} et dans tout \mathbb{Q}_p , p premier impair.

Exercice 5 Soit p un nombre premier impair. Posons

$$\mathbb{Q}_p^{\times 2} = \{x^2 \mid x \in \mathbb{Q}_p^\times\}.$$

Montrer que le groupe quotient $\mathbb{Q}_p^\times / \mathbb{Q}_p^{\times 2}$ est isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

Exercice 6 Soit p un nombre premier impair.

1. Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}_p^\times$. Montrer que $ax^2 + by^2 + cz^2 = 0$ possède des solutions non triviales dans \mathbb{Q}_p .
2. En déduire que $a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2 = 0$ possède des solutions non triviales dans \mathbb{Q}_p si $n \geq 5$ (où les $a_i \in \mathbb{Q}_p$ sont non nuls).